$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1 - 1/2} = \frac{10}{1/2} = 20$$

Se dice que la serie converge a 20 porque la suma que constituye la serie, llamada también el *valor de la serie* puede acercarse a 20 todo lo que uno quiera tomando un número de término suficientemente grande.

Aplicaciones de la serie geométrica. Las series geométricas son útiles en el método de comparación para determinar convergencia o divergencia de una serie. Este método lo veremos más adelante. Consideremos ahora dos aplicaciones interesantes de la serie geométrica.

10.4 Decimales periódicos infinitos. Cuando un número decimal infinito es tal que, a partir de cierta cifra, se repite indefinidamente un grupo determinado de cifras, entonces se le llama decimal periódico infinito. Todos los decimales periódicos infinitos provienen de una fracción formada por el cociente de 2 enteros. Para encontrar la fracción de que proviene un decimal periódico infinito, se descompone en una serie con el primer término conteniendo a la parte no periódica del número y los demás conteniendo cada uno, un grupo de las cifras que se repiten.

Ejemplo 1. Encontrar la fracción de que proviene el número 0.252525.....

Solución. En este caso la periodicidad empieza desde la primera cifra y el grupo que se repite es el 25. Entonces:

$$0.252525\ldots\ldots = 0.25 + 0.0025 + 0.000025 + \ldots\ldots$$

La serie geométrica infinita que resulta, tiene como primer término $a = 0.25$ y la razón es $r = 0.01$. Como la razón es menor que uno, la serie es convergente y su valor es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.25}{1 - 0.01} = \frac{0.25}{0.99} = \frac{25}{99}$$

Este resultado es correcto y puede comprobarse haciendo la división: $\frac{25}{99} = 0.252525\ldots$

Ejemplo 2. Encontrar la fracción de que proviene el número:

1.4270270270 ....

Solución. El grupo de cifras que se repiten es 270. Entonces descomponemos el número de la siguiente manera:

$$1.4270270270\ldots\ldots = 1.4 + 0.0270 + 0.0000270 + 0.000000270 + \ldots\ldots$$

A partir del segundo sumando tenemos una serie geométrica donde $a = 0.0270$ y $r = 0.001$. Esta serie es convergente porque $r < 1$ y su valor es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.270}{1 - 0.001} = \frac{0.0270}{0.999}$$

$$= \frac{27}{999} = \frac{1}{37}$$

Entonces:

$$1.4270270270\ \ldots\ldots = 1.4 + \frac{1}{37} = \frac{51.8 + 1}{37} = \frac{52.8}{37}$$

$$= \frac{528}{370} = \frac{264}{185}$$

10.5 El multiplicador. Si una persona dispone de un ingreso determinado y recibe un ingreso extra, entonces gasta una parte de ese nuevo ingreso. La fracción del ingreso extra que una persona gasta, recibe el nombre de *propensión marginal al consumo*, mientras que la fracción del nuevo ingreso, que la persona ahorra, recibe el nombre de *propensión marginal al ahorro*. Consideremos el modelo simple de Keynes con la siguiente notación:

Y_o = Ingreso inicial ; C = consumo ; S = ahorro.

Entonces: $Y_o = C + S$

Ahora, si se llama ΔY a un aumento del ingreso y α a la fracción de ΔY que se gasta, se tiene:

$$Y_o + \Delta Y = (C + \alpha \Delta Y) + \left[S + (1 - \alpha)\Delta Y\right]$$

Entonces, de acuerdo con las definiciones:

Propensión marginal al consumo $= \alpha$

Propensión marginal al ahorro $= 1 -$

La propensión marginal al consumo es, en general, diferente para cada persona. Sin embargo, si se supone que el consumo de una persona depende únicamente del nivel de su ingreso sin tomar en cuenta los factores que lo rodean, como el ingreso de los vecinos, etc., entonces puede considerarse que todos los habitantes de un país tienen la misma propensión marginal al consumo. Supongamos que el ingreso nacional de un país es Y_o en un instante dado y el gobierno invierte una nueva cantidad I, utilizando recursos inactivos. Si la propensión marginal al consumo "nacional" es α, entonces las personas que reciben el dinero I, gastarán una cantidad αI. Ahora, las personas que reciban esta cantidad αI, gastarán $\alpha(\alpha I) = \alpha^2 I$ y así sucesivamente se gastarán cantidades $\alpha I, \alpha^2 I, \alpha^3 I, \alpha^4 I, \ldots$ Cada uno de estos gastos sucesivos es una contribución al ingreso nacional, de manera que la inversión I contribuye en total una cantidad I_t dada por la siguiente expresión:

$$I_t = I + \alpha I + \alpha^2 I + \alpha^3 I + \ldots\ldots$$

$$= I\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots\ldots)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\right) I$$

La expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots\ldots$ es una serie geométrica donde el primer término es $a = 1$ y la razón $r = \alpha$.

