	$\frac{dy}{dx}$	x	y
1.1	$x + 2$	1	5
1.2	$x^2 - 4x + 2$	0	3
1.3	$x^3 - 2x^2 + 4$	3	10
1.4	$e^{2x} + 4$	0	3/2
1.5	$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$	2	ln 4

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto indicado y con pendiente en cualquier punto igual a m como se indica: (Graficar los primeros tres).

   2,1 P (0, 2) $m = 1$

   2,2 P (1, 6) $m = -5$

   2,3 P (0, 10) $m = 3x - 2$

   2.4 P (3, 1) $m = x^2 - 4$

3. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en cualquier punto es la siguiente: (Graficar los primeros tres).

   3.1 $m = x$

   3.2 $m = 2$

   3.3 $m = x - 2$

   3.4 $m = x^2 - 2x + 4$

   3.5 $m = e^x + 3$

4. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = 6 - x$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

5. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = \frac{-6}{(x+2)^2} + 100$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

6. Un automóvil se acelera uniformemente a razón de 5 metros por segundo al cuadrado. Si el automóvil parte del reposo, encontrar la ley del movimiento.

CAPITULO 9

INTEGRAL DEFINIDA.

9.1 Area bajo una curva. El concepto de integral definida está relacionado con el área bajo una curva. Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo de $x = a$ a $x = b$ y consideremos el problema de determinar el área entre la curva de $f(x)$ y el eje de las x en el intervalo de $x = a$ a $x = b$, es decir, el área limitada por la curva, el eje de las x y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ como se indica en la figura 9.1.

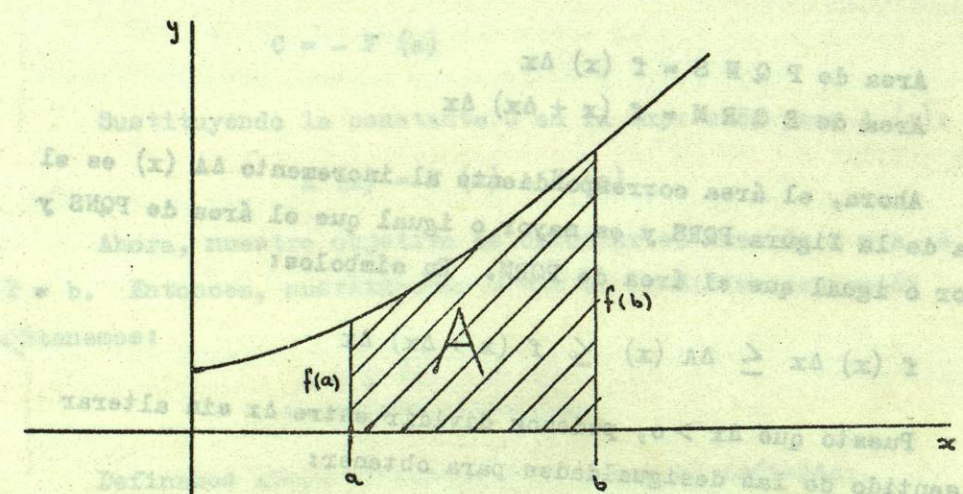
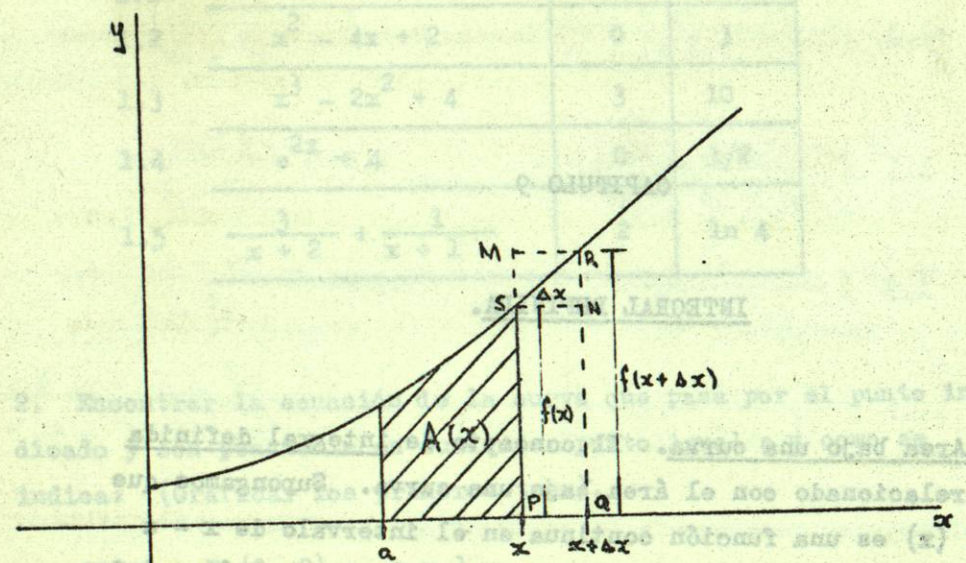


