$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2} \ln x \Big|_1^n \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2} \ln n = \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n} \right)$ es divergente y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2n} \right)$ es divergente.

10.12 Series alternantes. Son las series de términos positivos y negativos de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$$

donde $a_n > o$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Para determinar la convergencia o divergencia de las series alternantes se tiene la siguiente prueba:

Prueba para series alternantes. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n > o$, es convergente si: a) $a_{n+1} < a_n$ para todo n ; b) $\lim_{n \to \infty} a_n = o$. Si no se cumple alguna de estas condiciones, la serie es divergente.

Demostración. Consideremos la secuencia de sumas parciales pares: $S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} a_n$. Esta suma parcial puede escribirse de la siguiente manera, agrupando los términos de 2 en 2:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

La secuencia $\left\{ S_{2m} \right\}$ es monótona creciente porque los términos de la suma que representa, son positivos. (Por hipótesis, $a_{n+1} < a_n$. Es decir, $a_n - a_{n+1} > o$ para todo n).

Ahora, S_{2m} puede escribirse también de la siguiente manera:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots\ldots\ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

$$= a_1 - (\text{Suma de términos positivos}).$$

$$\therefore \ S_{2m} < a_1$$

Entonces, la secuencia $\left\{ S_{2m} \right\}$ y por lo tanto, la secuencia $\left\{ S_n \right\}$ es convergente. (Principio fundamental (3)). Entonces la secuencia alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente. La convergencia de la secuencia S_n se deduce de la convergencia de S_{2m} y del hecho de que $\lim_{n \to \infty} a_n = o$.

Ejemplo. Determinar si la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente o divergente.

Solución $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$

$$a_n = \frac{1}{n} \ ; \ \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = o$$

Ahora, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Comparando a_{n+1} con a_n, se tiene: $a_{n+1} < a_n$ para todo n porque:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} . \quad \text{Es decir:} \quad n < n + 1.$$

Entonces, la serie es convergente.

Observación: La serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente, mientras que la serie armónica original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Cuando una serie alternante es convergente y la correspondiente serie de términos positivos también es convergente, entonces se dice que la serie alternante es absolutamente convergente.

Cuando una serie alternante es convergente, pero la correspondiente serie de términos positivos es divergente, entonces se le llama condicionalmente convergente.

Para encontrar un valor aproximado de la suma de una serie alternante, se define el residuo R_n como la serie:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\ldots$$

(suponiendo n = par).

De acuerdo con su definición, R_n representa el error al considerar el valor de la serie como la suma de los primeros n términos. Se puede demostrar que el valor absoluto del error R_n es menor que el valor absoluto del término a_{n+1} de la serie. Entonces, al tomar n términos para un valor aproximado de la serie, se tiene una idea del error, observando el término a_{n+1}.

Ejemplo. Verificar que el error que se comete al aproximar la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ a 15 términos es menor que 0.0625.

Solución. El enésimo término es dado por: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Al aproximar a 15 términos, el error debe ser menor que el valor absoluto del término número 16. Ahora:

$$a_{16} = \frac{(-1)^{15}}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore \text{Error} = R_{15} < \left|-\frac{1}{16}\right| = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$\therefore R_{15} < 0.0625.$$

Nota. La prueba de la razón es válida para series alternantes. Esta prueba puede demostrarse de la misma manera, considerando a la razón en valor absoluto, con los siguientes resultados:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

10.13 Series de potencias. Una serie de potencias es una serie infinita de potencias de una variable x. La forma general de las series de potencias es la siguiente:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$, son constantes. Obsérvese que una serie de potencias puede considerarse como un polinomio de grado infinito. En particular, un polinomio de grado n puede considerarse como una serie de potencias en la que los coeficientes de las potencias de x son ceros a partir de a_{n+1}, es decir: $a_k = 0$ para k = (n+1), (n+2), ...

Intervalo de convergencia. Cualquier serie de potencias de la forma (1) es convergente para x = 0 porque en este caso, la suma o valor de la serie es igual al número finito a_0. Para determinar el conjunto de valores de x para los cuales, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente, se utiliza la prueba de la razón:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$$

$$b_n = a_n x^n$$