5. Comprobar que las siguientes funciones son homogéneas de grado cero y que satisfacen la condición establecida en el problema 4.

5.1 $z = \ln \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

5.2 $z = \frac{x + y}{x - y} + \sqrt{xy^{-1}}$

CAPITULO 7

APLICACIONES DE LA DERIVADA PARCIAL.

7.1 Máximos y mínimos de funciones de dos variables. Consideremos la función general de dos variables cuya gráfica es una superficie en el espacio: $z = f(x, y)$. Definiremos los máximos y mínimos relativos de la siguiente manera:

Def. Un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es un máximo relativo de la superficie $z = f(x, y)$, si $z_0 \geq f(x, y)$ para todo punto, en una vecindad alrededor del punto P. De la misma manera, $P(x_0, y_0, z_0)$ es un mínimo relativo si $z_0 \leq f(x, y)$ para todo punto en una vecindad del punto P.

De acuerdo con esta definición, para que un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sea un máximo relativo es necesario que sea un máximo relativo en todas direcciones. En particular debe ser un máximo relativo en las direcciones x y y, es decir debe satisfacer las siguientes:

Condiciones necesarias.

a) para que sea máximo relativo en la dirección x :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0$$

b) para que sea máximo relativo en la dirección y :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} < 0$$

Consideremos las condiciones necesarias en términos de diferenciales:

El diferencial de z mide el incremento total del plano tangente, (determinado por las tangentes en las direcciones x y y), correspondiente a los incrementos arbitrarios Δx y Δy. Ahora, si $P\ (x_0, y_0, z_0)$ es un máximo relativo, el plano tangente debe ser horizontal, es decir, paralelo al plano $x - y$ y por lo tanto el incremento total debe ser cero cuando aplicamos incrementos arbitrarios Δx y Δy en las direcciones x y y.

Entonces:

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy = 0$$

Ahora, puesto que dx y dy son iguales a los incrementos Δx y Δy, entonces pueden tomar cualquier valor y por lo tanto para que dz sea igual a cero es necesario que: $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$ y $\frac{\delta z}{\delta y} = 0$.

Condiciones suficientes. Hemos establecido como condiciones necesarias para que $P\ (x_0, y_0, z_0)$ sea un máximo relativo, que las primeras derivadas parciales de z con respecto a x y y sean cero. Además de estas condiciones, la superficie $z = f\ (x, y)$ debe ser cóncava hacia abajo para que el Punto $P\ (x_0, y_0, z_0)$, sea un máximo relativo. El segundo diferencial de z mide el incremento del incremento del plano tangente. Entonces, la superficie será cóncava hacia abajo si el segundo diferencial de z es negativo. Ahora, el diferencial de z es una función de x y y, es decir: $dz = g\ (x, y)$. Entonces, aplicando la definición del diferencial de una función de dos variables y denotando el segundo diferencial de z por d^2z, se tiene:

$$d^2z = d\left(\frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy\right)$$

$$= \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy\right) dx + \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy\right) dy$$

$$= \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} dx\, dy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} (dy)^2$$

Ahora, d^2z debe ser negativo para que $P\ (x_0, y_0, z_0)$ sea un máximo relativo. Es decir:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} dx\, dy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} (dy)^2 < 0$$

Hagamos las siguientes sustituciones para facilitar la conclusión:

$$A = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\ ; \quad B = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\ ; \quad C = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\ ; \ dx = r\ ; \ dy = s$$

Entonces:

$$A r^2 + 2 B r s + C s^2 < 0$$

$$A \left(r^2 + 2 \frac{B}{A} r s\right) + C s^2 < 0$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto en la expresión entre paréntesis:

$$A \left(r^2 + 2 \frac{B}{a} r s + \frac{B^2}{A^2} s^2\right) + C s^2 - \frac{B^2}{A} s^2 < 0$$

$$A \left(r + \frac{B}{A} s\right)^2 + \frac{A C - B^2}{A} s^2 < 0$$

$$A\left[\left(r + \frac{B}{A} s\right)^2 + (A C - B^2) \left(\frac{s}{A}\right)^2\right] < 0$$

Ahora, la expresión entre paréntesis rectangular es positiva cuando: $A C - B^2 > 0$. En este caso, el otro factor A debe ser negativo, es decir $A < 0$.

Devolviendo la sustitución, las condiciones suficientes para P sea un máximo relativo son:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0 \\ \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0 \end{cases}$$

De la misma manera, para que un punto sea un mínimo relativo debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta z}{\delta x} = 0 \;;\; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} > 0 \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = 0 \;;\; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

Resumen. Hemos deducido el siguiente proceso para determinar los máximos y mínimos relativos de una función de 2 variables:

$z = f(x, y)$:

(a) Se encuentran los puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta z}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = 0 \end{cases}$$

(b) Se encuentran los valores de las segundas derivadas parciales en los puntos obtenidos en el inciso (a):

1. Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0 \;;\; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0$,

   entonces el punto en cuestión es un máximo relativo.

2. Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} > 0 \;;\; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0$,

   entonces el punto en cuestión es un mínimo relativo.

3. Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 < 0$, entonces el punto en cuestión no es máximo ni mínimo relativo. En este caso, el punto en cuestión es máximo en una dirección y mínimo en la otra.

Observación: Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 = 0$, entonces la prueba no sirve para nuestros propósitos porque no podemos asegurar que el punto en cuestión sea o no, un máximo o mínimo relativo.

