$$\int_o^x f(x)\,dx = \int_o^x \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$ para

todo x en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior:

$$f(x) = \frac{2}{2-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \text{ para todo } -2 < x < 2.$$

Entonces:

$$\int_o^x f(x)\,dx = \int_o^x \frac{2\,dx}{2-x} = \int_c^x \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{2^n} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n}$$

Para todo x en el intervalo $[-2, 2]$.

Ahora: $\int_o^x \frac{2\,dx}{2-x} = -2\ln(2-x)\Big|_o^x$. Entonces:

$$-2\ln(2-x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} - 2\ln 2$$

$$\therefore \ln(2-x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} + 2\ln 2, \text{ para todo } x$$

entre -2 y 2. Hemos encontrado una fórmula para calcular los logaritmos naturales de los números entre cero y cuatro. La aproximación en cada caso, depende del número de términos que se tomen de la serie.

10.14 Desarrollo de funciones en series de potencias. Hemos establecido que si una serie de potencias se considera como una función de x, entonces podemos encontrar las derivadas de la función, derivando término a término la serie en el intervalo de convergente. Ahora, dada una función de x, se puede encontrar una serie de potencias que sea equivalente a la función para determinados valores de x. Consideremos primeramente el desarrollo de una función en serie de potencias de x.

Series de Maclaurin. El siguiente teorema se debe a Colin Maclaurin (1698-1746) aunque algunos historiadores lo atribuyen a Stirling (1692-1770). El teorema proporciona una fórmula para desarrollar

en serie de potencias de x, cualquier función que satisface las condiciones indicadas.

Teorema. Si una función f (x) y sus derivadas de todas las órdenes, están definidas en un intervalo alrededor de x = 0, entonces la serie: $f(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!} x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n + \ldots\ldots\ldots$ representa a la función f (x) para todos los valores de x tales que $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(o)}{(n+1)!} x^{n+1} + \ldots\ldots$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Demostración. Cualquier función definida en un intervalo alrededor de x = o, puede ser expresada en la siguiente serie de potencias que es convergente por lo menos para x = o:

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f(o) = a_o$

Ahora, las derivadas de f (x) están definidas en un intervalo alrededor del cero. Derivando término a término, se obtiene:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$; $f'(o) = a_1$

Derivando de nuevo:

$$f''(x) = 2a_2 + (3)(2)\,a_3\,x + \ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f''(o) = 2\,a_2$

$$\therefore a_2 = \frac{f''(o)}{2} = \frac{f''(o)}{2!}$$

Volviendo a derivar:

$$f''(x) = (3)(2)\,a_3 + (4)(3)(2)\,x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f'''(o) = 3!\,a_3$

$$\therefore a_3 = \frac{f'''(o)}{3!}$$

Repitiendo el proceso de derivación, se encuentra:

$a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!}$ donde $f^{(n)}(x)$ es la enésima derivada de $f(x)$.

Sustituyendo las expresiones obtenidas para a_o, a_1, a_2, a_3, ... en la serie original:

$$f(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(o)}{3!}\,x^3 + \dots\dots$$

Ahora, para determinar los valores de $\underline{x}$ para los cuales la serie representa a la función $f(x)$, consideremos la enésima suma parcial:

$$S_n(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!}\,x^2 + . \ \frac{f^{(n)}(o)}{n!}\,x^n$$

De acuerdo con la definición de $R_n(x)$, se tiene:

$$S_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Aplicando límites cuando $\underline{n}$ tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x) - \lim_{n \to \infty} R_n(x)$$ (porque $f(x)$ no depende de $\underline{n}$ en el límite).

Ahora, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$ es el valor de la serie y cuando $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = o$ se tiene:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

Entonces, la serie representa a la función $f(x)$ para los valores de $\underline{x}$ tales que $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = o$

L.C.D.D.

Nota: Es importante observar que puede haber valores de $\underline{x}$ dentro del intervalo de convergencia de la serie, para los cuales $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) \neq 0$.

Sin embargo, el intervalo de convergencia coincide con el

conjunto de valores de $\underline{x}$ para los cuales $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = o$ para las funciones que hemos estudiado. (En general).

Ejemplo. Desarrollar en serie de Maclaurin la función $f(x) = e^x$. Encontrar el intervalo de convergencia.

Solución.

$$f(x) = e^x = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots$$

$$a_o = f(o) = e^o = 1$$

$$f'(x) = e^x$$

$$\therefore a_1 = f'(o) = e^o = 1$$

$$f''(x) = e^x$$

$$\therefore a_2 = \frac{f''(o)}{2!} = \frac{e^o}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$f'''(x) = e^x$$

$$\therefore a_3 = \frac{f'''(o)}{3!} = \frac{e^o}{3!} = \frac{1}{3!}$$

Puesto que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n = 1, 2, \dots$, se tiene:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!} = \frac{e^o}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Sustituyendo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\dots$$

Intervalo de convergencia: $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$; $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\therefore \rho_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} |\rho_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Entonces $r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0} = \infty$ y la serie converge para todo $\underline{x}$ real $(-\infty < x < +\infty)$.

En este caso puede demostrarse que $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x)$ es igual a cero para todo x en el intervalo de convergencia, es decir, para todo $-\infty < x < \infty$.

Un valor aproximado del número e puede ser obtenido de esta serie sustituyendo $x = 1$ en la serie $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$, se tiene:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

Serie de Taylor. El desarrollo de una función puede hacerse sobre un intervalo alrededor de cualquier número c, cuando se satisfacen las condiciones indicadas en el siguiente teorema debido a Brook Taylor (1685-1731).

Teorema. Si una función $f(x)$, y sus derivados de todas las órdenes, están definidas en un intervalo alrededor de $x = c$ entonces la serie:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \ldots\ldots$$

representa a la función $f(x)$ para todos los valores de x tales que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema anterior. Obsérvese que la serie de Maclaurin es un caso particular de la serie de Taylor, cuando $c = 0$. La serie de Taylor permite desarrollar funciones que no están definidas para $x = 0$.

Ejemplo. Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \ln x$, Encontrar el intervalo de convergencia.

Solución. Esta función no puede desarrollarse en serie de Maclaurin porque $f(0) = \ln 0$ no existe. Consideremos la serie de potencias de $(x - 1)$.

$$f(x) = \ln x = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$f(1) = \ln 1 = 0$. Entonces $a_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$f'(1) = 1$. Entonces $a_1 = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Entonces: $a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f'''(1) = 2$. Entonces $a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

$f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$f^{IV}(1) = -6$. Entonces $a_4 = \frac{-6}{4!} = \frac{-3!}{4!} = -\frac{1}{4}$

Sustituyendo:

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \ldots\ldots$$

Intervalo de convergencia. El enésimo término es dado por:

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

Entonces:

$$|\rho_n| = \left| \frac{\frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}} \right| = \left| \frac{(x-1)^{n+1}\, n}{(x-1)^n (n+1)} \right|$$

$$|\rho_n| = |x - 1| \left| \frac{n}{n+1} \right|$$

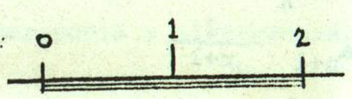
$$\lim_{n \to \infty} |\rho_n| = |x - 1| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= |x - 1|$$

Entonces la serie es convergente para los valores de x tales que:

$$|x - 1| < 1 \quad \text{(por el criterio de la razón).}$$

Esta desigualdad define el intervalo alrededor de $x = 1$ de longitud 2:



La serie encontrada nos permite calcular valores aproximados de los logaritmos naturales para números entre o y 2. En este caso, la serie resultó alternante por lo que el error, al considerar el valor de la función igual a la suma de los primeros n términos, es menor que el término número $(n + 1)$.

Aplicación al cálculo integral. Las aplicaciones de los desarrollos en serie de funciones, son muy variadas. Hemos visto como se pueden calcular valores aproximados de logaritmos. Las tablas de logaritmos y las de otras funciones trascendentes como las trigonométricas, han sido elaboradas aproximando los valores por medio de desarrollos en serie. Consideremos ahora, otra de las muchas aplicaciones del desarrollo en serie de las funciones de una variable. Supongamos que deseamos encontrar la integral definida de una expresión diferencial que no puede ser integrada. Desarrollando la función en serie de potencias alrededor de un intervalo que contenga al intervalo de integración, se puede integrar la serie término a término y obtener un valor aproximado de la integral definida tomando un número n de términos de la serie integrada.

Ejemplo. Encontrar el valor aproximado a 3 decimales de la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \frac{d\,x}{4 - x^2}$$

Solución. Desarrollemos en serie de potencias alrededor de $x = 0$ la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$. Por la fórmula de Maclaurin o haciendo la división, se obtiene:

$$\frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} + \frac{x^6}{4^4} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{256} + \ldots\ldots$$

Intervalo de convergencia. El enésimo coeficiente es dado por:

$$a_n = \frac{1}{4^n}$$

$$\therefore\ a_{n+1} \quad \frac{1}{4^{n+1}}$$

Ahora $$\rho_n = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

Entonces $$\rho = \lim_{n \to \infty} \left|\rho_n\right| = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ r = \frac{1}{\rho} = 4.$ Entonces, la serie converge para un intervalo alrededor del cero de longitud 8.

El intervalo de convergencia contiene al intervalo de integración. Entonces:

$$\int_0^1 \frac{d\,x}{4 - x^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{256} + \ldots.\right) d\,x$$

$$= \left(\frac{1}{4}\,x + \frac{x^3}{(3)\,(16)} + \frac{x^5}{(5)\,(64)} + \frac{x^7}{(7)(256)} + \ldots\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3(16)} + \frac{1}{(5)\,(64)} + \frac{1}{(7)\,(256)} + \ldots..$$

$$= 0.25 + 0.0208 + 0.0031 + 0.0006 + \ldots\ldots.$$

Después del cuarto término, la primera cifra significativa está después de la cuarta cifra decimal. Entonces, aproximando a cuatro términos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4 - x^2} \approx 0.2745$$

Redondeando a tres decimales:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4 - x^2} \approx \underline{\underline{0.275}}$$

Ejercicio 37.

Tema: Secuencias. Convergencia y divergencia.