Relación entre la suma inferior y la suma superior. Comparando las gráficas que ilustran las sumas superior e inferior, se deduce que la suma inferior es menor o igual que la suma superior para una partición dada de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Este resultado es cierto para cualquier partición sobre el intervalo, de acuerdo con el siguiente teorema:

Teorema. Si $f(x)$ es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y P_n es una partición cualquiera sobre el intervalo, entonces la suma inferior es menor o igual que la suma superior de $f(x)$ correspondiente a P_n.

Demostración: Sean: $P_n = a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots, x_n = b$

$f(t_i)$ = Mínimo valor de $f(x)$ en el sub-intervalo $\underline{i}$

$f(s_i)$ = Máximo valor de $f(x)$ en el sub-intervalo $\underline{i}$

Entonces, para cualquier sub-intervalo de la partición P_n, se tiene:

$$f(t_i) \leq f(x) \leq f(s_i)$$

$$\therefore f(t_i) \leq f(s_i)$$

Ahora, $x_{i-1} < x_i$, para todo $\underline{i}$. Entonces $x_i - x_{i-1} > 0$.

Multiplicando por $(x_i - x_{i-1})$ la desigualdad anterior, se tiene:

$$(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) \leq (x_i - x_{i-1})\, f(s_i)$$

Sumando, desde $i = 1$ hasta $i = n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(s_i)$$

Ahora los lados izquierdo y derecho de esta desigualdad corresponden a las sumas inferior y superior respectivamente. Entonces:

$$s_*(P_n) \leq s^*(P_n)$$

L.C.D.D.

Corolario. Si $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$ es una suma general de Riemann, entonces: $s_*(P_n) \leq s \leq s^*(P_n)$

Observación. La igualdad entre las sumas inferior y superior y la suma general de Riemann, se satisface cuando $f(x) = C$, es decir, cuando la curva de $f(x)$ es una recta horizontal. En este caso, cualquier suma de Riemann, incluyendo las sumas inferior y superior, son iguales al área achurada que se indica en la figura 9.6.

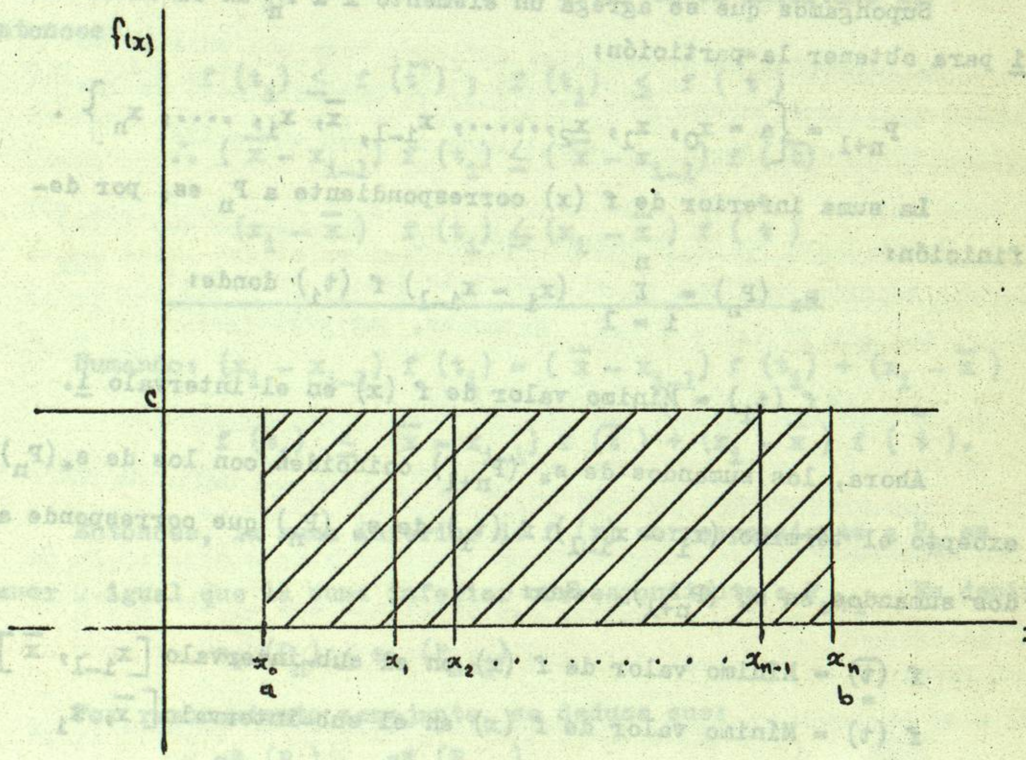

Fig. 9.6

Si $f(x)$ es la función constante $f(x) = C$, entonces la gráfica de $f(x)$ es una recta paralela al eje $\underline{x}$ y el área entre la curva y el eje $\underline{x}$ en un intervalo $[a, b]$, es igual a cualquier suma de Riemann. Es decir:

$$A = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$$

<u>Relación entre la suma de Riemann y la integral definida.</u> Consideremos ahora una función continua f (x) cuya gráfica es cualquier curva. Sea P_n una partición cualquiera de f (x) sobre el intervalo $[a, b]$. Si aumentamos un elemento a la partición P_n, entonces la suma inferior aumenta o sigue igual y la suma superior disminuye o sigue igual por la siguiente razón:

$$\text{Sea } P_n = \left\{ a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots x_n \right\}.$$

Supongamos que se agrega un elemento $\bar{x}$ a P_n en el intervalo <u>i</u> para obtener la partición:

$$P_{n+1} = \left\{ a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{i-1}, \bar{x}, x_i, \ldots, x_n \right\}.$$

La suma inferior de f (x) correspondiente a P_n es, por definición:

$$s_*(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i) \quad \text{donde:}$$

$$f(t_i) = \text{Mínimo valor de } f(x) \text{ en el intervalo } \underline{i}.$$

Ahora, los sumandos de $s_*(P_{n+1})$ coinciden con los de $s_*(P_n)$ excepto el término $(x_i - x_{i-1})\, f(t_i)$ de $s_*(P_n)$ que corresponde a dos sumandos en $s_*(P_{n+1})$. Sea:

$$f(\bar{t}) = \text{Mínimo valor de } f(x) \text{ en el sub-intervalo } [x_{i-1}, \bar{x}]$$

$$f(\bar{\bar{t}}) = \text{Mínimo valor de } f(x) \text{ en el sub-intervalo } [\bar{x}, x_i$$

Puesto que $f(t_i)$ es el mínimo valor de f (x) en el intervalo <u>i</u>, entonces:

$$f(t_i) \leq f(\bar{t}) \;;\; f(t_i) \leq f(\bar{\bar{t}})$$

Ahora:

$$(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (\bar{x} - x_{i-1})\, f(t_i) + (x_i - \bar{x})\, f(t_i)$$

Entonces, el término de $s_*(P_{n+1})$ correspondiente al intervalo <u>i</u> es igual a la siguiente suma:

$$(\bar{x} - x_{i-1})\, f(\bar{t}) + (x_i - \bar{x})\, f(\bar{\bar{t}})$$

Ahora, el término <u>i</u> de $s_*(P_n)$ puede descomponerse de la siguiente manera:

$$(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (\bar{x} - x_{i-1})\, f(t_i) + (x_i - \bar{x})\, f(t_i)$$

Además, $f(t_i)$ es el mínimo de f (x) en el intervalo <u>i</u>.

Entonces:

$$f(t_i) \leq f(\bar{t}) \;;\; f(t_i) \leq f(\bar{\bar{t}})$$

$$\therefore (\bar{x} - x_{i-1})\, f(t_i) \leq (\bar{x} - x_{i-1})\, f(\bar{t})$$

$$\underline{(x_i - \bar{x})\, f(t_i) \leq (x_i - \bar{x})\, f(\bar{\bar{t}})}$$

Sumando: $(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (\bar{x} - x_{i-1})\, f(t_i) + (x_i - \bar{x})$

$$f(t_i) \leq (\bar{x} - x_{i-1})\, f(\bar{t}) + (x_i - \bar{x})\, f(\bar{\bar{t}}).$$

Entonces, la suma inferior de f (x) correspondiente a P_n es menor o igual que la suma inferior correspondiente a P_{n+1}. Es decir:

$$s_*(P_n) \leq s_*(P_{n+1})$$

Por razonamiento semejante, se deduce que:

$$s^*(P_n) \geq s^*(P_{n+1})$$

Repitiendo el proceso que acabamos de describir, cada vez que aumentemos un elemento a la partición, la suma inferior tiende a aumentar y la suma superior tiende a disminuir. Si el número de elementos de la partición se aumenta tendiendo a infinito, entonces las sumas superior e inferior y en general, cualquier suma de Riemann, tienden al mismo valor, que es precisamente la integral definida de <u>a</u> a <u>b</u> de f (x) d x. Este resultado es el <u>teorema</u>

fundamental del cálculo integral que será establecido sin demostración.

Teorema. La integral definida de a a b de una función contínua f (x), es igual al límite de cualquier suma de Riemann correspondiente a una partición P_n cuando el número de elementos de la partición tiende a infinito. En símbolos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} s(P_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$$

La expresión de la integral definida como una suma es de fundamental importancia para facilitar el entendimiento de las aplicaciones del cálculo integral como se verá enseguida.

9.4 Propiedades de la integral definida. Supongamos que f (x) es una función contínua en el intervalo $[a, b]$ con $a < b$. Sea F (x) tal que F' (x) = f (x). Entonces, por definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Las propiedades fundamentales de la integral definida son las siguientes:

Propiedad 1. Si los 2 límites del intervalo son iguales, entonces el valor de la integral definida es cero.

Dem. $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$ L.C.D.D.

Propiedad 2. Si se intercambian los límites de la integral definida, su valor cambia de signo.

Dem. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$$= -\left(F(a) - F(b) \right)$$

$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$ L.C.D.D.

Propiedad 3. Si c es tal que $a < c < b$, entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dem. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \cancel{F(c)} - F(a) + F(b)$

$$- \cancel{F(c)} = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

L.C.D.D.

9.5 Area entre el eje x y la curva de f (x). Para relacionar la integral definida con el área entre el eje x y la curva de f (x), hemos considerado que f (x) es una función contínua que toma valores positivos para todo x en el intervalo $[a, b]$. Cuando este es el caso, resultó que el área limitada por la curva y el eje x en el intervalo $[a, b]$ es igual a la integral definida de a a b de f (x).

Supongamos ahora que f (x) es una función contínua en el intervalo $[a, b]$ que toma valores negativos para todo x en el intervalo, es decir, la curva de f (x) está bajo el eje de las x en el intervalo considerado. En este caso, la integral definida de a a b de f (x) es negativa porque cada uno de los términos de la suma de Riemann tiene la forma $(x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$, donde $(x_i - x_{i-1})$ siempre es positivo mientras que $f(r_i)$ es negativo para todo r_i en el intervalo $[a, b]$.

Entonces, la integral definida de a a b es igual al área entre el eje x y la curva de f (x), cuando la curva está sobre el eje x en el intervalo. Si la curva de f (x) está bajo el eje x en el intervalo, entonces la integral definida es igual a menos el área entre la curva y el eje x. De acuerdo con ésto, para determinar el área entre la curva de f (x) y el eje x, cuando la curva corta el eje x en el intervalo $[a, b]$, es necesario determinar los valores de x para los cuales la curva corta el eje x y dividir el intervalo en sub-intervalos que contengan como límites, los puntos donde la curva corta el eje x, es decir, los puntos donde f (x) = 0. La figura 9.6 ilustra las áreas que resultan positivas y negativas de la integral definida.

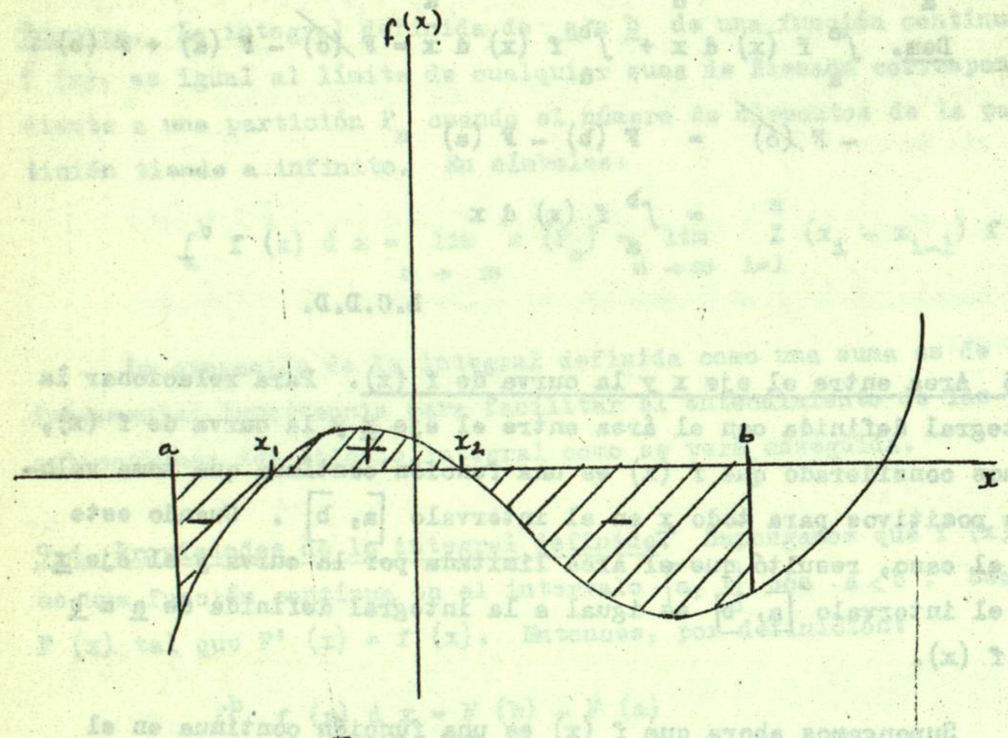

FIG. 9.7

De acuerdo con esta figura, para calcular el área entre la curva y el eje x en el intervalo $[a, b]$, descomponemos el intervalo en los sub-intervalos: $[a_1, x_1]$; $[x_1, x_2]$; $[x_2, b]$.

Entonces, el área anchurada es igual a:

$$A = -\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

Ejemplo 1. Encontrar el área entre el eje x y la curva de $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución. Grafiquemos la curva de f (x) en el intervalo de $x = 0$ a $x = 2$.

x	0	1	2
f(x)	3	1	5

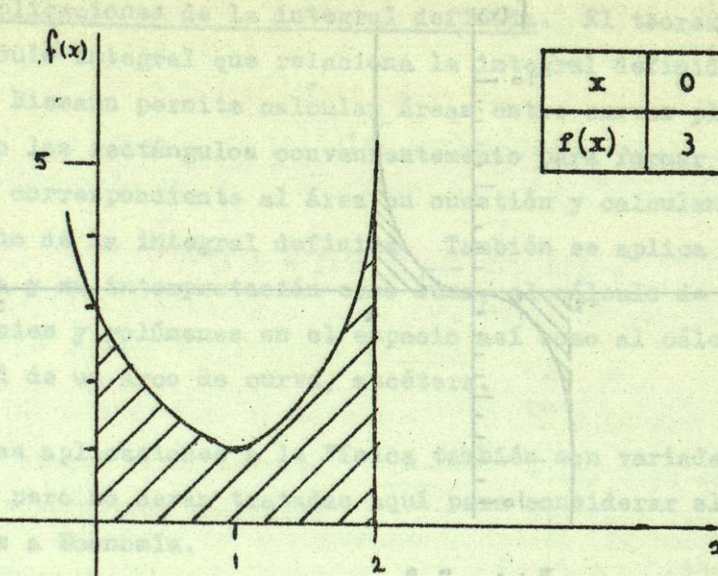

FIG. 9.8

La curva está totalmente sobre el eje x. Entonces el área buscada será:

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4}(16) - \frac{3}{2}(4) + 3(2) - 0$$

$$= 4 - \cancel{6} + \cancel{6} = \underline{\underline{4}}$$

Ejemplo 2. Encontrar el área entre el eje x y la curva de $f(x) = x^3$ en el intervalo de $x = -2$ a $x = 2$.

Solución. Tabulemos f (x) en el intervalo para graficar la curva:

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	-8	-1	0	1	8

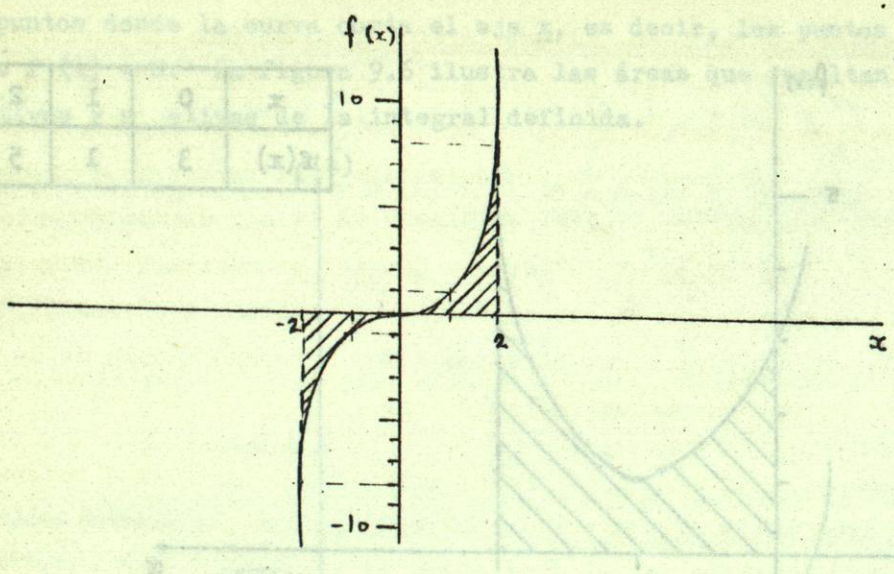

Fig. 9.9

En este caso, la curva corta el eje x en $x = 0$. Entonces calculamos las áreas bajo y sobre el eje x por separado:

Area bajo el eje $x = A_1 = -\int_{-2}^{0} x^3 \, dx$

$$A_1 = -\frac{1}{4} x^4 \Big|_{-2}^{0}$$

$$A_1 = -\frac{1}{4}(0) - \left(-\frac{1}{4}\right)(16)$$

$$A_1 = 4$$

Ahora:

Area sobre el eje $x = A_2 = \int_0^2 x^3 \, dx$

$$= \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4}(16) - \frac{1}{4}(0)$$

$$\therefore A_2 = 4$$

Entonces, el área buscada es: $A = A_1 + A_2$

$$= 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

Otras aplicaciones de la integral definida. El teorema fundamental del cálculo integral que relaciona la integral definida con una suma de Riemann permite calcular áreas entre curvas planas, seleccionando los rectángulos convenientemente para formar la suma de Riemann correspondiente al área en cuestión y calculando su valor por medio de la integral definida. También se aplica la integral definida y su interpretación como suma, al cálculo de áreas de superficies y volúmenes en el espacio así como al cálculo de la longitud de un arco de curva, etcétera.

Las aplicaciones a la Física también son variadas e interesantes, pero no serán tratadas aquí para considerar algunas aplicaciones a Economía.

9.6 Integrales impropios. En la definición del concepto de integral definida de a a b de $f(x)$, hemos exigido que $f(x)$ sea una función contínua en el intervalo $[a, b]$ y que el intervalo sea finito. Si alguna de estas condiciones no se cumple, entonces la integral recibe el nombre de integral impropia. Con la ayuda de límites, las integrales impropias se definen en algunos casos de manera que puedan ser interpretadas como integrales definidas. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Función discontínua en un número finito de puntos del intervalo $[a, b]$. Supongamos que $f(x)$ es discontínua para $x = a$ porque $f(a) = \infty$. En este caso se define la integral impropia como el límite de la integral definida de s a b de $f(x)$ cuando s tiende a a, siempre y cuando el límite exista. En símbolos:

$$\text{Si } f(a) = \infty \; ; \; \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{s \to a} \int_s^b f(x)\, dx$$

Si el límite indicado no existe, entonces la expresión no tiene sentido.

Ejemplo. Encontrar $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. En este caso, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$y \; f(1) = \frac{1}{0} = \infty. \text{ Entonces:}$$