Ejemplo: Encontrar los máximos y mínimos relativos de:

$$z = x^2 + y^3 - 12\,y$$

Solución:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 2x$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 3y^2 - 12$$

Encontremos los puntos de tangente horizontal en las direcciones fundamentales x y y:

$$2x = 0$$

$$3y^2 - 12 = 0$$

$$x = 0$$

$$3y^2 = 12$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

Entonces, los puntos en el plano $x - y$ que posiblemente corresponden a máximos o mínimos relativos son:

$$A\ (0,\ 2) \quad y \quad B\ (0,\ -2)$$

Hagamos ahora la prueba de las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 6y$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = 0$$

En el punto A (0, 2) ; x = 0 ; y = 2. Sustituyendo:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 = 2\ (6y) - 0 = 24 > 0$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 2 > 0$$

Entonces, A (0, 2) corresponde a un mínimo relativo de z.

Para x = 0 ; y = 2, se tiene:

$$z = x^2 + y^3 - 12\ y = 0 + 8 - 24 = -16$$

Entonces, P (0, 2, -16) es un mínimo relativo.

En el punto B (0, -2) ; x = 0 ; y = -2

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 = 2\ (-12) - 0 = -24 < 0$$

Entonces, el punto B (0, -2) no corresponde a máximo o mínimo relativo.

7.2 Problema de monopolio múltiple. Supongamos que en un determinado mercado, 2 artículos están relacionados por sus leyes de demanda y son monopolizados por un solo monopolista. Entonces se presenta el problema de determinar las cantidades que deben producirse y los precios que deben aplicarse a los artículos para obtener el máximo ingreso neto. Consideramos el siguiente caso específico:

Problema. Un monopolista produce 2 artículos A_1 y A_2 a costos medios constantes, de manera que el costo total de producción es dado por: $C = 3x_1 + 5x_2$. Los artículos están relacionados en el mercado por las siguientes leyes de demanda:

$$x_1 = 80 - 2\ P_1 - P_2$$
$$x_2 = 100 - 2\ P_1 - 3\ P_2$$

Donde x_i = Cantidad demandada por el artículo A_i

P_i = Precio del artículo A_i

Determinar las condiciones óptimas para el monopolista, es decir, los precios de monopolio para obtener el máximo ingreso neto.

Solución. El ingreso total I_t es igual a las cantidades demandadas por sus respectivos precios:

$$I_t = x_1\ P_1 + x_2\ P_2$$

Ahora, el costo total de producción es:

$$C = 3x_1 + 5x_2$$

Entonces , el ingreso neto I_n es:

$$I_n = I_t - C$$

$$I_n = x_1\ P_1 + x_2\ P_2 - 3x_1 - 5x_2 = x_1\ (p_1 - 3) + x_2\ (p_2 - 5)$$

Sustituyendo:

$$x_1 = 80 - 2p_1 - p_2$$
$$x_2 = 100 - 2p_1 - 3p_2$$

$$I_n = (80 - 2p_1 - p_2)\ (p_1 - 3) + (100 - 2p_1 - 3p_2)\ (p_2 - 5)$$

$$\frac{\delta I_n}{\delta p_1} = (80 - 2p_1 - p_2) + (p_1 - 3)\ (-2) + (p_2 - 5)\ (-2)$$

$$= 80 - 2p_1 - p_2 - 2p_1 + 6 - 2p_2 + 10$$

$$= -4p_1 - 3p_2 + 96$$

$$\frac{\delta I_n}{\delta p_2} = (p_1 - 3)\ (-1) + (100 - 2P_1 - 3P_2) + (P_2 - 5)\ (-3)$$

$$= -P_1 + 3 + 100 - 2P_1 - 3P_2 - 3P_2 + 15$$

$$= 3P_1 - 6P_2 + 118 = 0$$

Puntos de tangente horizontal en las direcciones P_1 y P_2:

$$\begin{cases} -4\,P_1 - 3\,P_2 + 96 = 0 \\ -3\,P_1 - 6\,P_2 + 118 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4P_1 + 3\,P_2 = 96 \\ 3P_1 + 6\,P_2 = 118 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -2:

$$\begin{cases} -8\,P_1 - 6\,P_2 = -192 \\ 3\,P_1 + 6\,P_2 = 118 \end{cases}$$

$$-5P_1 = -74$$

$$P_1 = \frac{74}{5}$$

$$P_1 = 14.80$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$4\,(14.80) + 3\,P_2 = 96$$

$$3\,P_2 = 96 - 59.20 = 36.80$$

$$P_2 = 12.27 \text{ (aproximado a 2 decimales)}$$

Prueba de las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta\,P_1^{\,2}} = -4$$

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta\,P_2^{\,2}} = -6$$

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1 \delta P_2} = -3$$

Entonces:

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta\,P_1^{\,2}} \cdot \frac{\delta^2 I_n}{\delta\,P_2^{\,2}} - \left(\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1\,\delta P_2}\right)^2 = 24 - 9 = 15 > 0$$

Además:

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta\,P_1^{\,2}} = -4 < 0$$

Entonces: $P_1 = 14.80$ y $P_2 = 12.27$, corresponden a un máximo ingreso neto.

7.3 Máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales.

Consideremos una función de 2 variables $z = f\,(x, y)$ sujeta a la condición lateral $g\,(x, y) = 0$. En este caso, podemos considerar a y como una función implícita de x y por lo tanto, z resulta ser una función de x únicamente. Para determinar los máximos y mínimos relativos de z, podemos despejar y de la condición lateral, cuando esto sea posible, y sustituirla en $f\,(x, y)$ para obtener a z como una función de x y aplicar los métodos establecidos. Aun cuando no sea posible despejar y de la condición lateral, el problema se puede resolver considerando a z como una función de x únicamente y a y como una función implícita de x. Lagrange ideó un procedimiento para el problema de determinar máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales. Este método se conoce como <u>método de los multiplicadores de Lagrange</u>. Antes de establecer el método para el caso general, consideremos la función de 2 variables sujetas a una condición lateral: