2. Artículos complementarios. Si $E_{p_s}(x_r) < 0$ y $E_{p_r}(x_s) < 0$ (ambos negativas), entonces los artículos Ar y As son complementarios. De nuevo el nombre es justificado porque las condiciones indican que el cambio en la cantidad demandada (proporcional) de uno de los artículos con respecto al cambio en el precio (proporcional) del otro es negativo. Es decir, la cantidad demandada de uno de los artículos disminuye al aumentar el precio del otro. (Por ejemplo, café y azúcar en un mercado normal son complementarios).

3. Artículos independientes. Si $E_{p_s}(x_r) = 0$ y $E_{p_r}(x_s) = 0$, entonces los artículos Ar y As son independientes, La cantidad demandada por uno de los artículos no cambia al aumentar el precio del otro. En éste caso, la cantidad demandada por el artículo Ar no es función del precio del artículo As al nivel considerado y viceversa.

Observación: Las condiciones establecidas pueden simplificarse a las derivadas parciales que son las que determinan el signo de las elasticidades.

Ejemplos:

1. Supongamos que las leyes de demanda por 3 artículos A_1, A_2 y A_3 son las siguientes:

1. $X_1 = 30 - 3P_1 + 2P_2 + 4P_3$

2. $x_2 = 50 + P_1 - 5P_2 - 3P_3$

3. $X_3 = 100 + 2P_1 - 3P_2 - 6P_3$

Encontrar las elasticidades parciales de demanda directas y cruzadas. Además determinar la relación entre los artículos de acuerdo con la clasificación establecida.

a) Elasticidades directas:

Artículo A_1 : $E_{P_1}(X_1) = \frac{P_1}{X_1} \frac{\delta X_1}{\delta P_1}$

De la ecuación 1 : $\frac{\delta X_1}{\delta P_1} = -3$

Sustituyendo:

$E_{P_1}(X_1) = \frac{-3P_1}{x_1}$ (Negativa para cualquier nivel de la cantidad demandada X_1).

Artículo A_2 $E_{P_2}(X_2) = \frac{P_2}{X_2} \frac{\delta X_2}{\delta P_2}$

de la ecuación 2 : $\frac{\delta X_2}{\delta P_2} = -5$

Sustituyendo:

$E_{P_2}(X_2) = 1 \frac{-5P_2}{X_2}$ (negativa para todo nivel de X_2).

Artículo A_3 $E_{P_3}(X_3) = \frac{P_3}{X_3} \frac{\delta X_3}{\delta P_3}$

de la ecuación 3 : $\frac{\delta X_3}{\delta P_3} = -6$

Sustituyendo: $E_{P_3}(X_3) = \frac{-6P_3}{X_3}$ (negativa para todo nivel de X_3)

b) Elasticidades cruzadas

Artículo A_1 $E_{P_2}(X_1) = \frac{P_2}{X_1} \frac{\delta X_1}{\delta P_2}$; $E_{P_3}(X_1) = \frac{P_3}{X_1} \frac{\delta X_1}{\delta P_3}$

de la ecuación 1 :

$\frac{\delta X_1}{\delta P_2} = 2$; $\frac{\delta X_1}{\delta P_3} = 4$

Sustituyendo:

$E_{P_2}(X_1) = \frac{2P_2}{X_1} > 0$; $E_{P_3}(X_1) = \frac{4P_3}{X_1} > 0$.

Artículo A_2 $E_{P_1}(X_2) = \frac{P_1}{X_2} \frac{\delta X_2}{\delta P_1}$; $E_{P_3}(X_2) = \frac{P_3}{X_2} \frac{\delta X_2}{\delta P_3}$

de la ecuación 2 : $\frac{\delta X_2}{\delta P_1} = 1$; $\frac{\delta X_2}{\delta P_3} = -3$

Sustituyendo:

$$E_{P_1}(X_2) = \frac{P_1}{X_2} > 0 \quad ; \quad E_{P_3}(X_2) = \frac{-3P_3}{x_2} < 0$$

<u>Artículo A_3</u> $\quad E_{P_1}(X_3) = \frac{P_1}{X_3}\frac{\delta X_3}{\delta P_1} \; ; \; E_{P_2}(X_3) = \frac{P_2}{X_3} \cdot \frac{\delta X_3}{\delta P_2}$

De la ecuación 3 : $\frac{\delta X_3}{\delta P_1} = 2 \; ; \; \frac{\delta X_3}{\delta P_2} = -3$

Sustituyendo:

$$E_{P_1}(X_3) = \frac{2P_1}{x_3} > 0 \quad ; \quad E_{P_2}(X_3) = -\frac{3P_2}{X_3} < 0$$

c) Relación entre los artículos:

Los artículos A_1 y A_2 son <u>sustitutos</u> porque $E_{P_2}(X_1) > 0$ y $E_{P_1}(X_2) > 0$, es decir, la cantidad demandada de uno de ellos aumenta al aumentar el precio del otro.

