aumento relativo del ingreso nacional es constante e igual a 0.20, encontrar una fórmula para calcular la deuda pública después de t años. Verificar que la razón entre Y_t y D_t tiende a $\frac{1}{2}$ cuando t tiende a infinito.

CAPITULO 10

SERIES

10.1 Secuencias. Al iniciar el estudio del cálculo infinitesimal, se definió el concepto de secuencia como una función discreta de una variable cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Definamos ahora el concepto de secuencia de la siguiente manera:

Def. Una secuencia es una sucesión de números, ordenados de acuerdo con una ley determinada.

A los números que forman una secuencia se les llama términos de la secuencia. Las secuencias pueden ser finitas o infinitas de acuerdo con que el número de términos sea finito o infinito. Por ejemplo: a) 1, 3, 5, ..., 15 es una secuencia finita que corresponde a una progresión aritmética de 8 términos.

b) $x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots$ es una secuencia infinita en la que el término número n es igual a $\frac{x^n}{n!}$ donde $n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots(2)(1)$. Cuando una secuencia es infinita, puede representarse por el enésimo término, que proporciona la ley de formación de los términos de la secuencia. En nuestro ejemplo:

$$\left\{\frac{x^n}{n!}\right\} = x,\ \frac{x^2}{2!},\ \frac{x^3}{3!},\ \ldots\ldots,\ \frac{x^n}{n!},\ \ldots\ldots$$

En álgebra se han estudiado algunas secuencias finitas interesantes, como son las progresiones. Ahora dedicaremos especial atención a las secuencias infinitas que representaremos por la siguiente expresión general:

$$\{u_n\} = u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots$$

<u>Clasificación</u>. Tomando en cuenta la relación entre sus términos, las secuencias se clasifican de la siguiente manera:

a) <u>Secuencia monótona creciente</u>, cuando cada término es mayor que el anterior.

b) <u>Secuencia monótona decreciente</u>, cuando cada término es menor que el anterior.

En símbolos, la secuencia $\{u_n\}$ es <u>monótona creciente</u> si $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots\ldots\ldots < u_n < \ldots\ldots\ldots$

La secuencia es <u>monótona decreciente</u> si $u_1 > u_2 > \ldots\ldots > u_n > \ldots\ldots$

<u>Ejemplos</u>: a) $\{2^n\} = 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots\ldots$
$= 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ldots$ es monótona creciente.

b) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ldots\ldots$ es monótona decreciente.

De acuerdo con el límite del enésimo término cuando n tiende a infinito, las secuencias se clasifican de la siguiente manera: <u>Secuencia convergente</u>. Una secuencia infinita es convergente si el enésimo término tiende a un número finito cuando n tiende a infinito.

En símbolos: $\{u_n\}$ es convergente si:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = A \text{ (finito)}$$

<u>Secuencia divergente</u>. Una secuencia es divergente si sus términos no tienen un límite definido cuando n tiende a infinito. En otras palabras, una secuencia es divergente si no es convergente. Nótese que una secuencia puede ser divergente porque su enésimo término tienda a infinito o menos infinito cuando n tiende a infinito o porque no exista un límite determinado de acuerdo con la ley de formación de los términos.
Consideremos algunos ejemplos:

1. La secuencia: $\{n^2\} = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$ es divergente porque
$$\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$$

2. La secuencia $\{(-1)^n\} = -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots\ldots$ es divergente porque $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ no existe. En este caso los términos toman los valores alternados $\underline{1}$ y $\underline{-1}$ sin tender a un límite definido.

3. La secuencia $\left\{2 + \frac{1}{3n}\right\} = \frac{7}{3},\ \frac{13}{6},\ \frac{19}{9},\ \ldots\ldots$ es convergente porque: $\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{3n}\right) = 2$

Definamos ahora el concepto de serie.

<u>10.2 Series</u>. Una serie es la suma indicada de los términos de una secuencia. En símbolos, la expresión general de una serie es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n$$

Una serie puede ser finita o infinita de acuerdo con que el número de términos sea finito o infinito. Por ejemplo:

1. La serie $\sum_{k=0}^{4} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$ es finita y corresponde a la suma de una progresión geométrica de 5 términos.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots$ es una serie infinita.

