Entonces la tasa marginal de sustitución resulta: $r = \frac{-fx}{fy}$.

En el caso "normal" y en la zona económicamente importante, la curva f (x, y) = c es decreciente, es decir $\frac{dy}{dx} < 0$. Entonces $r > 0$.

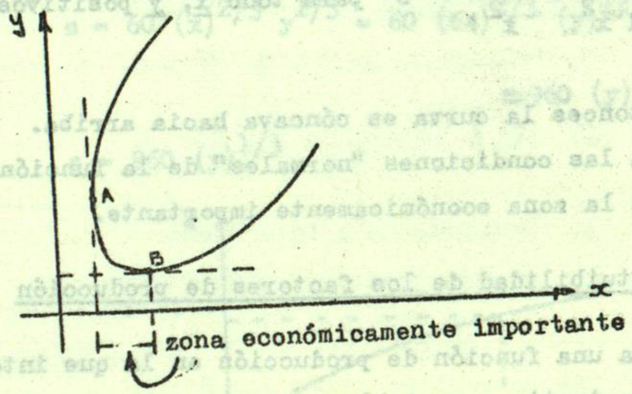

Fig. 7.7

Ahora, la curva es cóncava hacia arriba, $\frac{d^2 y}{d x^2} > 0$, es decir, $\frac{dy}{dx}$ es creciente hacia la derecha y por lo tanto r es decreciente, es decir, cuando nos movemos hacia la derecha, cada vez hay que disminuir menos la cantidad de y para incrementos iguales de x.

Para propósitos de análisis de la sustituibilidad de los factores productivos, la tasa marginal de sustitución es un indicador conveniente. Definiremos ahora la elasticidad de sustitución de la siguiente manera:

Def. La elasticidad de sustitución de y por x es la elasticidad de $\frac{y}{x}$ con respecto a r. Es decir:

$$\sigma = \frac{r}{y/x} \frac{d(y/x)}{dr} = \frac{d \ln (y/x)}{d \ln r}$$

De acuerdo con esta definición abstracta, la elasticidad de sustitución mide el cambio en la proporción de los factores productivos (y/x) proporcional al nivel de dicha proporción, con respecto a un cambio en la tasa marginal de sustitución (r) proporcional al nivel correspondiente de r, para mantener el nivel

dado de producción C. En otras palabras, la elasticidad de sustitución es un indicador del cambio en la proporción de los factores productivos correspondientes a un aumento en la tasa marginal de sustitución.

Para calcular el valor numérico de la elasticidad de sustitución dada una pareja de valores para los factores productivos x y y es conveniente transformar la fórmula establecida por la definición para obtener σ como una función de x y y y derivadas parciales de z = f (x, y). Sustituyendo los diferenciales de (y/x) y de r primero y después r y sus derivadas parciales, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{fxfy\ (xf_x + y\ fy)}{xy\ (-\ fxx\ fy^2 + 2fxy\ fx\ fy - fyy\ fx^2)}$$

Este resultado indica que la elasticidad de sustitución es una función simétrica de x y y porque si se cambia x por y, la expresión para σ no se altera. Entonces se puede hablar simplemente de la elasticidad de sustitución entre b y a porque la elasticidad de sustitución de b por a es la misma que la elasticidad de sustitución de a por b.

La segunda derivada de y con respecto a x mide la curvatura de la curva z = constante. Ahora, calculando la expresión para $\frac{d^2 y}{d x^2}$, se encuentra que σ es un múltiplo positivo de $\frac{1}{d^2 y/dx^2}$

Entonces, si la curva es una recta, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ y por lo tanto $\sigma = \infty$; en este caso, se dice que x y y son perfectos sustitutos. Cuando $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty$, entonces $\sigma = 0$ y se dice que x y y son incapaces de sustitución.

