Cuando una serie alternante es convergente, pero la correspondiente serie de términos positivos es divergente, entonces se le llama <u>condicionalmente convergente</u>.

Para encontrar un valor aproximado de la suma de una serie alternante, se define el residuo R_n como la serie:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \quad a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\ldots$$

(suponiendo n = par).

De acuerdo con su definición, R_n representa el error al considerar el valor de la serie como la suma de los primeros n términos. Se puede demostrar que el valor absoluto del error R_n es menor que el valor absoluto del término a_{n+1} de la serie. Entonces, al tomar n términos para un valor aproximado de la serie, se tiene una idea del error, observando el término a_{n+1}.

Ejemplo. Verificar que el error que se comete al aproximar la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ a 15 términos es menor que 0.0625.

Solución. El enésimo término es dado por: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Al aproximar a 15 términos, el error debe ser menor que el valor absoluto del término número 16. Ahora:

$$a_{16} = \frac{(-1)^{15}}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore \text{Error} = R_{15} < \left| -\frac{1}{16} \right| = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$\therefore R_{15} < 0.0625.$$

Nota. La prueba de la razón es válida para series alternantes. Esta prueba puede demostrarse de la misma manera, considerando a la razón en valor absoluto, con los siguientes resultados:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

<u>10.13 Series de potencias</u>. Una serie de potencias es una serie infinita de potencias de una variable x. La forma general de las series de potencias es la siguiente:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$, son constantes. Obsérvese que una serie de potencias puede considerarse como un polinomio de grado infinito. En particular, un polinomio de grado n puede considerarse como una serie de potencias en la que los coeficientes de las potencias de x son ceros a partir de a_{n+1}, es decir: $a_k = 0$ para $k = (n+1), (n+2), \ldots\ldots\ldots$.

<u>Intervalo de convergencia</u>. Cualquier serie de potencias de la forma (1) es convergente para x = 0 porque en este caso, la suma o valor de la serie es igual al número finito a_0. Para determinar el conjunto de valores de x para los cuales, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente, se utiliza la prueba de la razón:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$$

$$b_n = a_n x^n$$

Entonces: $$|r_n| = \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\,x\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,|x|$$

Ahora: $$\lim_{n\to\infty}|r_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

(porque $|x|$ no depende de $\underline{n}$)

Sustituyendo $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}|r_n| = |x|\cdot\rho$$

Ahora, la serie será convergente cuando este límite sea menor que uno, de acuerdo con la prueba de la razón. Es decir:

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n \text{ es convergente si } |x|\,\rho < 1$$

$$\therefore |x| < \frac{1}{\rho} \quad (\text{porque } \rho > o).$$

La expresión encontrada determina una vecindad alrededor de $x = o$, de longitud $2\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Por esta razón, al conjunto de valores de $\underline{x}$ para los cuales, la serie es convergente, se le llama <u>intervalo de convergencia</u> de la serie y al número $\frac{1}{\rho}$ se le llama <u>radio de convergencia</u> de la serie. La siguiente gráfica ilustra el intervalo y radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$.

Desde luego, el intervalo y el radio de convergencia de cada serie de potencias de la forma (1) dependen de:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

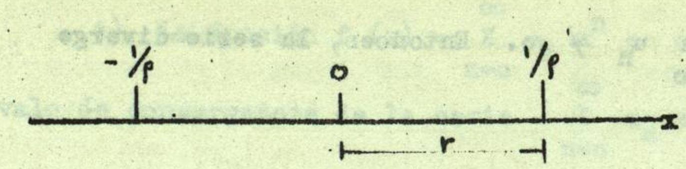


Fig. 10.2

Nota. Los extremos del intervalo de convergencia, cuando éste sea finito, deben investigarse por medio de otra prueba para convergencia o divergencia porque en esos puntos se tiene $\lim_{n\to\infty}|r_n| = 1$ y por lo tanto la prueba de la razón no es aplicable.

<u>Ejemplo</u>. Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

<u>Solución</u>.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Entonces, el radio de convergencia es:

$$r = \frac{1}{\rho} = 2 \quad \text{y la serie converge para todo } -2 < x < 2.$$

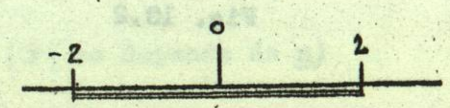
Ahora, investiguemos los extremos del intervalo:

$$\text{Para } x = -2: \quad \sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

$$\text{Para } x = 2: \quad \sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$$

En ambos casos $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$. Entonces, la serie diverge para $x = \pm 2$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ es convergente para todo x en el intervalo $[-2, 2]$ sin incluir los extremos.



