Entonces:

$$\underline{\underline{S = 4.9\ t^2}}$$

Esta relación nos proporciona el espacio recorrido por el móvil para cualquier valor del tiempo $\underline{t}$.

<u>Ejemplo</u>: Se deja caer una piedra en un pozo que tiene 44.10 metros de profundidad. Encontrar el tiempo que tarda en llegar al fondo del pozo y la velocidad de la piedra al llegar al fondo, suponiendo que la aceleración de la gravedad es $g = 9.8\ \text{Mts.}/\text{Seg.}^2$

<u>Solución</u>: Hemos encontrado que el espacio recorrido por un móvil en estas condiciones es dado por:

$$S = 4.9\ t^2$$

Entonces, para $S = 44.10$:

$$4.9\ t^2 = 44.10$$

$$t^2 = \frac{44.10}{4.9} = 9$$

$$\therefore\ t = 3 \text{ segundos.}$$

Entonces, la piedra tarda 3 segundos en llegar al fondo.

Abora, la velocidad en cualquier instante es dada por:

$$V = 9.8\ t$$

Sustituyendo $t = 3$ para encontrar la velocidad de llegada al fondo:

$$V = (9.8)\ (3)$$

$$v = 29.4\ \text{Mts.}/\text{Seg.}$$

<u>Aplicación a economía</u>. Si el ingreso total $\underline{I_t}$ es dado por una función continua de la cantidad demandada $\underline{x}$, podemos encontrar el ingreso marginal y la ley de demanda correspondiente, de la siguiente manera:

$$\text{Sea } I_t = F\ (x):$$

$$\text{Ingreso marginal} : I_{mg} = \frac{d}{d\,x}\ (I_t) = F'\ (x)$$

$$\text{Ley de demanda:}\quad p = \frac{I_t}{x} = \frac{F\ (x)}{x}$$

Ahora, si se tiene el ingreso marginal $\underline{I_{mg}}$ como una función de la cantidad demandada $\underline{x}$, entonces podemos determinar el ingreso total por integración de la siguiente manera:

$$\text{Sea } I_{mg} = f\ (x)$$

$$\text{Ahora } I_{mg} = \frac{d\ I_t}{d\ x}$$

$$\text{Entonces:}\quad d\ I_t = I_{mg}\ dx = f\ (x)\ dx$$

$$\text{Integrando:}\quad I_t = \int f\ (x)\ dx$$

$$I_t = F\ (x) + C$$

Para determinar C, supongamos que el ingreso total es cero, cuando la cantidad demandada es cero: (Condiciones normales).

$$\therefore\ 0 = F\ (0) + C$$

$$C = -\ F\ (0)$$

Sustituyendo:

$$\underline{\underline{I_t = F\ (x) - F\ (0)}}$$

<u>Ejemplo</u> : Encontrar el ingreso total y la ley de demanda si el ingreso marginal es dado por: $I_{mg} = 10 - 2x$. Graficar en el mismo sistema de referencia, el ingreso total, el ingreso marginal y la ley de demanda.

<u>Solución</u>:

$$I_t = \int I_{mg}\ dx = \int (10 - 2x)\ dx$$

$$I_t = 10\ x - x^2 + C$$

Ahora, $I_t = 0$ cuando $x = 0$. Entonces:

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

Sustituyendo:

$$\underline{\underline{I_t = 10\ x - x^2}}$$

Ley de demanda. El precio es igual al ingreso medio, es decir:

$$P = \frac{I_t}{x}$$

Entonces: $P = \dfrac{10\,x - x^2}{x}$

$$P = 10 - x$$

Gráfica: El ingreso marginal y la ley de demanda son funciones lineales de x. Entonces, para graficarlas es suficiente encontrar sus intersecciones con los ejes:

x	0	5	10
I_{mg}	10	0	——
$I_{md} = P$	10	~~0~~	0

El ingreso total es una parábola abierta hacia abajo que pasa por el origen y tiene su vértice en el máximo de I_t, es decir cuando el ingreso marginal es cero. Esto ocurre cuando $x = 5$.

Para $x = 5$, $I_t = 10\,(5) - (5)^2 = 50 - 25 = 25$

(figura 8.2).