Los artículos A_1 y A_3 son también <u>sustitutos</u> porque $E_{P_1}(X_3) > 0$ y $E_{P_3}(X_1) > 0$.

Los artículos A_2 y A_3 son complementarios por $E_{P_2}(X_3) < 0$ y $E_{P_3}(X_2) < 0$, es decir, la cantidad demandada de uno de ellos disminuye al aumentar el precio del otro.

<u>7.6 La función de producción.</u>

Una de las aplicaciones importantes de las matemáticas a teoría económica es el análisis de la <u>función de producción</u>. Esta función relaciona los factores productivos proporcionando una expresión matemática para obtener la cantidad producida, de acuerdo con las cantidades de los factores productivos que sean empleados en la producción. La función de producción es una herramienta notablemente útil en el análisis económico de una empresa, de una industria ó del ingreso nacional de un país.

En términos matemáticos, el problema es el siguiente, La cantidad producida (de un artículo en una empresa, por ejemplo) depende de las cantidades de los factores variables empleados, sean:

z = Cantidad producida del artículo

x_i = Cantidad del factor variable x_i empleado en la producción, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Entonces la función de producción es una expresión de la forma:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Se supone que las variables x_i son continuamente divisibles y z es una función contínua en su dominio.

<u>Condiciones "normales" de la función de producción.</u>

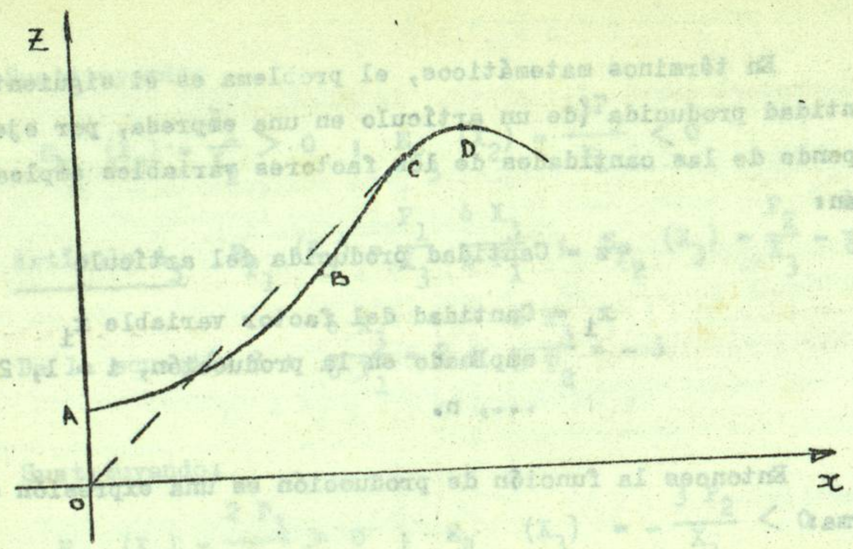
Para decidir que tipo de función ha de ajustarse a la producción, es necesario establecer características propias de la función de producción que son resultado de observaciones empíricas y deducciones lógicas:

Consideremos primeramente un sólo factor productivo variable. En éste caso la función de producción tiene la forma:

$z = f(x)$ $\quad$ z = Cantidad producida.

x = Cantidad del factor productivo variable empleado en la producción.

La forma "normal" de la gráfica de la función es la siguiente : (figura 7.3) .



F i g. 7.3

El punto A corresponde al nivel de producción cuando no se utiliza el factor productivo variable $(x = 0)$. Cuando el factor productivo variable es esencial en la producción, A coincide con el origen de coordenadas O.

El punto B es un punto de inflexión donde cambia el sentido de concavidad de la curva, de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.

$\frac{d^2 z}{d x^2} = 0$. A partir de este punto empieza a operar la Ley de rendimientos marginales decrecientes, es decir, $\frac{d^2 z}{d x^2}$ es negativa lo cual indica que el producto marginal de x, $\left(\frac{d z}{d x}\right)$, está disminuyendo de B hacia la derecha.

El punto C corresponde al máximo producto medio. Este es un punto de particular importancia porque a partir de C a la derecha empieza a operar la Ley de rendimientos medios decrecientes aún cuando la producción sigue aumentando al aumentar el factor productivo variable. La zona económicamente importante empieza entonces, a partir del punto C.

