De acuerdo con los ejemplos, si $\lim_{n \to \infty} r_n = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente o divergente. Cuando este sea el caso, debe intentarse otra prueba. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie, se recomienda la siguiente:

__Regla práctica__. Si $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. Si el enésimo término tiende a cero cuando __n__ tiende a infinito, se aplica primeramente la prueba de la razón y si $\lim_{n \to \infty} r_n = 1$, entonces se intenta la prueba del integral o la prueba de comparación.

__Ejemplo__. Determinar si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1'000,000)^n} = \frac{1}{1'000,000} + \frac{(1)(2)}{(1'000,000)^2} + \frac{(1)(2)(3)}{(1'000,000)^3} + \ldots.$$

__Solución__. Apliquemos la prueba de la razón:

$$a_n = \frac{n!}{(1'000,000)^n} \; ; \; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(1'000,000)^{n+1}}$$

Entonces:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(1'000,000)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(1'000,000)^n}}$$

$$r_n = \frac{(n+1)!\,(1'000,000)^n}{n!\,(1'000,000)^{n+1}}$$

$$\therefore r_n = \frac{n+1}{1'000,000}$$

Ahora:

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{1'000,000} = \infty > 1$$

Entonces, la serie es divergente.

__10.11 Series de términos negativos__. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos negativos, se puede transformar a una serie de términos positivos, multiplicando por menos uno todos los términos.

Esto no altera la convergencia o divergencia, de acuerdo con el principio fundamental (2).

Entonces, se aplican las pruebas de convergencia o divergencia para series de términos positivos.

__Ejemplo__: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{6} - \ldots\ldots\ldots$$

__Solución__. Consideremos la serie de términos positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

Aplicando la prueba de la razón:

$$a_n = \frac{3}{2n} \; ; \; a_{n+1} = \frac{3}{2n+2}$$

$$\therefore r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3}{2n+2}}{\dfrac{3}{2n}} = \frac{6n}{6n+6}$$

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{6}{6 + \dfrac{6}{n}} = \frac{6}{6} = 1$$

Entonces, la prueba no sirve. Intentemos la prueba del integral:

$$f(n) = a_n = \frac{3}{2n}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{(positiva y decreciente para todo } x \geqslant 1\text{)}.$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{3}{2x}\,dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2} \ln x \Big|_1^n \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2} \ln n = \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n} \right)$ es divergente y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2n} \right)$ es divergente.

10.12 Series alternantes. Son las series de términos positivos y negativos de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \quad a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$$

donde $a_n > 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Para determinar la convergencia o divergencia de las series alternantes se tiene la siguiente prueba:

Prueba para series alternantes. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n > 0$, es convergente si: a) $a_{n+1} < a_n$ para todo n; b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Si no se cumple alguna de estas condiciones, la serie es divergente.

Demostración. Consideremos la secuencia de sumas parciales pares: $S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} a_n$. Esta suma parcial puede escribirse de la siguiente manera, agrupando los términos de 2 en 2:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

La secuencia $\left\{ S_{2m} \right\}$ es monótona creciente porque los términos de la suma que representa, son positivos. (Por hipótesis, $a_{n+1} < a_n$. Es decir, $a_n - a_{n+1} > 0$ para todo n).

Ahora, S_{2m} puede escribirse también de la siguiente manera:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots\ldots\ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

$$= a_1 - (\text{Suma de términos positivos}).$$

$$\therefore \quad S_{2m} < a_1$$

Entonces, la secuencia $\left\{ S_{2m} \right\}$ y por lo tanto, la secuencia $\left\{ S_n \right\}$ es convergente. (Principio fundamental 3). Entonces la secuencia alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente. La convergencia de la secuencia S_n se deduce de la convergencia de S_{2m} y del hecho de que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Ejemplo. Determinar si la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente o divergente.

Solución $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$

$$a_n = \frac{1}{n} \; ; \; \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ahora, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Comparando a_{n+1} con a_n, se tiene: $a_{n+1} < a_n$ para todo n porque:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}. \text{ Es decir: } n < n + 1.$$

Entonces, la serie es convergente.

Observación: La serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente, mientras que la serie armónica original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Cuando una serie alternante es convergente y la correspondiente serie de términos positivos también es convergente, entonces se dice que la serie alternante es <u>absolutamente convergente</u>.