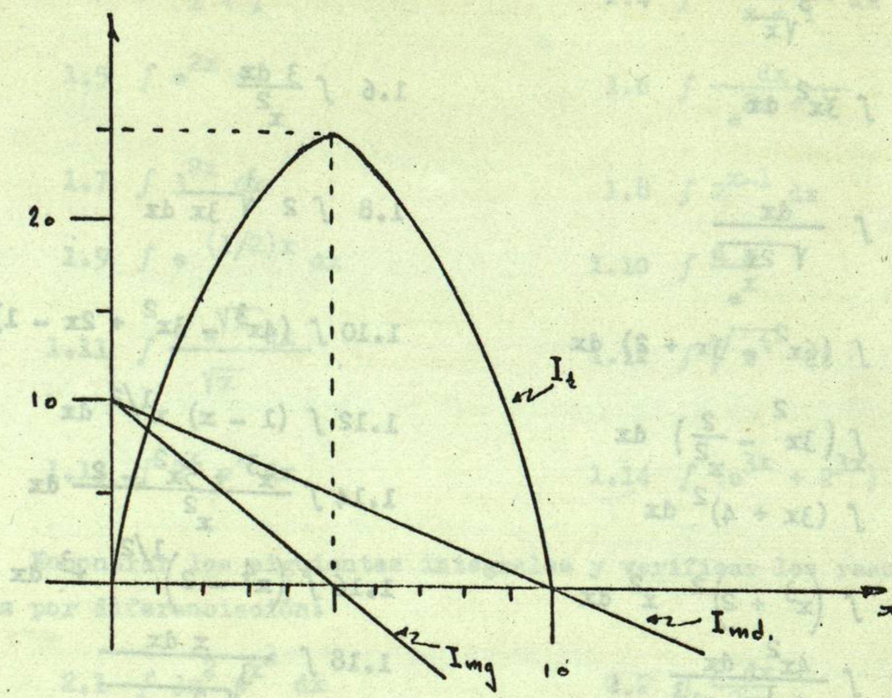

Fig. 8.2

Observación. De la misma manera se puede determinar el costo total y el costo medio cuando se tiene el costo marginal como una función de la cantidad producida. En general, con la ayuda del cálculo se pueden determinar conceptos totales y medios a partir del concepto marginal.

Ejercicio 28.

Tema: Integral indefinida. Aplicación de reglas para integración directa.

1. Determinar las integrales indefinidas siguientes:

1.1 $\int x^3\,dx$ 1.2 $\int \dfrac{dx}{x^3}$

1.3 $\int \frac{2\,dx}{\sqrt[3]{x}}$ 1.4 $\int x^{3/4}\,dx$

1.5 $\int 3x^2\,dx$ 1.6 $\int \frac{3\,dx}{x^2}$

1.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$ 1.8 $\int 2\sqrt[3]{3x}\,dx$

1.9 $\int (6x^2 - 3x + 2)\,dx$ 1.10 $\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx$

1.11 $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right)dx$ 1.12 $\int (1 - x)\,x^{1/2}\,dx$

1.13 $\int (3x + 4)^2\,dx$ 1.14 $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{x^2}\,dx$

1.15 $\int \left(x^3 + 2\right)^2 x^2\,dx$ 1.16 $\int \left(x^4 - 2\right)^{1/2} x^3\,dx$

1.17 $\int \frac{4x^2\,dx}{(x^3 - 2)^3}$ 1.18 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 2}}$

1.19 $\int 3x\sqrt{1 - 3x^2}\,dx$ 1.20 $\int \left(x^2 + 6x\right)^{1/3}(x + 3)\,dx$

1.21 $\int \left(1 - x^2\right)^{1/3} x\,dx$ 1.22 $\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

1.23 $\int \frac{dx}{x}$ 1.24 $\int \frac{2\,dx}{2x + 5}$

1.25 $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$ 1.26 $\int \frac{2x^2\,dx}{2x^3 + 5}$

1.27 $\int \frac{x + 2}{x + 1}\,dx$ 1.28 $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x}\,dx$

1.29 $\int \frac{(x^2 - 1)^3}{x - 1}\,dx$ 1.30 $\int (x - 1)^5\,dx$

Ejercicio 29.

Tema: Fórmulas para integración directa.

1. Encontrar las integrales siguientes:

1.1 $\int \frac{x\,dx}{2x^2 - 1}$ 1.2 $\int \frac{x^2\,dx}{1 - x^3}$

1.3 $\int \frac{x + 3}{x + 1}\,dx$ 1.4 $\int \frac{(x - 1)^2}{x + 1}\,dx$

1.5 $\int e^{2x}\,dx$ 1.6 $\int \frac{dx}{e^{2x + 1}}$

1.7 $\int 3^{2x}\,dx$ 1.8 $\int 2^{x-1}\,dx$

1.9 $\int e^{(1/2)x}\,dx$ 1.10 $\int \frac{dx}{e^x}$

1.11 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$ 1.12 $\int \sqrt{e^t}\,dt$

1.13 $\int 2^x e^x\,dx$ 1.14 $\int (e^{3x} + 2^{3x})\,dx$

2. Encontrar los siguientes integrales y verificar los resultados por diferenciación:

2.1 $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$ 2.2 $\int \frac{2\,dx}{e^{2x}}$

2.3 $\int \frac{e^x\,dx}{e^x - 1}$ 2.4 $\int 2x\,e^{-x^2}\,dx$

2.5 $\int \left(e^{3x}\right)^2 dx$ 2.6 $\int 2x\left(e^{2x^2} - 1\right)dx$ duda

3. Determinar las integrales siguientes:

3.1 $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ 3.2 $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

3.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$ 3.4 $\int \frac{dz}{9z^2 - 1}$

3.5 $\int \frac{dy}{25 - 4y^2}$ 3.6 $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$

3.7 $\int \frac{dx}{4x - x^2}$ 3.8 $\int \frac{2x - 3}{4x^2 - 11}\,dx$

3.9 $\int \frac{(2x + 2)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ * 3.10 $\int \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 6}\,dx$

Ejercicio 30.

Tema: Integración por partes.

1. Encontrar las siguientes integrales por el método de integración por partes:

1.1 $\int x^3 e^{2x}\,dx$ 1.2 $\int 2x \ln x\,dx$

1.3 $\int x\,3^x\,dx$ 1.4 $\int x\,e^{-x}\,dx$

1.5 $\int (x+1)\ln x\,dx$ 1.6 $\int \ln (x+7)\,dx$

1.7 $\int x^2 e^x\,dx$ 1.8 $\int 5 \ln x\,dx$

1.9 $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 1.10 $\int \dfrac{x^3\,dx}{e^{x^2}}$

2. Determinar las siguientes integrales y verificar los resultados por diferenciación:

2.1 $\int (e^{2x}+x)^2\,dx$ 2.2 $\int (x+e^x)^2\,dx$

2.3 $\int \dfrac{6x^2\,dx}{\sqrt{15+2x^3}}$ 2.4 $\int \dfrac{(x+2)\,dx}{x^2+4x+5}$

2.5 $\int \dfrac{e^x\,dx}{e^x+e^{-x}}$ 2.6 $\int \ln (1+x)\,dx$

2.7 $\int \dfrac{x^3\,dx}{x-1}$ 2.8 $\int \dfrac{2x\,dx}{1-x^4}$

2.9 $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$ 2.10 $\int \dfrac{(\ln x)^2\,dx}{x}$

Ejercicio 31.

Tema: Integración por fracciones parciales

1. Integrar por descomposición en fracciones parciales:

1.1 $\int \dfrac{(2x+1)\,dx}{x^2-1}$ 1.2 $\int \dfrac{(x-3)\,dx}{x^3-8}$

1.3 $\int \dfrac{(2x-4)\,dx}{(x+1)(x-3)}$ 1.4 $\int \dfrac{dx}{x^2-3x+2}$

1.5 $\int \dfrac{(x^2-3x+1)\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$ 1.6 $\int \dfrac{(x-8)\,dx}{x^3-2x^2}$

1.7 $\int \dfrac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3+3x^2+3x+1}$ 1.8 $\int \dfrac{3\,dx}{x^2-4}$

1.9 $\int \dfrac{(x-3)\,d\,x}{(x^2-1)^2}$ 1.10 $\int \dfrac{(2x+6)\,d\,x}{x^4-x^2}$

1.11 $\int \dfrac{(6x-1)\,d\,x}{(x+1)(x^2+5x-6)}$ 1.12 $\int \dfrac{(x^2-3x+4)\,d\,x}{(x-2)(x^2-4x+4)}$

2. Integrar, descomponiendo en parte entera y fracciones parciales:

2.1 $\int \dfrac{(x^3-3x+2)\,dx}{x^2-6x+9}$ 2.2 $\int \dfrac{2x^3\,d\,x}{x^2-10x+21}$

2.3 $\int \dfrac{(x^2+x-8)\,d\,x}{x^2+x-12}$ 2.4 $\int \dfrac{(x^2+5)\,d\,x}{(x+5)^2}$

2.5 $\int \dfrac{(x^3+2x^2-3)\,d\,x}{(x+1)(x-2)^2}$ 2.6 $\int \dfrac{(x^2-3x+5)\,d\,x}{x^2-4}$

Ejercicio 32.

Tema: Constante de integración. Aplicaciones.

1. Encontrar la función $y = f(x)$ utilizando los datos que se proporcionan:

	$\frac{dy}{dx}$	$\underline{x}$	$\underline{y}$
1.1	$x + 2$	1	5
1.2	$x^2 - 4x + 2$	0	3
1.3	$x^3 - 2x^2 + 4$	3	10
1.4	$e^{2x} + 4$	0	3/2
1.5	$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$	2	ln 4

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto indicado y con pendiente en cualquier punto igual a $\underline{m}$ como se indica: (Graficar los primeros tres).

2.1 P (0, 2) $m = 1$

2.2 P (1, 6) $m = -5$

2.3 P (0, 10) $m = 3x - 2$

2.4 P (3, 1) $m = x^2 - 4$

3. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en cualquier punto es la siguiente: (Graficar los primeros tres).

3.1 $m = x$

3.2 $m = 2$

3.3 $m = x - 2$

3.4 $m = x^2 - 2x + 4$

3.5 $m = e^x + 3$

4. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = 6 - x$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

5. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = \frac{-6}{(x+2)^2} + 100$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

no 6. Un automóvil se acelera uniformemente a razón de 5 metros por segundo al cuadrado. Si el automóvil parte del reposo, encontrar la ley del movimiento.

CAPITULO 9

INTEGRAL DEFINIDA.

9.1 Area bajo una curva. El concepto de integral definida está relacionado con el área bajo una curva. Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo de $x = a$ a $x = b$ y consideremos el problema de determinar el área entre la curva de $f(x)$ y el eje de las $\underline{x}$ en el intervalo de $x = a$ a $x = b$, es decir, el área limitada por la curva, el eje de las $\underline{x}$ y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ como se indica en la figura 9.1.

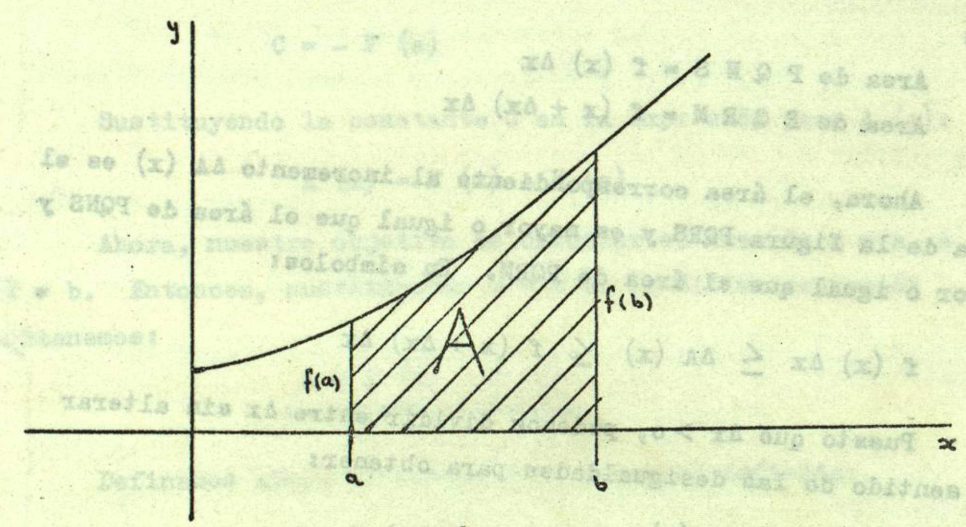

Fig. 9.1

Supongamos que el área en cuestión se mide a partir de la ordenada en $x = a$ y designemos por $A(x)$ el área limitada por la curva, el eje $\underline{x}$, $f(a)$ y la ordenada en el punto de abscisa $\underline{x}$. De acuerdo con ésto, $A(x)$ es una función de $\underline{x}$, es decir, su