El punto D es el máximo nivel de producción que puede obtenerse, a partir del cual la producción empieza a disminuir al aumentar el factor productivo variable x.

Ejemplo. Supongamos que en una determinada zona agrícola se cultiva maíz y se analiza la producción variando únicamente la cantidad de horas hombre empleadas. Entonces se tiene:

Tierra, equipo, etc.: Constantes.

Cientos de hrs.- hombre por año = x

no. de toneladas de maíz por año = z

$$z = f(x)$$

Consideremos ahora 2 factores productivos variables. Entonces la función de producción toma la forma:

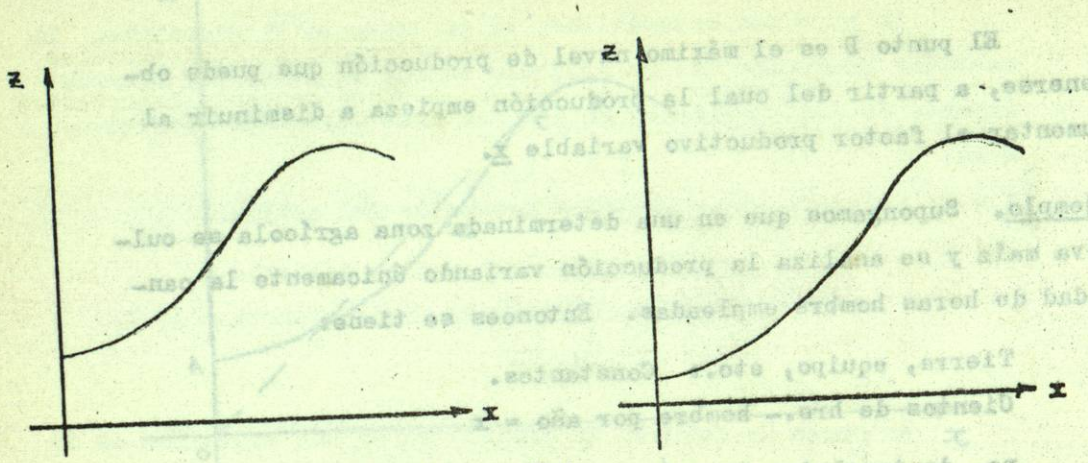
$$z = f(x, y)$$

z = Cantidad producida

(x,y)= Cantidades de los factores productivos variables.

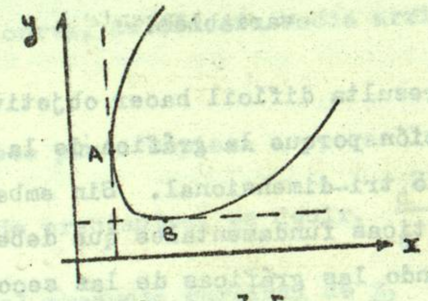
En este caso resulta difícil hacer objetivas las condiciones "normales" de la función porque la gráfica de la misma es una superficie en el espacio tri-dimensional. Sin embargo podemos establecer las características fundamentales que debe poseer la función de producción analizando las gráficas de las secciones a la superficie, paralelas a los planos principales:

a) Secciones verticales. Cortes paralelos al plano z - x y al plano z - y. Estas secciones corresponden a mantener uno de los factores productivos fijo (constante) y su gráfica es por lo tanto de las mismas características que la de la función de producción con un sólo factor variable. (figura 7.4).



F i G. 7.4

b) Secciones horizontales. Cortes paralelos al plano x - y. Esta sección corresponde a considerar la cantidad producida z como constante. Entonces los puntos de la gráfica de una sección de este tipo corresponden a las diferentes combinaciones de los factores productivos que se requieren para un nivel constante de la cantidad producida z = c. La forma " normal " de la gráfica de esta sección horizontal llamada también curva de nivel C es la siguiente:



F i G. 7.5

La parte AB de la curva es la económicamente importante. El punto A es un punto en que la tangente es vertical. A partir de éste punto al aumentar la cantidad del factor productivo x, disminuye la cantidad del factor productivo y. El punto B es un punto de tangente horizontal. A la derecha de B al aumentar x aumenta y también lo cual es lógicamente inconveniente desde el punto de vista económico. Exactamente lo mismo sucede hacia arriba del punto A, es decir al aumentar y aumenta también x para mantener el nivel de producción constante.

En términos matemáticos, las características fundamentales de la función de producción en las zonas económicamente importantes son las siguientes:

a) Sección Vertical : y = Constante

1. Creciente de C a D. $\frac{dz}{dx} > 0$

2. Punto máximo en D. $\frac{dz}{dx}$ 0

3. Decreciente a la derecha de D:

$$\frac{dz}{dx} < 0$$

4. Cóncava hacia abajo $\frac{d^2 z}{d x^2}$ 0

b) Sección horizontal : z = Constante

1. Decreciente de A a B $\frac{dy}{dx} < 0$

2. Punto crítico de tangente vertical en A : $\frac{dy}{dx} = \infty$

3. Mínimo en B $\frac{dy}{dx} = 0$

4. Cóncava hacia arriba: $\frac{d^2 y}{d x^2} > 0$

Ejemplo: Una función de producción de tipo "normal" que ha sido utilizada en muchos casos con resultados más o menos satisfactorios es la de Cobb-Douglas:

$$z = a x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

z = Cantidad producida

x, y = Factores productivos variables.

a, α = Constantes. $0 < \alpha < 1$

Verifiquemos las condiciones "normales" para $\alpha = 2/3$ y $a = 60$.

1. Sección vertical (x = constante) sea $x = 64$

$$z = 60\,(x)^{2/3}\,y^{1/3} = 60\,(64)^{2/3}\,(y)^{1/3} = 960\,(y)^{1/3}$$

$$z = 960\,(y)^{1/3}$$

y	z
0	0
1	960
8	1920
27	2880

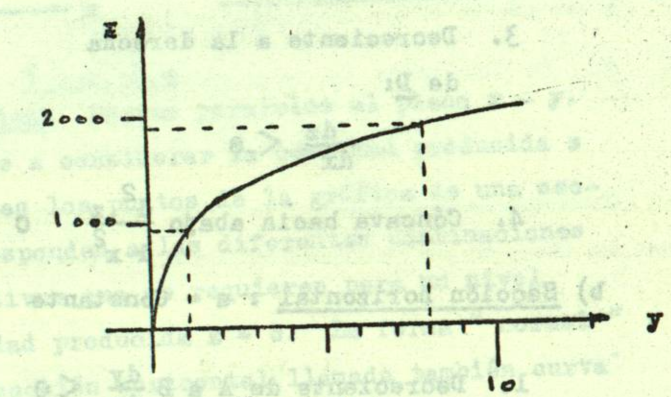


FIG. 7.6

La curva satisface las condiciones "normales" en la zona económicamente importante. Es decir, es creciente ($\frac{dz}{dy} > 0$) y cóncava hacia abajo $\frac{d^2 z}{d y^2} < 0$. (figura 7.6).

2. Sección horizontal (z = constante) sea

$$z = 1{,}200$$

$$1{,}200 = 60x^{2/3}\,y^{1/3}$$

$$x^{2/3}\,y^{1/3} = 20$$

y es una función implícita de x. Utilizando derivados parciales para encontrar $\frac{dy}{dx}$: Si $w = x^{2/3}\,y^{1/3} - 20$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta w}{\delta x}}{\frac{\delta w}{\delta y}} = -\frac{\frac{2}{3}\,(x)^{-1/3}\,(y)^{1/3}}{\frac{1}{3}\,x^{2/3}\,y^{-2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,y}{x} < 0 \quad \text{para } x,\ y \text{ positivos}$$

Entonces, la curva es decreciente hacia la derecha.

Ahora:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{-2x\,\frac{dy}{dx} + 2y}{x^2} = \frac{(-2x)\left(\frac{-2y}{x}\right) + 2y}{x^2}$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{6y}{x^2} > 0 \quad \text{para todo } x,\ y \text{ positivos.}$$

Entonces la curva es cóncava hacia arriba. Es decir se satisfacen las condiciones "normales" de la función de producción en la zona económicamente importante.

7.7 Sustituibilidad de los factores de producción

Para una función de producción en la que intervienen 2 factores productivos variables, una curva de nivel de producción constante corresponde a una relación entre los factores productivos variables de la forma:

$$f\,(x,\ y) = c$$

La tasa marginal de sustitución es un indicador de la cantidad que debe aumentarse del factor y al disminuir x para mantener el nivel de producción c.

Def. Tasa marginal de sustitución de y por x = $r = -\frac{dy}{dx}$

Considerando a y como una función implícita de x en $f\,(x,\ y) = c$ y aplicando derivados parciales:

Sea $z = f\,(x,\ y) = c$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{\delta\,z}{\delta\,x}}{\frac{\delta\,z}{\delta\,y}}$$

Ahora: $\frac{\delta\,z}{\delta\,x} = f_x$ = Producto marginal de x.

$\frac{\delta\,z}{\delta\,y} = f_y$ = Producto marginal de y.

$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{f\,x}{f\,y}$ (pendiente de la tangente a la curva $f\,(x,\ y) = c$).