CAPITULO 8

CALCULO INTEGRAL.

8.1 Integración de funciones de una variable. Hemos definido el diferencial de una función de una variable de la siguiente manera:

$$\text{Si } y = f(x) :$$
$$dy = f'(x)\,dx$$

El cálculo integral trata con el estudio de reglas y métodos para obtener una función determinada f (x) cuando conocemos su expresión diferencial f'(x) dx. Es decir, integrar es el proceso inverso de diferenciar. De acuerdo con la definición del diferencial de una función de una variable, el problema de integrar una expresión diferencial puede considerarse como la determinación de la anti-derivada de la función que está multiplicada por d x en la expresión diferencial.

A la función obtenida al integrar una expresión diferencial se le llama una integral de la expresión diferencial y al proceso seguido para obtener una integral se le llama integración. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\int f'(x)\,dx = F(x)$$

Se lee: Integral de f' (x) dx igual a F (x).

Consideremos los siguientes ejemplos:

1. $\int 2x\,dx = x^2$ porque $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
2. $\int e^x\,dx = e^x$ porque $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
3. $\int 2x\,dx = x^2 + 15$ porque $\frac{d}{dx}(x^2 + 15) = 2x$

La integral de una expresión diferencial no es única. Comparando los ejemplos 1 y 3 se deduce que la integral de la misma expresión diferencial puede ser igual a funciones que difieran por una constante porque la derivada de una constante es cero. Esto da lugar al siguiente:

Teorema. Si dos funciones difieren por una constante, entonces tienen la misma expresión diferencial.

Demostración: Sean:

$$F(x) = f(x) + c$$
$$G(x) = f(x) + d \qquad c \neq d.$$

Entonces:

$$d\,F(x) = F'(x)\,dx = f'(x)\,dx$$
$$d\,G(x) = G'(x)\,dx = f'(x)\,dx$$

Porque la derivada de una constante es cero

$$\therefore\ d\,F(x) = d\,G(x)$$

L.C.D.D.

De acuerdo con este teorema, la integral de una expresión diferencial debe ser igual a la función que se obtiene al aplicar el proceso inverso de diferenciación más una constante que por ahora consideraremos como indefinida y por lo tanto a la integral la llamaremos integral indefinida.

Definición. La integral indefinida de una expresión diferencial f' (x) dx es igual a f (x) + c. En símbolos: $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$.

Entonces, la integral indefinida es una familia de funciones que difieren por una constante. Gráficamente, la integral indefinida es una familia de curvas paralelas que se obtienen dando diferentes valores a la constante c. Las curvas son paralelas porque para cualquier valor de x en el dominio de las funciones que constituyen la familia, la derivada es la misma y por lo tanto, las curvas tienen la misma pendiente.

Ejemplo. Graficar la familia de curvas correspondientes a la siguiente integral:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

Hagamos $y = x^2 + c$ para tabular y graficar:

	x	0	1	2	-1	-2
y	Para c = 0	0	1	4	1	4
	Para c = 2	2	3	6	3	6
	Para c = 4	4	5	8	5	8
	Para c = -2	-2	-1	2	-1	2

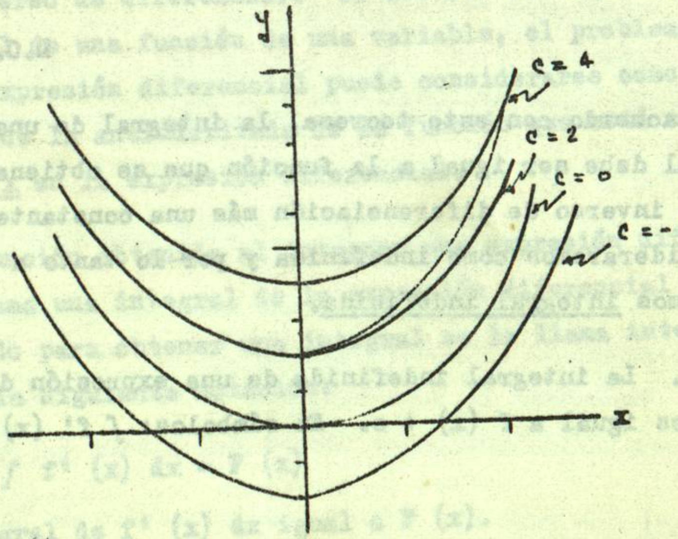

Fig. 8.1

Más adelante se discutirá la posibilidad de determinar la constante de integración al considerar las aplicaciones de la integral indefinida.

8.2 Reglas de integración. De acuerdo con la definición de integral, podemos deducir reglas de integración directa, de las correspondientes reglas de derivación:

Regla 1. La integral de una suma de expresiones diferenciales es igual a la suma de las integrales de las expresiones diferenciales.

$$\int (f'(x) + g'(x))\,dx = \int f'(x)\,dx + \int g'(x)\,dx$$
$$= f(x) + g(x) + c$$

Regla 2. La integral de una constante por una expresión diferencial es igual a la constante por la integral de la expresión diferencial.

$$\int a f'(x)\,dx = a \int f'(x)\,dx = af(x) + c$$

Regla 3. La integral de d x es x + c

$$\int dx = x + c$$

Regla 4. La integral de una potencia de una función por el diferencial de la función es igual a uno sobre el exponente más uno multiplicado por la función elevada al exponente más uno, más la constante de integración, excepto cuando el exponente es menos uno:

$$\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1} + c;\ n \neq -1$$

Corolario. En particular cuando $f(x) = x$:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c\ ;\ n \neq -1$$