Ejemplo 2. Determinar el intervalo de convergencia de la serie alternante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots$$

Solución:

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \; ; \; a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!\,(-1)^{n+1}}{(n+1)!\,(-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Entonces, el radio de convergencia es $r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0} = \infty$ y la serie es absolutamente convergente para todo x entre $-\infty$ y $+\infty$. Es decir, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ es convergente para todo número real x.

Propiedades fundamentales de las series de Potencias. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es considerada como una función de la variable x, entonces se demuestra que esta función se comporta de manera semejante a las funciones polinomiales finitas, dentro del intervalo de convergencia. Las siguientes propiedades fundamentales de las series de potencias serán establecidas sin demostración:

i) La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es continua en el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por esta razón, si una función continua puede expresarse como una serie de potencias, entonces se dice que la serie representa a la función en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. Sea $f(x) = \frac{2}{2-x}$. Esta función puede desarrollarse en serie de potencias haciendo la división:

$$f(x) = \frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \dots\dots\dots$$

Ahora, hemos encontrado que el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \dots\dots\dots$ es el intervalo $[-2, 2]$ sin incluir los extremos. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ representa a la función $f(x) = \frac{2}{2-x}$ para todo x entre -2 y 2. Obsérvese que el valor de la serie es igual al valor de la función para x en el intervalo de convergencia $[-2, 2]$.

ii) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la derivada de la función $f(x)$ es igual a la derivada, término a término, de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ en el intervalo de convergencia. Es decir: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ para todo x en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior teníamos $f(x) = \frac{2}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ para todo $-2 < x < 2$.

Entonces: $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$ para todo $-2 < x < 2$.

iii) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la integral de $f(x)\,dx$ es igual a la integral, término a término de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx$, en el intervalo de convergencia. Es decir:

$$\int_o^x f(x)\,dx = \int_o^x \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$ para

todo **x** en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior:

$$f(x) = \frac{2}{2-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \text{ para todo } -2 < x < 2.$$

Entonces:

$$\int_o^x f(x)\,dx = \int_o^x \frac{2\,dx}{2-x} = \int_c^x \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{2^n} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n}$$

Para todo **x** en el intervalo $[-2, 2]$.

Ahora: $\int_o^x \frac{2\,dx}{2-x} = -2\ln(2-x)\Big|_o^x$. Entonces:

$$-2\ln(2-x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} - 2\ln 2$$

$$\therefore \ln(2-x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} + 2\ln 2,$$ para todo **x**

entre **-2** y **2**. Hemos encontrado una fórmula para calcular los logaritmos naturales de los números entre cero y cuatro. La aproximación en cada caso, depende del número de términos que se tomen de la serie.

10.14 Desarrollo de funciones en series de potencias. Hemos establecido que si una serie de potencias se considera como una función de **x**, entonces podemos encontrar las derivadas de la función, derivando término a término la serie en el intervalo de convergente. Ahora, dada una función de **x**, se puede encontrar una serie de potencias que sea equivalente a la función para determinados valores de **x**. Consideremos primeramente el desarrollo de una función en serie de potencias de **x**.

Series de Maclaurin. El siguiente teorema se debe a Colin Maclaurin (1698-1746) aunque algunos historiadores lo atribuyen a Stirling (1692-1770). El teorema proporciona una fórmula para desarrollar

en serie de potencias de **x**, cualquier función que satisface las condiciones indicadas.

Teorema. Si una función $f(x)$ y sus derivadas de todas las órdenes, están definidas en un intervalo alrededor de $x = 0$, entonces la serie: $f(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!} x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n + \ldots\ldots\ldots$ representa a la función $f(x)$ para todos los valores de **x** tales que $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(o)}{(n+1)!} x^{n+1} + \ldots\ldots$ tiende a cero cuando **n** tiende a infinito.

Demostración. Cualquier función definida en un intervalo alrededor de $x = o$, puede ser expresada en la siguiente serie de potencias que es convergente por lo menos para $x = o$:

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f(o) = a_o$

Ahora, las derivadas de $f(x)$ están definidas en un intervalo alrededor del cero. Derivando término a término, se obtiene:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$; $f'(o) = a_1$

Derivando de nuevo:

$$f''(x) = 2a_2 + (3)(2)\,a_3\,x + \ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f''(o) = 2\,a_2$

$$\therefore a_2 = \frac{f''(o)}{2} = \frac{f''(o)}{2!}$$

Volviendo a derivar:

$$f''(x) = (3)(2)\,a_3 + (4)(3)(2)\,x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f'''(o) = 3!\,a_3$

$$\therefore a_3 = \frac{f'''(o)}{3!}$$