Fig. 9.1

Supongamos que el área en cuestión se mide a partir de la ordenada en $x = a$ y designemos por $A(x)$ el área limitada por la curva, el eje x, $f(a)$ y la ordenada en el punto de abscisa x. De acuerdo con ésto, $A(x)$ es una función de x, es decir, su valor depende del valor de x. Ahora, si aplicamos a <u>x</u> un incremento Δx, entonces el área A (x) se incrementa una cantidad $\Delta A\,(x)$ que corresponde al área de la figura P Q R S. (Figura 9.2).



Consideremos los rectángulos P Q N S y P Q R M. Sus áreas son:

Área de P Q N S $= f\,(x)\,\Delta x$

Área de P Q R M $= f\,(x + \Delta x)\,\Delta x$

Ahora, el área correspondiente al incremento $\Delta A\,(x)$ es el área de la figura PQRS y es mayor o igual que el área de PQNS y menor o igual que el área de PQRM. En símbolos:

$$f\,(x)\,\Delta x \leq \Delta A\,(x) \leq f\,(x + \Delta x)\,\Delta x$$

Puesto que $\Delta x > o$, podemos dividir entre Δx sin alterar el sentido de las desigualdades para obtener:

$$f\,(x) \leq \frac{\Delta A\,(x)}{\Delta x} \leq f\,(x + \Delta x)$$

Aplicando límites cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to o} f\,(x) \leq \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta A\,(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to o} f\,(x + \Delta x)$$

$$\therefore\ f\,(x) \leq \frac{d\,A\,(x)}{d\,x} \leq f\,(x)$$

Entonces: $\dfrac{d\,A\,(x)}{d\,x} = f\,(x)$

Hemos encontrado que A (x) es una función cuya derivada es f (x) y por lo tanto A (x) es una integral de f (x) d x.

$$A\,(x) = \int f\,(x)\,d\,x.$$

De acuerdo con la definición de integral indefinida, hemos encontrado que:

$\int f\,(x)\,d\,x = F\,(x) + C$ donde F (x) es la anti-derivada de f (x), es decir: $F'\,(x) = f\,(x)$.

Entonces: $A\,(x) = F\,(x) + C$

Ahora, cuando $x = a$, el valor de A (x) es cero. Sustituyendo estos valores para encontrar la constante C:

$$A\,(a) = F\,(a) + C$$

$$\therefore\ F\,(a) + C = 0$$

$$C = -\,F\,(a)$$

Sustituyendo la constante C en la expresión para A (x):

$$A\,(x) = F\,(x) - F\,(a)$$

Ahora, nuestro objetivo es calcular el área de $x = a$ a $x = b$. Entonces, sustituyendo $x = b$ en la última expresión obtenemos:

$$\underline{\underline{A = F\,(b) - F\,(a)}}$$

Definamos ahora el concepto de integral definida:

<u>9.2 La integral definida.</u> La integral definida de <u>a</u> a <u>b</u> de una expresión diferencial es igual a la diferencia del valor de la integral para $x = b$ menos el valor de la integral para $x = a$.

Representaremos a la integral definida por el siguiente símbolo:

Integral definida de a a b de $f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

b y a reciben el nombre de límites superior e inferior respectivamente de la integral definida.

Observación: Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x) + C)\Big|_a^b$$

$$= F(b) + \cancel{C} - F(a) - \cancel{C}$$

$$= F(b) - F(a)$$

Entonces, la constante de integración desaparece en la integral definida porque los límites a y b determinan un valor específico para la integral. Por esta razón se le llama integral definida.

Ejemplo 1. Encontrar las integrales definidas siguientes:

$$\int_0^1 4x\,dx$$

Solución: $\int_0^1 4x\,dx = 2x^2 \Big|_0^1$

$$\int_0^1 4x\,dx = 2 - 0 = \underline{\underline{2}}$$

Ejemplo 2.

$$\int_2^4 (x^2 - 3x + 5)\,dx$$

Solución: $\int_2^4 (x^2 - 3x + 5)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x \Big|_2^4$

$$= \frac{1}{3}(4^3) - \frac{3}{2}(4^2) + 5(4) - \frac{1}{3}(2^3) - \frac{3}{2}(2^2) + 5(2)$$

$$= \frac{64}{3} - 24 + 20 - (\frac{8}{3} - 6 + 10)$$

$$= \frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} - 4$$

$$= \frac{56}{3} - 8 = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

Ejemplo 3.

$$\int_0^1 (e^x + 1)\,dx$$

Solución: $\int_0^1 (e^x + 1)\,dx = (e^x + x)\Big|_0^1$

$$= e + 1 - (e^0 + 0)$$

$$= e + 1 - 1$$

$$= \underline{\underline{e}}$$

9.3 La integral definida como una suma. Hemos relacionado la integral definida de a a b de una función continua $f(x)$ con el área limitada por la curva de $f(x)$, el eje de las x y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$. Veamos ahora como se puede expresar el área mencionada como el límite de una suma de áreas de rectángulos diferenciales, cuando el número de rectángulos tiende a infinito.

Sea $[a, b]$ un intervalo sobre el eje de las x con $a < b$ y sea $f(x)$ una función continua en el intervalo.

Def. Una partición P_n del intervalo $[a, b]$ es una secuencia de números $x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_n = b$$

De acuerdo con la definición, una partición P_n divide al intervalo $[a, b]$ en n sub-intervalos como indica la figura 9.3:

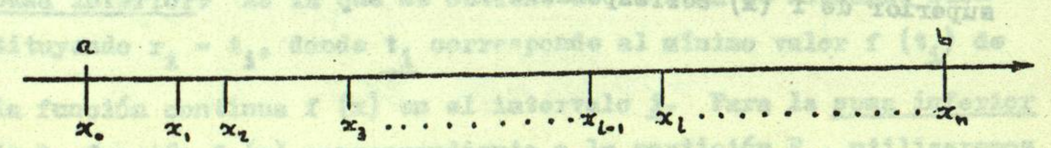


Fig. 9.3

Cada sub-intervalo determina geométricamente un segmento del eje $\underline{x}$. El intervalo No. $\underline{i}$ determina el segmento $x_i - x_{i-1}$. Designemos por r_i, un punto en el segmento $x_i - x_{i-1}$, es decir, r_i es tal que: $x_{i-1} \leqslant r_i \leqslant x_i$. Ahora, consideremos la siguiente suma, llamada <u>suma de Riemann</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i) = (x_1 - x_0)\, f(r_1) + (x_2 - x_1)\, f(r_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(r_n)$$

