n	1	2	3	....	$n-1$	n	.... $\to \infty$
S_n	u_1	$u_1 + u_2$	$u_1+u_2+u_3$	....	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	$\sum_{k=1}^{n} u_k$	.... $\to A$
S_{n-1}	-	u_1	$u_1 + u_2$	....	$\sum_{k=1}^{n-2} u_k$	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	.... $\to A$

Entonces, $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = A$ y por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = A - A = 0$$

L.C.D.D.

Este teorema establece una condición necesaria para convergencia, es decir, si el enésimo término u_n no tiende a cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito, entonces la serie es divergente. Sin embargo, esta condición no es suficiente para decidir que la serie es convergente porque si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, la serie puede ser divergente, como en el caso de la serie armónica que veremos después. Lo importante del teorema es que nos proporciona el siguiente:

<u>10.7 Criterio de divergencia</u>. Si el límite del enésimo término de una serie, es diferente de cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito, entonces la serie es divergente. En símbolos:

$$\text{Si } \lim_{n \to \infty} u_k \neq 0, \text{ entonces } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ es divergente.}$$

<u>Ejemplo 1</u>. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \ldots\ldots\ldots$$

<u>Solución</u>. El enésimo término es dado por la ley de formación:

$$u_n = \frac{n}{2n+1}$$

Aplicando límites cuando $\underline{n}$ tiende a ∞:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Por la regla de L'Hospital:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Entonces la serie es <u>divergente</u> porque el enésimo término no tiende a cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito.

<u>Principios fundamentales</u>. Las pruebas de convergencia y divergencia de series, que serán establecidas a continuación, se apoyan en los siguientes principios fundamentales:

1. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si se suprime un número finito de sus términos. Es decir, si:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots\ldots$ es convergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots\ldots$ también es convergente, para cualquier $\underline{N}$ finito. De la misma manera, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ también es divergente, para cualquier $\underline{N}$ finito.

2. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si todos los términos de la serie se multiplican por un número finito $c \neq 0$.

Es decir, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ también es convergente, para cualquier c ≠ o finito. De la misma manera, si $\sum_{k=1}^{\infty}$ es divergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ también es divergente para cualquier c ≠ o.

(3.) Si una secuencia infinita $\{S_n\}$ es monótona creciente, pero todos sus términos son menores o iguales que un número finito <u>S</u>, entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \leqslant S$ y por lo tanto la secuencia es convergente. En símbolos, si $\{S_n\}$ es tal que $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$ .... y $S_k \leqslant S$ (finito para todo k = 1, 2, 3, ...), entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \leqslant S$.

(4.) Si una secuencia infinita $\{S_n\}$ es monótona decreciente, pero todos sus términos son mayores o iguales que un número B, entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \geqslant B$. En símbolos, si $\{S_n\}$ es tal que $S_1 > S_2 > S_3 > \ldots$....., y $S_k \geqslant B$ para todo k = 1, 2, 3 ....., entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \geqslant B$.

<u>Series de términos positivos</u>. Las series de términos positivos son series de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k > o$ para todo k = 1, 2, 3, ... Las pruebas más importantes para determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos, son las siguientes :

<u>10.8 I. Prueba de comparación</u>. La serie infinita de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, si cada uno de sus términos es menor o igual que el correspondiente término de una serie conocida como convergente. La serie será divergente, si cada uno de sus términos es mayor o igual que los correspondientes términos de una serie conocida como divergente.

<u>Demostración</u>.

a) Supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente y que la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es tal que $a_k \leqslant b_k$ para todo k = 1, 2, 3 ....

Entonces: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots. + b_n$

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge a B, entonces:

$b_1 + b_2 + \ldots.. + b_n < B$ y por lo tanto:

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n < B$ (finito).

Ahora, la secuencia de sumas parciales $\{S_n\}$ es monótona creciente porque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es de términos positivos. Además S_n es menor que el número finito B, para todo <u>n</u>. Entonces, $\lim_{n \to \infty} S_n \leqslant B$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. (Por el principio fundamental (3)).

b) Supongamos que la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente y que la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es tal que $a_k \geqslant b_k$ para todo k = 1, 2, 3, ... Entonces:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots.. + b_n = T_n$$

$$\therefore\ S_n \geqslant T_n$$

Ahora, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente y de términos positivos. Entonces $\lim_{n \to \infty} T_n = \infty$ y por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$.

(por el principio fundamental (4)).

Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Observación. De acuerdo con el principio fundamental (1), la comparación de las series puede hacerse eliminando cualquier número finito de términos. Entonces la prueba es igualmente válida si la comparación se hace a partir de cierto término a_N, para cualquier N finito.

Ejemplo: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots\ldots$$

Solución. Comparemos esta serie con la serie geométrica de razón $r = 1/2$, que es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots\ldots$$

Simplificando ambas series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$$

Los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ son menores que los correspondientes términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, a partir del tercer término. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad \text{es convergente.}$$

10.9 II. Prueba del Integral. (Cé Maclaurin. 1698-1746).

Sea $f(n) = a_n$, donde a_n es el enésimo término de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si $f(x)$ es una función posi-

tiva y decreciente para todo $\underline{x}$ mayor que un entero positivo $\underline{b}$, entonces:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si el integral impropio $\int_c^{\infty} f(x)\, d x$ es convergente, es decir, si es igual a un número finito A.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si el integral impropio $\int_c^{\infty} f(x)\, d x = \infty$.

Demostración. a) Consideremos la gráfica de una función que satisface las condiciones del teorema:

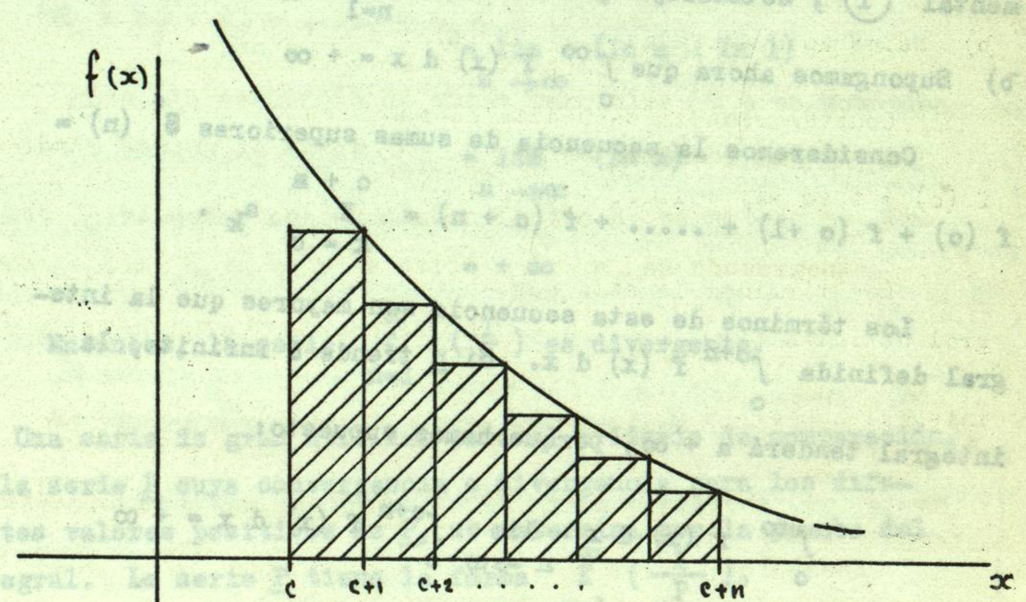

Fig. 10.1

Sea P_n la partición uniforme del intervalo $c \leqslant x \leqslant x + n$ con sub-intervalos de longitud uno, como indica la figura 10.1. El área anchurada es la suma inferior $S_*(n)$ de $f(x)$ correspondiente a P_n. Además $S_*(n) = f(c+1) + f(c+2) + \ldots\ldots + f(c+n) = \sum_{k=c+1}^{c+n} f(x) = \sum_{k=c+1}^{c+n} a_k$.