Observaciones:

1. Si $z = f(x, y)$ es una función lineal homogénea, entonces aplicando las propiedades de las funciones lineales homogéneas, la elasticidad de sustitución se reduce a:

$$\sigma = \frac{f_x f_y}{z\, f_{xy}}$$

2. Si $z = f(x, y)$ es una función de producción homogénea de grado $\underline{m}$, entonces la tasa marginal de sustitución es una función homogénea de grado cero.

Dem. Si $z = f(x, y)$ es homogénea de grado $\underline{m}$, entonces f_x y f_y son homogénea se grado $\underline{m-1}$ por la propiedad 2 de las funciones homogéneas. Es decir: $f_x = g(x, y)$ y $f_y = h(x, y)$ son tales que:

$$g(cx, cy) = c^{m-1}\, g(x, y)$$

$$h(cx, cy) = c^{m-1}\, h(x, y)$$

Ahora, $r = \dfrac{f_x}{f_y} = \dfrac{g(x, y)}{h(x, y)} = F(x, y)$

Entonces: $F(cx, cy) = \dfrac{g(cx, cy)}{h(cx, cy)} = \dfrac{c^{m-1}\, g(x, y)}{c^{m-1}\, h(x, y)}$

$$= \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = F(x, y)$$

Es decir, la tasa marginal de sustitución es homogénea de grado cero.

L.C.D.D.

7.8 Demanda por factores de producción. Consideremos la función de producción $z = f(x_1, x_2)$, donde x_i = cantidad del factor productivo x_i para producir z unidades del artículo A. Supongamos que se desea obtener un determinado nivel de producción z_o de

manera que el costo sea mínimo. El costo de la producción z_o es:

$C = x_1 P_1 + x_2 P_2$, donde P_i = Precio del factor productivo x_i.

Consideremos que P_1 y P_2 varían al variar el nivel de producción, pero permanecen constantes para un nivel de producción determinado z_o. Entonces, el problema es determinar las cantidades de los factores productivos x_1 y x_2 para producir una cantidad z_o al mínimo costo posible C. Es decir:

Minimizar: $C = x_1 P_1 + x_2 P_2$

Sujeta a : $z_o = f(x_1, x_2)$

Hagamos $w = f(x_1, x_2) - z_o$. Entonces las condiciones necesarias para minimizar el costo C son:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta c}{\delta x_1} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\delta c}{\delta x_2} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta x_2} = 0 \\[2ex] f(x_1, x_2) - z_o = 0 \end{cases}$$

Ahora:

$$\frac{\delta c}{\delta x_1} = P_1\,; \quad \frac{\delta c}{\delta x_2} = P_2$$

$$\frac{\delta w}{\delta x_1} = f_{x_1}; \quad \frac{\delta w}{\delta x_2} = f_{x_2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} P_1 - \lambda f_{x_1} = 0 \\ P_2 - \lambda f_{x_2} = 0 \\ f(x_1, x_2) - z_o = 0 \end{cases}$$

Despejando $\underline{\lambda}$ en las 2 primeras ecuaciones e igualando los resultados se obtiene:

$$\lambda = \frac{P_1}{f_{x_1}} \ ; \ \lambda = \frac{P_2}{f_{x_2}}$$

$$\therefore \ \frac{P_1}{f_{x_1}} = \frac{P_2}{f_{x_2}}$$

Invirtiendo ambos lados de la ecuación:

$$\frac{f_{x_1}}{P_1} = \frac{f_{x_2}}{P_2}$$

Este resultado establece que una condición necesaria para minimizar el costo es que los productos marginales sean proporcionales a los precios correspondientes de los factores productivos.

Ahora, definiendo: $\frac{f_{x_i}}{P_i}$ = productividad marginal del factor productivo x_i, se obtiene la <u>ley de productividad marginales iguales</u> para la minimización del costo de producción.

<u>Ejercicio 24.</u>

<u>Tema</u>: <u>Máximos y mínimos en funciones de varias variables.</u>

1. Encontrar los máxxmos y mínimos de las siguientes funciones:

1.1 $z = x^2 + 2x + y^2$

1.2 $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$

1.3 $z = 2x^2 + 4x - y^2 - 6y + 4xy + 46$

2. Un monopolista produce 2 artículos A_1 y A_2. Sean:

P_1 = precio del artículo A_1

P_2 = precio del artículo A_2

x_1 = cantidad producida de A_1

x_2 = cantidad producida de A_2

C = Costo total de producción

Supongamos que los artículos están relacionados por las siguientes funciones de demanda:

$$x_1 = 200 - 4P_1 - 2P_2$$

$$x_2 = 300 - 2P_1 - 5P_2$$

Supongamos además que los costos medios de producción son constantes de manera que la función del costo total es de la simple forma:

$$C = 4x_1 + 3x_2$$

Determinar las condiciones óptimas para el monopolista, (precios de monopolio y cantidades que debe producir para obtener el máximo ingreso neto).

3. Encontrar los posibles máximos y mínimos de las siguientes funciones de varias variables sujetas a las condiciones laterales indicadas:

3.1 $z = x^2 - xy + 3y$, $\quad 2x + y = 6$

3.2 $z = x^3 - y^3 + 2xy - 8$, $\quad y - x = 1$

3.3 $u = x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$, $\quad 4x + y + 4z = 39$

3.4 $z = e^{x^2 + y^2}$, $\quad x - y + 2 = 0$

4. Un fabricante desea producir cajas metálicas con tapa cuadrada y con una capacidad de 50 litros. Determinar las dimensiones de la caja que proporcionan mínimo costo si el material empleado cuesta un peso por decímetro cuadrado. (Un litro es igual a un decímetro cúbico).

<u>Ejercicio 25.</u>

Tema: Elasticidades parciales, elasticidades directas y cruzadas.

1. Encontrar las elasticidades parciales de <u>u</u> con respecto a <u>x</u> y <u>y</u> en las siguientes funciones:

1.1 $u = 10x^3 y^2$

1.2 $u = e^{2x + 3y}$

1.3 $u = \ln (x^2 - xy + y^2)$

2. Supongamos que las funciones de demanda para 4 artículos A_1, A_2, A_3, A_4, de un mercado son las siguientes:

$$x_1 = 30 - 2P_1 + 3P_2 + 5P_3 - 4P_4$$

$$x_2 = 60 + 2P_1 - 4P_2 - 3P_3 + 2P_4$$

$$x_3 = 100 + 3P_1 - 2P_2 - 5P_3 + 3P_4$$

$$x_4 = 150 - 8P_1 + 3P_2 + 5P_3 - 6P_4$$

x_i = Cantidad demandada por el artículo A_i

P_i = Precio del artículo A_i

x_i y P_i variables $i = 1, 2, 3, 4.$

Encontrar las elasticidades parciales de demanda directas y cruzadas. Además determinar la relación entre los artículos de acuerdo con la clasificación establecida. (Sustitutos, complementarios o independientes).

3. Supongamos que las funciones de demanda para 2 artículos A_1 y A_2 son las siguientes:

$$x_1 = 30\, P_1^{-2}\, P_2^{3}$$

$$x_2 = 50\, P_1^{2}\, P_2^{-1}$$

x_i y P_i representan lo mismo que en el problema 1. Encontrar las elasticidades parciales directas y cruzadas por derivación logarítmica y determinar si los artículos son sustitutos o complementarios.

<u>Ejercicio 26.</u>

<u>Tema:</u> <u>Funciones de producción. Aplicación de derivadas parciales.</u>

1. La producción de trigo en una zona agrícola es dada por la siguiente ley:

$$z = 19.4\, xy - 4x^2 - 3y^2$$

z = No. de bultos de trigo (de 35 decímetros cúbicos).

x = Cientos de horas-hombre

y = No. de hectáreas

Para $y = 20$, encontrar el producto medio y el producto marginal con respecto a <u>x</u> y graficarlos sobre un mismo sistema de coordenadas. (eje horizontal para la variable <u>x</u>)

Verificar que el producto medio es máximo cuando es igual al producto marginal.

* 2. Hacer lo mismo que en el ejercicio 1, para la siguiente función de producción lineal homogénea para $y = 100$.

$$z = \frac{40}{x + y}\,(12\, xy - 5x^2 - 4y^2)$$

3. La función de producción para un artículo es la siguiente:

$$z = A\, x^{\alpha}\, y^{1-\alpha}$$

z = No. de unidades producidas.

x = No. de unidades del primer factor productivo variable

y = No. de unidades del segundo factor productivo variable

a) Encontrar las constantes <u>A</u> y <u>α</u> si:

$z = 1500$ para $x = 10{,}000$; $y = 100$

$z = 2120$ para $x = 20{,}000$; $y = 100$

b) Graficar el producto total <u>z</u> para $y = 100$

c) Encontrar el producto medio y marginal con respecto a x para $y = 100$ y graficarlos.

d) Verificar que el producto total z es igual a x por el producto marginal con respecto a x mas y por el producto marginal con respecto a y (Teorema de Euler).

4. Para la siguiente función de producción de Cobb-Douglas (lineal y homogénea):

$$z = 100\, x^{1/3}\, y^{2/3}$$

a) Demostrar que el producto total es igual a x por el producto marginal con respecto a x mas y por el producto marginal con respecto a y (Teorema de Euler para la función lineal homogénea).

b) Demostrar que las secciones horizontales de la superficie correspondiente a la gráfica de la función son decrecientes y cóncavas hacia arriba.

Verificar ésto para $z = 1000$ (constante).

5. Supongamos que la función de producción por un cierto artículo A es la siguiente:

$$z = 100\, \sqrt{xy}$$

x = cantidad del factor productivo x empleada

y = cantidad del factor productivo y empleada

z = cantidad producida del artículo A

Si para el nivel de producción $z = 1000$, los precios de los factores productivos son:

$P_x = 1$ (precio del factor x)

$P_y = 4$ (precio del factor y)

a) Determinar las cantidades de los factores productivos x y y que deberán emplearse para minimizar el costo.

b) Comprobar que la función de producción es lineal homogénea y verificar que cuando el costo es mínimo, el costo marginal es igual al costo medio de los factores productivos.

Ejercicio 27.

Temas: Tasa marginal de sustitución y Elasticidad de sustitución.

1. Comprobar que las siguientes funciones de producción son lineales homogéneas. Calcular la tasa marginal de sustitución y verificar que es una función homogénea de grado cero.

1.1 $z = \sqrt{6xy - 3x^2 - 5y^2}$

1.2 $z = \dfrac{100xy - 10x^2 - 4y^2}{3x + 2y}$

2. Determinar el grado de homogeneidad de las siguientes funciones. Calcular la tasa marginal de sustitución y comprobar que es una función homogénea de grado cero.

2.1 $z = 40\,xy - 6x^2 - 5y^2$

2.2 $z = 100\, x^{1/3}\, y^{2/3}$

2.3 $z = 5x^2\, y^3$

3. Encontrar la tasa marginal de sustitución y la elasticidad de sustitución para las siguientes funciones de producción lineales homogéneas:

3.1 $z = \sqrt{10\,xy - x^2 - y^2}$

3.2 $z = 100\, x^{1/3}\, y^{2/3}$

3.3 $z = 500\, x^{4/5}\, y^{1/5}$

* 3.4 $z = \dfrac{20xy - 5x^2 - 2y^2}{x + y}$

4. Si la función de utilidad para dos bienes es $u = \ln (x + 10)^2 (y + 15)^3$. Encontrar la tasa marginal de sustitución y la elasticidad de sustitución entre los bienes x y y para $x = 10$; $y = 15$.

5. Demostrar que para una función de producción de la forma: $z = A\, x^{\alpha} y^{\beta}$, la elasticidad de sustitución es igual a uno para cualquier valores de x y y.