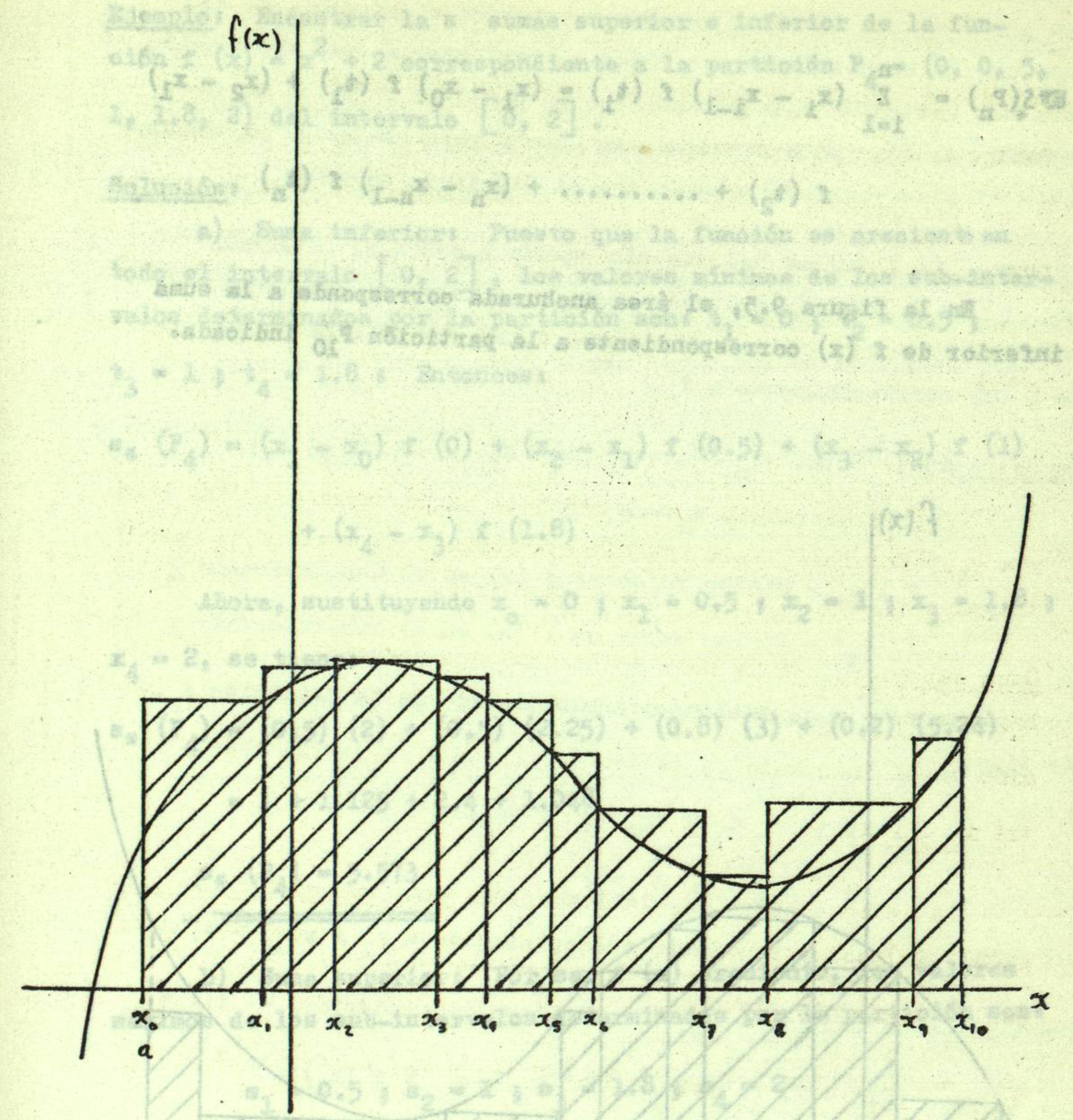
$f(r_i)$ corresponde a la ordenada de la curva de $f(x)$ para $x = r_i$. Entonces, cada sumando corresponde al área de un rectángulo de base $x_i - x_{i-1}$ y altura $f(r_i)$.

<u>Suma superior</u>. En la suma de Riemann que acabamos de definir, hagamos $r_i = s_i$, donde $\underline{s_i}$ corresponde al máximo valor de la función en el intervalo $\underline{i}$, es decir $f(x) \leqslant f(s_i)$ para todo $\underline{x}$ entre x_{i-1} y x_i.

A la suma obtenida, la llamaremos <u>suma superior de la función f (x) correspondiente a la partición P_n</u>, y será designada por el siguiente símbolo:

$$s^*(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(s_i) = (x_1 - x_0)\, f(s_1) + (x_2 - x_1)\, f(s_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(s_n)$$

En la figura 9.4, el área anchurada corresponde a la suma superior de $f(x)$ correspondiente a la partición P_{10} indicada.



F i g. 9.4

<u>Suma inferior</u>. Es la que se obtiene de la Suma de Riemann, sustituyendo $r_i = t_i$, donde $\underline{t_i}$ corresponde al mínimo valor $f(t_i)$ de la función continua $f(x)$ en el intervalo $\underline{i}$. Para la <u>suma inferior de la función f (x) correspondiente a la partición P_n</u>, utilizaremos el siguiente símbolo:

$$s_*(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (x_1 - x_0)\, f(t_1) + (x_2 - x_1)\, f(t_2) + \dots\dots\dots + (x_n - x_{n-1})\, f(t_n)$$

En la figura 9.5, el área anchurada corresponde a la suma inferior de f (x) correspondiente a la partición P_{10} indicada.

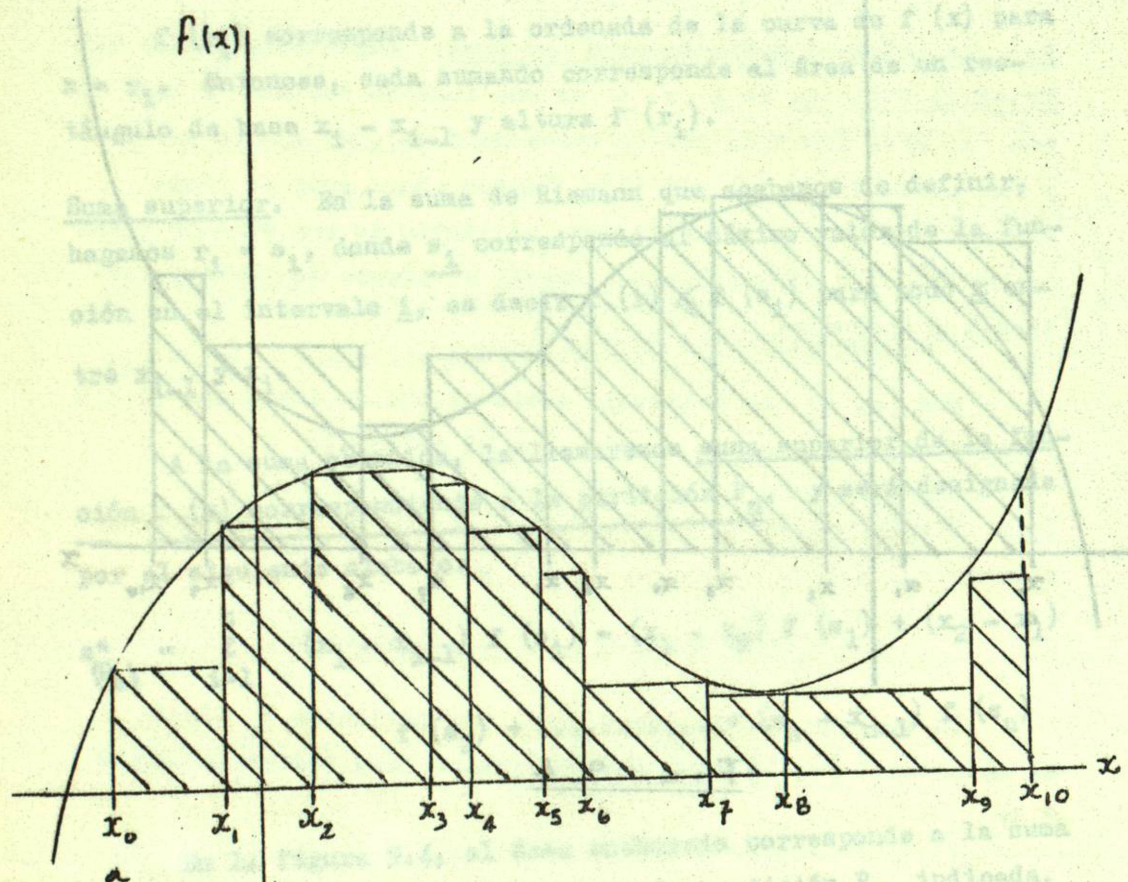


FIG. 9.5

Ejemplo: Encontrar la s sumas superior e inferior de la función f (x) = $x^2 + 2$ correspondiente a la partición P_4 = (0, 0, 5, 1, 1.8, 2) del intervalo $[0, 2]$.

Solución:

a) Suma inferior: Puesto que la función es creciente en todo el intervalo $[0, 2]$, los valores mínimos de los sub-intervalos determinados por la partición son: $t_1 = 0$; $t_2 = 0.5$; $t_3 = 1$; $t_4 = 1.8$: Entonces:

$$s_*(P_4) = (x_1 - x_0)\, f(0) + (x_2 - x_1)\, f(0.5) + (x_3 - x_2)\, f(1) + (x_4 - x_3)\, f(1.8)$$

Ahora, sustituyendo $x_0 = 0$; $x_1 = 0.5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1.8$; $x_4 = 2$, se tiene:

$$s_*(P_4) = (0.5)(2) + (0.5)(2.25) + (0.8)(3) + (0.2)(5.24)$$

$$= 1 + 1.125 + 2.4 + 1.048$$

$$s_*(P_4) = 5.573$$

b) Suma superior: Por ser f (x) creciente, los valores máximos de los sub-intervalos determinados por la partición son:

$$s_1 = 0.5 \;;\; s_2 = 1 \;;\; s_3 = 1.8 \;;\; s_4 = 2$$

Ahora, sustituyendo en la fórmula para la suma superior:

$$s^*(P_4) = (x_1 - x_0)\, f(0.5) + (x_2 - x_1)\, f(1) + (x_3 - x_2)\, f(s_3) + (x_4 - x_3)\, f(s_4) = (0.5)(2.25) + (0.5)(3) + (0.8)(5.24) + (0.2)(6) = 1.125 + 1.5 + 4.192 + 1.2$$

$$s^*(P_4) = 8.017$$