<u>Regla 5</u>. La integral de $\left[f(x)\right]^{-1} f'(x)\,dx$ es igual al logaritmo natural de f (x), más la constante de integración.

$$\int \left[f(x)\right]^{-1} f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

Con la ayuda de estas reglas, podemos integrar algunas expresiones algebraicas. Consideremos los siguientes ejemplos:

a) $\int x^6\,dx = \frac{1}{7}x^7 + c$ (por el corolario de la regla 4).

b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{3/2}\, x^{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

(por el corolario de la regla 4)

c) $\int 3x^5\,dx = 3\int x^5\,dx = \frac{3}{6}x^6 + c = \frac{1}{2}x^6 + c$

(por la regla 2 y el corolario de la regla 4)

d) $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$

(por aplicación sucesiva de las reglas, 1, 2 y 4 y simplificando).

e) $\int (1 - x^{1/2})^3\,dx = \int (1 - 3x^{1/2} + 3x - x^{3/2})\,dx$

$$= x - 2x^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2} + c$$

(desarrollando y procediendo después como en el ejemplo 4)

f) $\int (2 + x^2)^{1/2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int (2 + x^2)^{1/2}\,2x\,dx$

$$= \frac{1}{2} / \frac{3}{2}\,(2 + x^2)^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2} + c$$

(Aplicando reglas 2 y 4)

g) $\int \frac{x^3\,dx}{x+1} = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x + 1) + c$$

(dividiendo primero y aplicando después reglas 4 y 5).

<u>Integración de funciones exponenciales</u>. De las reglas de derivación de funciones exponenciales, se deducen las siguientes reglas de integración. Sean $u = f(x)$; a = constante:

<u>Regla 6</u>. $\int a^u\,du = \int a^{f(x)} f'(x)\,dx$

$$= \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

<u>Regla 7</u>. $\int e^u\,du = \int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

<u>Ejemplos</u>:

a) $\int 3^{x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{3^{x^2}}{\ln 3} + c$

(por las reglas 2 y 6).

b) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,3dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

(por las reglas 2 y 7)

Las reglas <u>1</u> a <u>7</u> pueden ser demostradas directamente de la definición de integral y de las correspondientes reglas de derivación. Las siguientes 5 reglas se obtienen por medio de artificios matemáticos como cambio de variables y sustitución trigonométrica que no serán discutidos.

Sean: a= constante: $u = f(x)$

<u>Regla 8</u>. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + c$

<u>Regla 9</u>. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + c \qquad u^2 < a^2$

<u>Regla 10</u>. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$

<u>Regla 11</u>. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)\right| + c;\ u^2 > a^2$

Regla 12. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} \ln \left|\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right)\right| + c$

Ejemplos.

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ Aplicando la regla 8

con $u = x$; $a = 1$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Aplicando la regla 10

con $u = x$; $a = 1$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + c$$

Nota. Estas fórmulas de integración y muchas otras pueden encontrarse en los libros de tablas matemáticas bajo el título de Tablas de integrales.

Métodos de integración. Hemos deducido, de la definición de integral y de las reglas de derivación, una serie de fórmulas de integración para encontrar la integral de una expresión diferencial directamente o mediante una transformación, de acuerdo con las propiedades del integral, que permite aplicar una de las fórmulas establecidas.

Consideremos ahora algunos métodos especiales de integración que son de gran importancia en Cálculo Integral.

8.3 Integración por partes. Es un método de integración en el que se considera a la expresión diferencial que se va a

integrar, como un producto de una función de la variable independiente por el diferencial de otra función de la variable independiente.

En símbolos, si el problema es $\int f(x)\, dx$, entonces se supone:

$$f(x)\, dx = u\, d\, v.$$

donde u y v son funciones de x.

Ahora, el diferencial del producto $u\, v$ es el siguiente:

$$d(u\, v) = \left[\frac{d}{dx}(u\, v)\right] dx \quad \text{(por definición)}$$

$$d(u\, v) = \left(u \frac{d\, v}{d\, x} + v \frac{d\, u}{d\, x}\right) dx$$

$$d(u\, v) = u\, d\, v + v\, d\, u$$

Despejando $u\, d\, v$:

$$u\, d\, v = d(u\, v) - v\, d\, u$$

Integrando: $\int u\, d\, v = u\, v - \int v\, d\, u$

o sea : $\int f(x)\, d\, x = u\, v - \int v\, d\, u$

Esto nos proporciona una ecuación conocida como fórmula de integración por partes. La ventaja de este método es que la integración, utilizando el lado derecho depende de las integrales de $d\, v$ para encontrar v y de $\int v\, d\, u$ para el último término. Estas integrales resultan muy sencillas en muchos casos en los que $\int f(x)\, d\, x = \int u\, d\, v$ es difícil o imposible de obtener directamente.

Ejemplos:

1. Encontrar $\int 2x\, e^x\, d\, x$

consideremos: $u = 2x$ $d\, v = e^x\, d\, x$

$$\therefore du = 2d\, x \quad v = e^x$$

$$\therefore \int 2x\, e^x\, d\, x = 2x\, e^x - \int 2\, e^x\, d\, x$$