$$= 2x\, e^{x} - 2\, e^{x} + c$$

2. $\int x\,(1 + x)^{14}\, d\,x$

Sea: $u = x \quad d\,v = (1 + x)^{14}\, d\,x$

$\therefore\ d\,u = d\,x \quad v = \frac{1}{15}\,(1 + x)^{15}$

$$\therefore \int x\,(1 + x)^{14}\, dx = \frac{x}{15}\,(1 + x)^{15} - \int \frac{1}{15}\,(1 + x)^{15}\, d\,x$$

$$\therefore \int x\,(1 + x)^{14}\, d\,x = \frac{x}{15}\,(1 + x)^{15} - \frac{1}{240}\,(1 + x)^{16} + c$$

De éstos ejemplos se deducen inmediatamente las siguientes reglas prácticas para la integración por partes:

1. $\underline{d\,v}$ debe ser fácilmente integrable, pero si hay varias posibilidades para escoger $\underline{d\,v}$ debe escogerse la expresión más complicada, siempre que sea integrable directa.

2. La integración por partes no siempre es un método conveniente. En general $\int v\, d\,u$ puede ser complicado y no debe seguirse adelante cuando éste integral sea más complicado que el integral del problema original.

3. La integración por partes es especialmente útil para integrar expresiones diferenciales que contienen productos incluyendo funciones logarítmicas y exponenciales.

8.4. Integración por fracciones parciales.

Es un método para la integración de fracciones algebraicas racionales, es decir, fracciones en las que numerador y denominador son polinomios racionales, $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Consiste en separar la fracción en parte entera (cuando el numerador es de grado mayor que el grado del denominador) y una suma de fracciones con denominadores lineales o cuadráticos. E l problema de separar una fracción en una suma de fracciones es el proceso inverso de sumar fracciones, es decir, se trata de

encontrar las llamadas fracciones parciales, tales que al reducirlas a una sola fracción, el resultado sea la fracción original.

Recordemos los principios algebraicos fundamentales para la descomposición de una fracción en fracciones parciales.

1. Cualquier polinomio con coeficientes reales puede ser expresado (por lo menos teóricamente) como un producto de factores lineales de la forma $ax + b$ y factores cuadráticos de la forma $a\,x^2 + b\,x + c$.

2. Si dos funciones polinomiales del mismo grado son iguales para todos los valores que pueda tomar la variable, entonces los coeficientes de las potencias iguales en ambos polinomios son iguales.

En símbolos, si $a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \dots + a_n\, x^n = b_0 + b_1 x + b_2\, x^2 + \dots + b_n\, x^n$ para todos los valores de $\underline{x}$, entonces $a_i = b_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

El método de descomposición de una fracción en fracciones parciales, apoyando en éstos dos principios fundamentales, distingue cuatro casos que se refieren a la descomposición en factores del denominador de una fracción racional propia.

I. Factores lineales diferentes. A cada factor lineal diferente $\underline{a\ x + b}$ que aparece una sola vez en la factorización del denominador, corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{a\,x + b}$, donde A es una constante que va a ser determinada.

II. Factores lineales repetidos. A cada factor lineal $a\,x + b$ que aparece $\underline{m}$ veces en la factorización del denominador, corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{a\,x + b} + \frac{A_2}{(a\,x + b)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_m}{(a\,x + b)^m} \quad \text{donde}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ son constantes que van a ser determinados.

III. <u>Factores cuadráticos diferentes</u>. A cada factor cuadrático diferente $ax^2 + bx + c$ que aparece una sola vez en la factorización del denominador, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{A\,x + B}{ax^2 + bx + c}, \text{ donde } A \text{ y } B \text{ son constantes que van}$$

a ser determinados.

IV. <u>Factores cuadráticos repetidos</u>. A cada factor cuadrático $a\,x^2 + bx + c$ que aparece <u>m</u> veces en la factorización del denominador, le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1\,x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2\,x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_m\,x + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Consideremos unos ejemplos para detallar el proceso de descomposición de una fracción en fracciones parciales.

<u>Problema 1</u>. Descomponer en fracciones parciales la fracción:

$$\frac{x + 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

En este problema, el numerador es de grado menor que el denominador, es decir se trata de una fracción propia. Primero descomponemos el denominador en factores:

$$\frac{x + 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x + 4}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{x + 4}{x\,(x - 1)\,(x + 2)}$$

Los factores del denominador son todos lineales y diferentes. Entonces corresponde al caso I y suponemos la siguiente descomposición:

$$\frac{x + 4}{x\,(x - 1)\,(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Reduciendo el lado derecho a una sola fracción con el mismo denominador del lado izquierdo.

$$= \frac{A\,(x - 1)\,(x + 2) + B\,(x)\,(x + 2) + C\,(x)\,(x - 1)}{x\,(x - 1)\,(x + 2)}$$

$$= \frac{A\,(x^2 + x - 2) + B\,(x^2 + 2x) + C\,(x^2 - x)}{x\,(x - 1)\,(x + 2)}$$

$$= \frac{A\,x^2 + Ax - 2\,A + B\,x^2 + 2Bx + C\,x^2 - Cx}{x\,(x - 1)\,(x + 2)}$$

$$\frac{x + 4}{x\,(x - 1)\,(x + 2)} = \frac{x^2\,(A + B + C) + x\,(A + 2B - C) - 2A}{x\,(x - 1)\,(x + 2)}$$

Los numeradores deben ser iguales para todo valor de <u>x</u> puesto que las fracciones deben ser algebraicamente equivalentes.

$$\therefore\; x + 4 = (A + B + C)\,x^2 + (A + 2B - C)\,x - 2\,A$$

Aplicando el segundo principio fundamental, los coeficientes de las potencias iguales en ambos lados son iguales:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 2B - C = 1 \\ -\,2\,A = 4 \end{cases}$$

de la última ecuación: $A = -2$

Sustituyendo $A = -2$ en las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\,2 + B + \cancel{C} &= 0 \\
-\,2 + 2B - \cancel{C} &= 1 \\
-\,4 + 3B \quad &= 1 \\
3B \quad &= 5 \\
B \quad &= 5/3 \\
C \quad &= 2 - B = 2 - 5/3 = 1/3
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x+4}{x^3+x^2-2x} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{3\,(x-1)} + \frac{1}{3\,(x+2)}$$

Desde luego siempre es posible comprobar los resultados sumando las fracciones para obtener la expresión original.

Problema 2. Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{8\,x^2}{(2x-3)^3}$

siguiendo el mismo proceso que en el problema 1, ahora observamos que la factorización del denominador corresponde al caso II. Entonces:

$$\frac{8x^2}{(2x-3)^3} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{(2x-3)^2} + \frac{C}{(2x-3)^3}$$

$$= \frac{A\,(2x-3)^2 + B\,(2x-3) + C}{(2x-3)^3}$$

$$= \frac{4\,Ax^2 - 12\,Ax + 9\,A + 2\,Bx - 3B + C}{(2x-3)^3}$$

Igualando numeradores:

$$8x^2 = 4\,Ax^2 + (-12A + 2B)\,x + 9A - 3\,B + C$$

$$\begin{cases} 4\,A = 8 \\ -12\,A + 2B = 0 \\ 9\,A - 3\,B + C = 0 \end{cases}$$

$$A = 2$$

$$-24 + 2\,B = 0 \quad ; B = +12$$

$$18 - 36 + C = 0$$

$$C = 18$$

$$\therefore \frac{8x^2}{(2x-3)^2} = \frac{2}{2x-3} + \frac{12}{(2x-3)^2} + \frac{18}{(2x-3)^3}$$

Problema 3. Descomponer en fracciones parciales la fracción:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

En este caso, el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Entonces, primero hacemos la división para separar la parte entera y el resultado es:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Ahora:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)\,(x-1)}$$

Igualando numeradores:

$$x = (A+B)\,x - A + B$$

$$\cancel{A} + B = 1$$

$$-\cancel{A} + B = 0$$

$$2B = 1$$

$$B = 1/2$$

$$A = +B = +\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = x - 1 + \frac{1}{2\,(x+1)} + \frac{1}{2\,(x-1)}$$

Aplicación al Cálculo Integral. Cuando una fracción racional no puede integrarse directamente pero puede descomponerse en fracciones parciales, entonces se integra término a término la suma de las fracciones parciales resultantes.

Ejemplo 1.

$$\int \frac{x+4}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

Esta integral no puede ser obtenida directamente. En el problema 1 de los ejemplos sobre descomposición en fracciones parciales, obtuvimos:

$$\frac{x+4}{x^3+x^2-2x} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{3\,(x-1)} + \frac{1}{3\,(x+2)}$$

$$\therefore \int \frac{x+4}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{-2\,dx}{x} + \int \frac{5\,dx}{3\,(x-1)} + \int \frac{dx}{3\,(x+2)}$$

$$= -2 \ln x + \frac{5}{3} \ln (x-1) + \frac{1}{3} \ln (x+2) + C$$

$$= \ln \frac{(x-1)^{5/3}\,(x+2)^{1/3}}{x^2} + C$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}\,dx$$

En este caso se trata de una fracción impropia porque el grado del numerador es mayor que el del denominador. Efectuando la división obtenemos:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Ahora, descomponiendo en fracciones parciales la parte fraccionaria:

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax - A + B}{(x-1)^2}$$

$$\therefore 2x - 1 = Ax + B - A$$

$$A = 2$$

$$B - A = -1$$

$$B = A - 1 = 2 - 1 = 1$$

Entonces:

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Ahora, integrando término a término:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \int x\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{2dx}{x-1} + \int (x-1)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\ln (x-1) + \frac{1}{x-1} + C$$

8.5 La constante de integración. Hemos visto que la integral indefinida es una familia de funciones que difieren por una constante. Geométricamente, la integral indefinida es una familia de curvas paralelas determinadas por los diferentes valores de la constante de integración. Entonces, la constante de integración puede ser determinada cuando se conoce el valor de la integral para un valor dado de la variable independiente. En términos geométricos, la constante se determina cuando se tiene un punto por donde pasa la curva de la integral.

Ejemplos:

1. Encontrar $F(x) = \int (4x - 5)\,dx$ si el valor del integral para $x = 1$ es $F(x) = 5$.

Solución: $F(x) = \int (4x - 5)\,dx = 2x^2 - 5x + C$

Ahora $F(x) = 5$ cuando $x = 1$:

Entonces: $5 = 2 - 5 + C$

$C = 8$

Sustituyendo:

$F(x) = 2x^2 - 5x + 8$

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(0,2)$ y cuya pendiente en cualquier punto es dada por: $e^x - 2x$.

Solución: La pendiente de la curva es igual a la primera derivada de la función con respecto a x. Es decir:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = e^x - 2x$$

Despejando d y:

$$d\,y = (e^x - 2x)\,dx$$

Integrando:

$$\int dy = \int (e^x - 2x)\,dx$$

$$\therefore\ y = e^x - x^2 + C$$

Ahora, la curva pasa por el punto P (0, 2). Entonces y = 2 cuando x = 0. Sustituyendo estos valores para encontrar C:

$$2 = e^0 - 0 + C$$

$$2 = 1 + C$$

$$\therefore\ C = 1$$

Sustituyendo:

$$y = e^x - x^2 + 1$$

8.- Aplicaciones de la integral indefinida: Las aplicaciones del cálculo integral son comunes en Física. Consideremos una de sus aplicaciones a la cinemática que es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos sin tomar en cuenta las causas que lo producen, ni la naturaleza misma de los cuerpos. Supongamos que se desea obtener las leyes del movimiento de un cuerpo en caída libre. El cuerpo está sujeto a la aceleración de la gravedad que es igual a 9.8 metros por segundo al cuadrado, (redondeada a un decimal).

Ahora, la aceleración mide el cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Entonces, se tiene:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = 9.8$$

o sea: $d\,v = 9.8\,dt.$

Integrando:

$$\int dv = \int 9.8\,dt$$

$$v = 9.8\,t + c_1$$

Ahora, si el cuerpo parte del reposo, entonces la velocidad v = o cuando el tiempo t = o. Sustituyendo estos valores para determinar la constante c_1:

$$0 = 0 + C_1$$

$$\therefore\ C_1 = 0$$

Entonces:

$$v = 9.8\,t$$

Hemos encontrado una relación que nos permite determinar para cualquier valor de t, la velocidad del móvil que parte del reposo y se mueve en caída libre con una aceleración de $g = 9.8\ \frac{\text{Mts.}}{\text{Seg.}^2}$

Ahora, la velocidad mide el cambio del espacio recorrido con respecto al tiempo y se define como la derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo. Entonces:

$$\frac{d\,S}{d\,t} = 9.8\,t$$

o sea: $d\,S = 9.8\,t\,d\,t$

Integrando:

$$\int d\,S = \int 9.8\,t\,d\,t$$

$$S = \frac{9.8}{2}\,t^2 + C_2$$

$$S = 4.9\,t^2 + C_2$$

Ahora, puesto que el cuerpo parte del reposo, el espacio recorrido S = 0 cuando t = 0. Sustituyendo estos valores para determinar C_2:

$$0 = 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$