Hemos demostrado que las series geométricas convergen cuando la razón está entre cero y uno. Ahora, en este caso, la razón es igual a la propensión marginal al consumo α que normalmente es un número entre cero y uno. Es decir, la serie converge para $0 < \alpha < 1$ y su valor es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Entonces, cuando la propensión marginal al consumo α es una fracción propia, lo cual sucede generalmente, la inversión inicial sigue un proceso de expansión, porque resulta multiplicada por una cantidad $\frac{1}{1-\alpha}$, que recibe el nombre de "El multiplicador" y normalmente es mayor que uno.

Ejemplo. Si la propensión marginal al consumo es $\alpha = 0.68$, entonces el multiplicador M será:

$$M = \frac{1}{1 - 0.68} = \frac{1}{0.32} = 3.125$$

Entonces, si se invierten \$1000, el proceso de expansión los convierte en \$3,125. Nótese que entre mas pequeña sea la propensión marginal al ahorro $1 - \alpha$, el multiplicador será más grande porque es igual precisamente a la inversa de la propensión marginal al ahorro.

Evaluación de límites. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie, generalmente es necesario evaluar límites de funciones de una variable. La evaluación de límites se dificulta frecuentemente cuando aparecen formas indeterminadas, que no puedan ser eliminadas por las reglas particulares establecidas al estudiar límites. Ahora daremos sin demostración, una regla de gran utilidad para la eliminación de formas indeterminadas.

10.6 Regla de L'Hospital. Supongamos que para $x = a$, finito o infinito, $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ siempre que este límite exista.

La regla de L'Hospital puede aplicarse a una gran variedad de formas indeterminadas, como $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, etc., las cuales peuden ser transformadas en alguna de las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Consideremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Evaluar: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$

Solución. Aplicando los teoremas de límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

Ahora, aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ejemplo 2. Evaluar: $\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x^3}$

Solución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x^3} = \frac{2 \ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2/x}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{3x^3} = \frac{2}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

Ejemplo 3. Evaluar: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$

Solución.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \text{ (Indeterminado)}$$

Esta forma indeterminada se transforma en la forma $\frac{0}{0}$ de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\ln x} = \frac{0}{0}$$

Ahora, aplicando la regla de L' Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{1/x} = \lim_{x \to 1} (-x) = \underline{\underline{-1}}$$

Métodos indirectos para determinar la convergencia o divergencia de una serie. Cuando no es posible obtener la ley de formación de la

secuencia de sumas parciales, es necesario determinar la convergencia o divergencia de una serie a partir de la ley de formación de los términos de la serie. Consideremos primeramente el siguiente teorema, que nos proporciona un criterio general de divergencia.

Teorema. Si la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es convergente, entonces

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Demostración. Por hipótesis la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots \text{ es con-}$$

vergente. Entonces, de acuerdo con la definición de convergencia:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = A \text{ (finito)}$$

Ahora, consideremos las sumas parciales:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

Restando S_{n-1} de S_n, se obtiene:

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Aplicando límites cuando $\underline{n}$ tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1}$$

Ahora, las secuencias de sumas parciales S_n y S_{n-1} tienden al mismo límite $\underline{A}$ cuando $\underline{n}$ tiende a infinito porque S_{n-1} toma los mismos valores que S_n desplazados un lugar hacia atrás. Esto se deduce de la siguiente tabla:

n	1	2	3	....	$n-1$	n	.... $\to \infty$
S_n	u_1	$u_1 + u_2$	$u_1+u_2+u_3$	....	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	$\sum_{k=1}^{n} u_k$	.... $\to A$
S_{n-1}	-	u_1	$u_1 + u_2$	....	$\sum_{k=1}^{n-2} u_k$	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	.... $\to A$

Entonces, $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = A$ y por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = A - A = 0$$

L.C.D.D.

Este teorema establece una condición necesaria para convergencia, es decir, si el enésimo término u_n no tiende a cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito, entonces la serie es divergente. Sin embargo, esta condición no es suficiente para decidir que la serie es convergente porque si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, la serie puede ser divergente, como en el caso de la serie armónica que veremos después. Lo importante del teorema es que nos proporciona el siguiente:

<u>10.7 Criterio de divergencia</u>. Si el límite del enésimo término de una serie, es diferente de cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito, entonces la serie es divergente. En símbolos:

$$\text{Si } \lim_{n \to \infty} u_k \neq 0, \text{ entonces } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ es divergente.}$$

<u>Ejemplo 1</u>. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \text{.........}$$

<u>Solución</u>. El enésimo término es dado por la ley de formación:

$$u_n = \frac{n}{2n+1}$$

Aplicando límites cuando $\underline{n}$ tiende a ∞:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Por la regla de L'Hospital:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Entonces la serie es <u>divergente</u> porque el enésimo término no tiende a cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito.

<u>Principios fundamentales</u>. Las pruebas de convergencia y divergencia de series, que serán establecidas a continuación, se apoyan en los siguientes principios fundamentales:

1. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si se suprime un número finito de sus términos. Es decir, si:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \text{.......} + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \text{.....}$ es convergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = a_{N+1} + a_{N+2} + \text{.......}$ también es convergente, para cualquier $\underline{N}$ finito. De la misma manera, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ también es divergente, para cualquier $\underline{N}$ finito.

2. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si todos los términos de la serie se multiplican por un número finito $c \neq 0$.

Es decir, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ también