Aplicando anti-logaritmos:

$$\frac{x}{x_o} = e^{k\,t}$$

$$\therefore\ x = x_o\, e^{kt}$$

<u>9.10 Modelo de Domar sobre la deuda pública.</u> Supongamos que el ingreso nacional de un país aumenta a una velocidad constante (relativa) y que la deuda pública aumenta una fracción constante del ingreso nacional. Para analizar el comportamiento de la deuda pública a través del tiempo, consideremos la siguiente notación:

Y_o = Ingreso nacional al principio de un período determinado.

Y_t = Ingreso nacional después de $\underline{t}$ años.

D_o = Deuda pública inicial.

D_t = Deuda pública, después de $\underline{t}$ años.

α = Fracción del ingreso nacional correspondiente a deuda pública.

r = Velocidad de aumento relativo del ingreso nacional.

El ingreso nacional después de $\underline{t}$ años es dado por:

$$Y_t = Y_o\, e^{rt}$$

Entonces, la deuda pública después de $\underline{t}$ años será:

$$D_t = D_o + \int_0^t \alpha\, Y_t\, d\,t$$

$$= D_o + \int_0^t \alpha\, Y_o\, e^{rt}\, d\,t$$

$$= D_o + \alpha Y_o \left[\frac{1}{r}\ e^{rt}\right]_0^t$$

$$D_t = D_o + \frac{\alpha Y_o}{r}\ (e^{rt} - 1)$$

Para comparar el valor de la deuda pública acumulada después de $\underline{t}$ años, con el ingreso nacional después de $\underline{t}$ años, consideremos la razón entre D_t y Y_t:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{D_o}{Y_t} + \frac{\alpha Y_o}{r\, Y_t}\ (e^{rt} - 1)$$

Sustituyendo: $Y_t = Y_o\, e^{rt}$

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{D_o}{Y_o\, e^{rt}} + \frac{\alpha \cancel{Y_o}\ (e^{rt} - 1)}{r\, \cancel{Y_o}\, e^{rt}}$$

Ahora, cuando $\underline{t}$ tiende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{D_t}{Y_t} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{D_o}{Y_o\, e^{rt}}\right) + \frac{\alpha}{r} \lim_{t \to \infty} (1 - e^{-rt})$$

$$= 0 + \frac{\alpha}{r}$$

$$= \frac{\alpha}{r}$$

Es decir, el cociente de la deuda pública entre el ingreso nacional, cuando $\underline{t}$ tiende a infinito, depende del valor de la fracción del ingreso nacional que aumenta la deuda pública y de la velocidad de aumento del ingreso nacional $\underline{r}$.

<u>Ejercicio 33</u>.

<u>Tema</u>: Integral definida. Interpretación geométrica.

1. Encontrar el valor de las siguientes integrales definidas:

1.1 $\int_1^3 (x^2 - 3x + 10)\, dx$ 1.2 $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

1.3 $\int_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt{4x}}$ 1.4 $\int_0^4 (x^2 - 4)^2\, d\,x$

1.5 $\int_0^1 e^x\, d\,x$ 1.6 $\int_0^1 \frac{d\,x}{e^{2x}}$

1.7 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9 - x}}$ *1.8 $\int_1^4 \frac{2x\, d\,x}{X^2 - 8}$

1.9 $\int_{2}^{9} (x-1)^{1/3}\, d\, x$ 1.10 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2\, d\, x}{x+2}$

1.11 $\int_{-2}^{1} \frac{x^2\, d\, x}{x+3}$ 1.12 $\int_{-3}^{-1} (x+2)\, d\, x$

2. Aplicando la definición, demostrar las siguientes igualdades:

2.1 $\int_{a}^{a} f(x)\, d\, x = 0$

2.2 $\int_{a}^{b} f(x)\, d\, x = -\int_{b}^{a} f(x)\, d\, x$

2.3 $\int_{a}^{b} f(x)\, d\, x = \int_{a}^{c} f(x)\, d\, x + \int_{c}^{b} f(x)\, d\, x$

3. Evaluar las siguientes integrales definidas. Graficar e interpretar geométricamente el valor de la integral definida:

3.1 $\int_{1}^{3} (-x+3)\, d\, x$ 3.2 $\int_{0}^{2} (x+1)\, d\, x$

3.3 $\int_{1}^{4} x^2\, d\, x$ 3.4 $\int_{-2}^{-1} e^{2x}\, d\, x$

3.5 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x-2}$ 3.6 $\int_{1}^{e} \ln x\, d\, x$

Ejercicio 34.

Tema: Sumas de Riemann. Areas.

1. Calcular las sumas superior e inferior de $f(x) = 2x - 1$ correspondientes a una partición uniforme del intervalo $[0.5, 3]$ con una longitud de los sub-intervalos de 0.5, (base de los rectángulos). Graficar y comparar los valores de las sumas superior e inferior con el área entre la curva de $f(x)$ y el eje x calculada por geometría.

2. Encontrar las sumas superior e inferior de $f(x) = x^2 - x + 1$ correspondientes a una partición uniforme del intervalo $[0, 2]$ con una longitud de los sub-intervalos de 0.5. Graficar cada una de las sumas. Calcular el área bajo la curva de $f(x)$ como la integral definida de 0 a 2 de $f(x)$ y compararla con las sumas encontradas.

3. Verificar que el área bajo la curva de $f(x) = 5$ de $x = 1$ a $x = 4$ es igual a las sumas superior e inferior de la función correspondiente a una partición uniforme del intervalo con longitud de sub-intervalos igual a uno.

4. Demostrar que si $f(x) = C$, entonces la suma general de Riemann correspondiente a una partición cualquiera $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n = b\}$ es igual al área entre la curva de $f(x)$ y el eje x en el intervalo de $x = a$ a $x = b$. $(c > 0)$.

5. Encontrar el área entre la curva de la siguiente función y el eje x en el intervalo indicado. Graficar:

5.1 $f(x) = x^3 - x + 1$ de $x = 1$ a $x = 3$

5.2 $f(x) = x^2 + 4$ de $x = 0$ a $x = 3$

5.3 $f(x) = 1 - x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$

5.4 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ de $x = -3$ a $x = 5$

5.5 $f(x) = e^x$ de $x = 0$ a $x = 2$

5.6 $f(x) = x^3$ de $x = -2$ a $x = 2$

5.7 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ de $x = 0$ a $x = e - 1$

5.8 $f(x)(x+6)^{1/2}$ de $x = -5$ a $x = 3$

6. Encontrar el área entre la curva de la siguiente ecuación y el eje y en el intervalo indicado. Graficar.

6.1 $y = 9 - x^2$ de $y = 0$ a $y = 5$

6.2 $x = y^2 + 2x - 35$ de $y = 3$ a $y = 6$

6.3 $x = y - 4$ de $y = 2$ a $y = 5$

Ejercicio 35.

Tema: Integrales impropios. Interpretación geométrica.

1. Determinar si los siguientes integrales impropios existen y cuando este sea el caso, encontrar su valor. Graficar e interpretar geométricamente el resultado:

1.1 $\int_1^3 \frac{d\,x}{x-1}$ 1.2 $\int_0^3 \frac{2x\,d\,x}{\sqrt{x^2-9}}$

1.3 $\int_0^1 \ln x\,d\,x$ 1.4 $\int_0^1 \frac{d\,x}{x^2}$

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{d\,x}{x^3}$ 1.6 $\int_0^2 \frac{2x\,d\,x}{x^2-4}$

1.7 $\int_0^{\infty} e^x\,d\,x$ 1.8 $\int_{-\infty}^0 e^x\,d\,x$

1.9 $\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,d\,x$ 1.10 $\int_0^{\infty} (x+4)^{1/2}\,d\,x$

1.11 $\int_{-1}^1 \frac{d\,x}{x^2-1}$ 1.12 $\int_0^2 \frac{(x^2+1)\,dx}{x}$

1.13 $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,d\,x$ 1.14 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,x}{x^2}$

2. Demostrar que $\int_0^3 \frac{d\,x}{(x-1)^2}$ no existe y comprobar que si se evalúa la integral definida sin tomar en cuenta el punto de discontinuidad en $x = 1$, entonces se obtiene un resultado absurdo. Graficar.

3. Demostrar que $\int_1^{\infty} \ln x\,d\,x$ no existe. Graficar e interpretar el resultado geométricamente.

Ejercicio 36.

Tema: Aplicaciones del cálculo integral a economía.

1. Supongamos que en la producción de cierto artículo, el ingreso marginal I_{mg} está dado por la siguiente ley:

$$I_{mg} = \frac{1000}{(x+4)^2} - 15$$

a) Encontrar la función del ingreso total I_t, suponiendo que $I_t = 0$ cuando $x = 0$. Graficar.

b) Encontrar la ley de demanda correspondiente.

c) Graficar el ingreso medio y el ingreso marginal en el mismo sistema de coordenadas, achurando las áreas correspondientes al ingreso total obtenido de cada una de las curvas, para un nivel dado de demanda.

2. Supongamos que en la producción de cierto artículo, el costo marginal C_{mg} está dado por la siguiente ley:

$$C_{mg} = 2x + 13$$

a) Encontrar el costo total y el costo medio suponiendo que el costo total es cero cuando $x = 0$.

b) Graficar los costos medio y marginal en el mismo sistema de coordenadas y verificar que el área entre la curva del costo marginal y el eje x, de $x = 0$ a $x = 3.5$, es igual a 3.5 por el costo medio para $x = 3.5$.

3. Un capital de $100,000 produce un interés compuesto anualmente de 10%.

a) Encontrar una fórmula para determinar el capital acumulado y encontrar su valor cuando $t = 10$ años.

b) Supongamos que se desea aplicar el interés mensualmente de manera que el efecto sobre el capital sea el mismo que el que produce la tasa efectiva de interés anual del 10%. Encontrar la tasa nominal de interés anual y determinar una fórmula para el capital acumulado después de t años. Encontrar el capital acumulado para $t = 10$ años y verificar con el resultado del inciso (a).

c) Encontrar la fuerza de interés y determinar una función continua del tiempo t para el capital acumulado. Encontrar el capital acumulado para $t = 10$ años y verificar con los resultados anteriores.

Nota: Se pueden utilizar logaritmos para los cálculos numéricos.

4. Supongamos que el ingreso nacional de un país al principio de un período determinado es $Y_o = 100$ millones de pesos. La deuda pública D aumenta anualmente $\frac{1}{10}$ del ingreso nacional Y_t. Si la velocidad de

aumento relativo del ingreso nacional es constante e igual a 0.20, encontrar una fórmula para calcular la deuda pública después de t años. Verificar que la razón entre Y_t y D_t tiende a $\frac{1}{2}$ cuando t tiende a infinito.

CAPITULO 10

SERIES

10.1 Secuencias. Al iniciar el estudio del cálculo infinitesimal, se definió el concepto de secuencia como una función discreta de una variable cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Definamos ahora el concepto de secuencia de la siguiente manera:

Def. Una secuencia es una sucesión de números, ordenados de acuerdo con una ley determinada.

A los números que forman una secuencia se les llama términos de la secuencia. Las secuencias pueden ser finitas o infinitas de acuerdo con que el número de términos sea finito o infinito. Por ejemplo: a) 1, 3, 5, ..., 15 es una secuencia finita que corresponde a una progresión aritmética de 8 términos.

b) $x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots$ es una secuencia infinita en la que el término número n es igual a $\frac{x^n}{n!}$ donde $n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots(2)(1)$. Cuando una secuencia es infinita, puede representarse por el enésimo término, que proporciona