$$z = f(x, y) \; ; \; g(x, y) = 0$$

Para determinar los posibles máximos y mínimos relativos, hagamos $w = g(x, y)$. Las condiciones necesarias para máximos o mínimos relativos en términos de diferenciales son dadas por:

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy = 0 \qquad (1)$$

Además, es necesario que $w = g(x, y) = 0$. Puesto que $w$ debe ser cero para todo $x$ y $y$, el diferencial de $w$ debe ser cero:

$$dw = g_x\,dx + g_y\,dy = 0 \qquad (2)$$

De las parejas $(x, y)$ que satisfagan la condición (1), deben seleccionarse las que satisfagan la condición (2). Lagrange redujo las dos condiciones a una, introduciendo el multiplicador $\lambda$ tal que:

$$dz - \lambda\,dw = 0$$

Sustituyendo: $f_x\,dx + f_y\,dy - \lambda(g_x\,dx + g_y\,dy) = 0$

$$(f_x - \lambda g_x)\,dx + (f_y - \lambda g_y)\,dy = 0$$

Ahora, los diferenciales de $x$ y $y$ pueden tomar cualquier valor. Entonces, para que la última expresión se satisfaga, es necesario que los coeficientes de $dx$ y $dy$ sean cero:

$$f_x - \lambda g_x = 0$$

$$f_y - \lambda g_y = 0$$

Agregando la condición lateral $g(x, y) = 0$, se tiene un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas $x$, $y$, $\lambda$.

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$



La solución de este sistema nos proporciona los puntos $(x, y)$ que posiblemente correspondan a máximos o mínimos relativos de $z$. De los puntos que satisfagan el sistema (1), aquellos que cumplan las siguientes condiciones, serán máximos relativos:

$$d^2 z < 0$$

$$d\,w = 0$$

De la misma manera, serán mínimos relativos si:

$$d^2 z > 0$$

$$d\,w = 0$$

La expresión de las condiciones suficientes en términos de derivadas parciales resultan complicadas y su verificació cada vez más laboriosa, a medida que aumenta el número de variables.

Entonces, nos limitaremos a determinar los puntos donde el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ sea paralelo al plano $x - y$ y que satisfagan la condición lateral $g(x, y) = 0$. (puntos donde el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es horizontal y cuya proyección en el plano $x - y$ está sobre la curva $g(x, y) = 0$ ). En algunos casos, la naturaleza del problema permite decidir si un punto que satisface las condiciones necesarias establecidas por el sistema (I) es máximo o mínimo. Por ejemplo, consideremos el siguiente:

<u>Problema</u>. Encontrar el cilindro circular de máximo volumen que puede obtenerse de una esfera de radio $\sqrt{3}$.

<u>Solución</u>. De acuerdo con la figura 7.1, el problema es el siguiente:

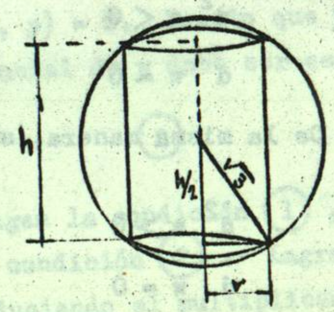
Maximizar : $V = \pi r^2 h$

Sujeta a : $r^2 + h^2/4 = 3$

Para aplicar el método de Lagrange, hagamos: $w = r^2 + h^2/4 - 3 = 0$

Las condiciones necesarias para posibles máximos y mínimos son:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta v}{\delta r} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta r} = 0 \\ \dfrac{\delta v}{\delta h} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta h} = 0 \\ r^2 + \dfrac{h^2}{4} - 3 = 0 \end{cases}$$




F I G. 7.1

Ahora:

$$\frac{\delta v}{\delta r} = 2\pi r h \quad ; \quad \frac{\delta v}{\delta h} = \pi r^2$$

$$\frac{\delta w}{\delta r} = 2r \quad ; \quad \frac{\delta w}{\delta h} = \frac{1}{2} h$$

Sustituyendo:

$$2 \pi r h - 2r \lambda = 0$$

$$\pi r^2 - 1/2 \, h \lambda = 0$$

$$r^2 + \frac{1}{4} h^2 = 3$$

Dividiendo entre 2 r la primera ecuación:

$$\pi h - \lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = \pi h$$

Sustituyendo $\lambda = \pi h$ en la segunda ecuación:

$$\pi r^2 - \frac{1}{2} \pi h^2 = 0$$

$$r^2 - \frac{1}{2} h^2 = 0$$

$$\therefore r^2 = \frac{1}{2} h^2$$



Sustituyendo en la tercera ecuación:

$$\frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{4} h^2 = 3$$

$$\frac{3}{4} h^2 = 3$$

$$h^2 = 4$$

$\therefore h = 2$ (h = -2 no se considera por las condiciones del problema).

Ahora:

$$r^2 = \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{2} (4) = 2$$

$$r = \sqrt{2}$$

Estos valores de r y h son los únicos que pueden corresponder a un máximo V y por la naturaleza del problema, debe haber un cilindro de máximo volumen inscrito en la esfera. Entonces, $r = \sqrt{2}$ y $h = 2$ corresponden al cilindro de máximo volumen:

$$V = \pi r^2 h = \pi (2) (2)$$

$$V = 4 \pi$$

<u>Observación</u>: Este problema ha ilustrado el método de Lagrange para el caso más simple de una función de 2 variables, sujetas a una condición lateral. El problema puede resolverse considerando a r como función de h de la siguiente manera:

Maximizar: $v = \pi r^2 h$

Sujeta a : $r^2 + \frac{1}{2} h^2 = 3$

De la condición lateral:

$$r^2 = 3 - \frac{1}{4} h^2$$

Sustituyendo en la función a maximizar:

$$V = \pi h \left(3 - \frac{1}{4} h^2\right)$$

$$V = 3\,\pi h - \frac{1}{4}\,\pi h^3$$

Entonces, hemos reducido el problema a maximizar una función de una variable $\underline{h}$:

$$\frac{dV}{dh} = 3\pi - \frac{3}{4}\,\pi h^2 = 0$$

$$\frac{3}{4} h^2 = 3$$

$$h^2 = 4$$

$$\underline{\underline{h = 2}}$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{2}\,\pi h$$

Para $h = 2$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{2}\,(2\pi) = -3\pi < 0$$

Entonces, $h = 2$ corresponde a un máximo $V$.

Generalización del método de Lagrange. El problema de determinar los posibles máximos y mínimos de una función de $\underline{n}$ variables, sujetas a $\underline{m}$ condiciones laterales, puede ser resuelto por el método de Lagrange siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior. Consideremos el problema general:

Maximizar: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Sujeta a: $g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$

$g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$

$\vdots$

$g_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$



Solución: Los diferenciales de $\underline{z}$, $g_1$, $g_2$, ...., $g_m$, deben ser cero. Ligando estas condiciones con los multiplicadores de Lagrange:

$$dz - \lambda_1\, dg_1 - \lambda_2\, dg_2 - \ldots\ldots - \lambda_m\, dg_m = 0$$

Sustituyendo los diferenciales en términos de las derivadas parciales y simplificando:

$$\frac{\delta z}{\delta x_1} - \lambda_1 \frac{\delta g_1}{\delta x_1} - \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_1} - \ldots\ldots - \lambda_m \frac{\delta g_m}{\delta x_1} = 0$$

$$\frac{\delta z}{\delta x_2} - \lambda_1 \frac{\delta g_1}{\delta x_2} - \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_2} - \ldots\ldots - \lambda_m \frac{\delta g_m}{\delta x_2} = 0$$

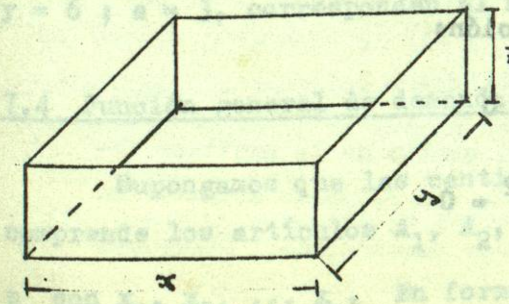
$$\vdots$$

$$\frac{\delta z}{\delta x_n} - \lambda_1 \frac{\delta g_1}{\delta x_n} - \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_n} - \ldots\ldots - \lambda_m \frac{\delta g_m}{\delta x_n} = 0$$

Agregando las $\underline{m}$ condiciones laterales para las variables, se tiene un sistema de $\underline{n + m}$ ecuaciones con $\underline{n + m}$ incógnitas correspondientes a las $\underline{n}$ variables $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ y los $\underline{m}$ multiplicadores $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_m$

Ejemplo: Encontrar las dimensiones de la caja rectangular, sin tapa, de máximo volumen que puede obtenerse de manera que su área sea igual a 108 centímetros cuadrados.

Solución. De acuerdo con la figura, el problema es:




Maximizar: $V = x\,y\,z$

Sujeta a: $xy + 2xz + 2yz = 108$

Fig. 7.2

Hagamos: $w = xy + 2xz + 2yz - 108 = 0$

Las condiciones necesarias para posibles máximos y mínimos son:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta V}{\delta x} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta V}{\delta y} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta y} = 0 \\ \dfrac{\delta V}{\delta z} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta z} = 0 \\ xy + 2xz + 2yz - 108 = 0 \end{cases}$$

Ahora:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = yz \ ; \ \frac{\delta V}{\delta y} = xz \ ; \ \frac{\delta V}{\delta z} = xy$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = y + 2z \ ; \ \frac{\delta w}{\delta y} = x + 2z \ ; \ \frac{\delta w}{\delta z} = 2x + 2y$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} yz - (y + 2z)\lambda = 0 \\ xz - (x + 2z)\lambda = 0 \\ xy - (2x + 2y)\lambda = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 108 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$\lambda = \frac{yz}{y + 2z}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$xz - (x + 2z) \cdot \frac{yz}{y + 2z} = 0$$

$$\cancel{xyz} + 2xz^2 - \cancel{xyz} - 2yz^2 = 0$$



Dividiendo entre $2z^2$ : $(z \neq 0)$

$$x - y = 0$$

$$\therefore x = y$$

Ahora, sustituyendo $\lambda$ en la tercer ecuación:

$$xy - (2x + 2y) \cdot \frac{yz}{y + 2z} = 0 \qquad y \neq -2z$$

$$xy^2 + \cancel{2xyz} - \cancel{2xyz} - 2y^2 z = 0$$

Dividiendo entre $y^2$: $(y \neq 0)$

$$x - 2z = 0$$

$$x = 2z$$

$$\therefore y = 2z$$

Sustituyendo $\underline{x}$ y $\underline{y}$ en la última ecuación:

$$(2z)(2z) + 2(2z)z + 2(2z)z = 108$$

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 108$$

$$12z^2 = 108$$

$$z^2 = 9$$

$$z = 3$$

$$\therefore y = 6$$

$$x = 6$$

Ahora, por la naturaleza del problema, sabemos que debe haber un máximo volumen para el área dada. Entonces, $x = 6$ ; $y = 6$ ; $z = 3$, corresponden al máximo volumen $V = (6)(6)(3) = 108$ cms.$^3$

## 7.4 Función general de demanda.

Supongamos que las cantidades demandadas en un mercado que comprende los artículos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a los precios $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son $x_1, x_2, \ldots x_n$. En forma tabular tenemos:

| Artículos: | $A_i$ | $A_1$ | $A_2$ | $\cdots$ | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Precios : | $P_i$ | $P_1$ | $P_2$ | $\cdots$ | $P_n$ |
| Cant.Dem: | $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |

$$\left.\begin{matrix} x_i \\ P_i \end{matrix}\right\} \text{Variables.} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

Además, supongamos que las cantidades demandadas $\underline{x_i}$ son funciones de los precios $\underline{P_i}$ :

$$x_1 = f_1 (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$x_2 = f_2 (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f_n (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Es decir, cada una de las leyes de demanda para los diferentes artículos, es una función de $\underline{n}$ variables.

Consideremos un artículo cualquiera <u>Ar</u> y analicemos su ley de demanda:

$$X_r = f_r (P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots, P_r, \ldots\ldots P_n)$$

La derivada parcial de $\underline{x_r}$ con respecto a $\underline{P_r}\left(\frac{\delta X_r}{\delta P_r}\right)$ mide la rapidez de cambio de la cantidad demandada del artículo <u>Ar</u> al aumentar su precio $P_r$ dejando los demás precios constantes.

La elasticidad parcial de <u>Xr</u> con respecto a <u>Pr</u> es por definición:

$$E_{P_r} (X_r) = \frac{P_r}{X_r} \frac{\delta X_r}{\delta P_r}$$

Esta elasticidad parcial mide el cambio de la cantidad demandada proporcional al nivel de demanda con respecto al cambio en el precio proporcional al nivel de precio considerado. Obsérvese



que la elasticidad parcial que estamos considerando corresponde a la <u>elasticidad de demanda</u> por el artículo <u>Ar</u> que habíamos definido en la Ley simple de demanda $X_r = f (P_r)$ puesto que al derivar parcialmente con respecto a $\underline{P_r}$, las demás variables permanecen constantes.

<u>7.5 Elasticidades cruzadas.</u> La derivación parcial con respecto a otro precio que no sea el del artículo Ar, nos proporciona lo que se llama <u>elasticidad cruzada</u> de la cantidad demandada por el artículo $\underline{X_r}$ con respecto al precio de otro artículo $P_s$ :

$$E_{P_s} (X_r) = \frac{P_s}{X_r} \frac{\delta X_r}{\delta P_s}$$

Esta elasticidad mide el cambio de la cantidad demandada de Ar, proporcional al nivel de demanda con respecto a un cambio en el precio de As proporcional al nivel de precio considerado.

Las elasticidades cruzadas son de especial importancia en teoría económica porque son la base de la siguiente clasificación de los artículos comprendidos por un mercado:

Artículos que intervienen en un mercado

$$M : A_1, A_2, \ldots, A_n$$

<u>Clasificación:</u>

<u>1. Artículos sustitutos</u> Si: $E_{P_s} (X_r) > 0$ y $E_{P_r} (X_s) > 0$

Entonces los artículos Ar y As son <u>sustitutos</u>, porque las condiciones establecidas indican que el cambio de la cantidad demandada (proporcional) de uno de los artículos con respecto al cambio proporcional del precio del otro es positivo. En otras palabras, la cantidad demandada de uno de los artículos aumenta cuando se aumenta el precio del otro. Entonces el consumidor sustituye un artículo por el otro según los precios establecidos. (Por ejemplo automóviles nuevos y automóviles usados son art. sustit.)