Dedicaremos especial atención a las series infinitas que son las que resultan interesantes según se verá después. Para definir los conceptos fundamentales de convergencia y divergencia de una serie infinita, es conveniente establecer primeramente el concepto de <u>suma parcial</u>. Consideremos la expresión general de una serie infinita:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

Ahora, las sumas parciales se definen de la siguiente manera:

Primera suma parcial $= S_1 = u_1$.

Segunda suma parcial $= S_2 = u_1 + u_2$.

Tercera suma parcial $= S_3 = u_1 + u_2 + u_3$.

$\vdots$

Enésima suma parcial $= S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$.

$\vdots$

De acuerdo con éstas definiciones, el número de sumas parciales de una serie infinita, es infinito y la ley de formación de las sumas parciales está dada por:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$$

Consideremos ahora la secuencia de sumas parciales para definir la convergencia y divergencia de una serie:

$$\left\{S_n\right\} = S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ldots\ S_n\ ,\ \ldots\ldots\ldots$$

<u>Def.</u> Una serie es convergente si la secuencia de sus sumas parciales es convergente. Una serie es divergente si la secuencia de sus sumas parciales es divergente.

<u>Ejemplo.</u> Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n + \ldots\ldots$$

<u>Solución:</u>

Sumas parciales:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2 = 3$

$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\vdots$

$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\vdots$

La ley de formación $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es la suma de los primeros <u>n</u> enteros positivos y se obtiene de la suma de una progresión aritmética o se demuestra por inducción en álgebra.

Entonces, la secuencia de sumas parciales es la siguiente:

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \ldots\ldots,\ \frac{n(n+1)}{2}\ ,\ \ldots\ldots$$

Ahora:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$. Entonces la secuencia de sumas parciales es divergente y por lo tanto la serie considerada es <u>divergente</u>.

Observación. Para determinar a partir de la definición, si una serie infinita es convergente o divergente, es necesario encontrar la ley de formación de la secuencia de sumas parciales. En el ejemplo que acabamos de considerar, obtuvimos la ley de formación de la secuencia de sumas parciales, porque se trataba de la suma de los términos de una progresión aritmética para la cual se tiene una fórmula algebraica. Sin embargo, con excepción de algunos casos particulares como el de nuestro ejemplo, no es posible establecer la ley de formación de la secuencia de sumas parciales para determinar si la serie es convergente o divergente, a partir de la definición. Entonces, es necesario deducir pruebas indirectas y criterios especiales para determinar si una serie es convergente o divergente.

10.3 La serie geométrica. Antes de discutir métodos indirectos para la determinación de la convergencia o divergencia deuna serie, consideremos el caso particular de la serie geométrica, que es de especial importancia en el estudio de series y en teoría económica.

Al estudiar progresiones en álgebra, se definió la progresión geométrica como una sucesión de números tales que cada término, después del primero, se encuentra multiplicando al anterior por una cantidad constante llamada razón. En símbolos, si llamamos a al primer término y r a la razón, entonces la forma general de la progresión geométrica es la siguiente secuencia:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots\ldots,\ a\,r^{n-1}$$

Consideremos la serie infinita asociada a una progresión geométrica infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots\ldots$$

La enésima suma parcial es:

$$S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots\ldots + a\,r^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando por r ambos lados de la ecuación (1):

$$r\,S_n = a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots\ldots\ldots + a\,r^{n-1} + a\,r^n \qquad (2)$$

Ahora, restando (2) de (1), se tiene:

$$S_n - r\,S_n = a - a\,r^n$$

$$S_n\,(1 - r) = a - a\,r^n\,.$$

$$\therefore\ S_n = \frac{a - a\,r^n}{1 - r} \qquad (3)$$

Hemos obtenido una fórmula para la enésima suma parcial de la serie geométrica general. Es decir, la fórmula (3) es la ley de formación de la secuencia de sumas parciales. Entonces, de acuerdo con la definición, la serie geométrica será convergente cuando el límite de S_n cuando n tienda a infinito, sea un número finito.

Ahora:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

En esta expresión a y r permanecen constantes en cada caso particular, mientras que n varía tendiendo a infinito. Entonces, aplicando los teoremas de límites:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a - a\lim\limits_{n\to\infty} r^n}{1 - r}$$

Ahora, cuando $r > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ y cuando $r < -1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ no existe. En estos casos la serie es divergente. Si r es un número entre 1 y -1, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ y por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1 - r}$ (finito). Es decir, la serie geométrica converge cuando r es una fracción propia positiva o negativa.

Ejemplo. La serie geométrica: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10\,(1/2)^{n-1} = 10 + 5 + \frac{5}{2} + \ldots.$ es convergente porque la razón es $r = 1/2 < 1$. En este ejemplo el límite de S_n cuando n tiende a infinito es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1 - 1/2} = \frac{10}{1/2} = 20$$

Se dice que la serie converge a 20 porque la suma que constituye la serie, llamada también el valor de la serie puede acercarse a 20 todo lo que uno quiera tomando un número de término suficientemente grande.

Aplicaciones de la serie geométrica. Las series geométricas son útiles en el método de comparación para determinar convergencia o divergencia de una serie. Este método lo veremos más adelante. Consideremos ahora dos aplicaciones interesantes de la serie geométrica.

10.4 Decimales periódicos infinitos.

Cuando un número decimal infinito es tal que, a partir de cierta cifra, se repite indefinidamente un grupo determinado de cifras, entonces se le llama decimal periódico infinito. Todos los decimales periódicos infinitos provienen de una fracción formada por el cociente de 2 enteros. Para encontrar la fracción de que proviene un decimal periódico infinito, se descompone en una serie con el primer término conteniendo a la parte no periódica del número y los demás conteniendo cada uno, un grupo de las cifras que se repiten.

Ejemplo 1. Encontrar la fracción de que proviene el número 0.252525.....

Solución. En este caso la periodicidad empieza desde la primera cifra y el grupo que se repite es el 25. Entonces:

$$0.252525\ldots\ldots = 0.25 + 0.0025 + 0.000025 + \ldots\ldots$$

La serie geométrica infinita que resulta, tiene como primer término $a = 0.25$ y la razón es $r = 0.01$. Como la razón es menor que uno, la serie es convergente y su valor es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.25}{1 - 0.01} = \frac{0.25}{0.99} = \frac{25}{99}$$

Este resultado es correcto y puede comprobarse haciendo la división: $\frac{25}{99} = 0.252525\ldots$

Ejemplo 2. Encontrar la fracción de que proviene el número:

$$1.4270270270\ldots\ldots\ldots$$

Solución. El grupo de cifras que se repiten es 270. Entonces descomponemos el número de la siguiente manera:

$$1.4270270270\ldots\ldots = 1.4 + 0.0270 + 0.0000270 + 0.000000270 + \ldots\ldots$$

A partir del segundo sumando tenemos una serie geométrica donde $a = 0.0270$ y $r = 0.001$. Esta serie es convergente porque $r < 1$ y su valor es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.270}{1 - 0.001} = \frac{0.0270}{0.999}$$

$$= \frac{27}{999} = \frac{1}{37}$$

Entonces:

$$1.4270270270\ldots\ldots = 1.4 + \frac{1}{37} = \frac{51.8 + 1}{37} = \frac{52.8}{37}$$

$$= \frac{528}{370} = \frac{264}{185}$$

10.5 El multiplicador.

Si una persona dispone de un ingreso determinado y recibe un ingreso extra, entonces gasta una parte de ese nuevo ingreso. La fracción del ingreso extra que una persona gasta, recibe el nombre de propensión marginal al consumo, mientras que la fracción del nuevo ingreso, que la persona ahorra, recibe el nombre de propensión marginal al ahorro. Consideremos el modelo simple de Keynes con la siguiente notación:

Y_0 = Ingreso inicial ; C = consumo ; S = ahorro.

Entonces: $Y_0 = C + S$

Ahora, si se llama ΔY a un aumento del ingreso y α a la fracción de ΔY que se gasta, se tiene:

$$Y_0 + \Delta Y = (C + \alpha \Delta Y) + [S + (1 - \alpha) \Delta Y]$$

Entonces, de acuerdo con las definiciones: