1. Determinar si las siguientes secuencias son convergentes o divergentes.

1.1 $1, 4, 7, \ldots\ldots\ldots, 3n - 2, \ldots\ldots\ldots$

1.2 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\ldots$

1.3 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots\ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\ldots\ldots$

1.4 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots$

1.5 $1, -1, 1, -1, \ldots\ldots, (-1)^{n-1}, \ldots\ldots$

2. Establecer la ley de formación de los términos de las siguientes secuencias y determinar si son convergentes o divergentes.

2.1 $2, 4, 8, 16, \ldots\ldots$

2.2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

2.3 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \ldots$

2.4 $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{27}, \ldots\ldots$

2.5 $\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{5}, \frac{6}{7}, \ldots\ldots\ldots$

2.6 $2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\ldots$

2.7 $5, 5, 5, 5, \ldots\ldots\ldots$

2.8 $(1)(2), (2)(3), (3)(4), (4)(5), \ldots$

2.9 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots\ldots$

2.10 $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{27}, \ldots\ldots\ldots$

3. Encontrar los primeros cuatro términos de las siguientes secuencias, dado el enésimo término u_n y determinar si son convergentes:

3.1 $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3.2 $u_n = 3 + 2n$

3.3 $u_n = \frac{1}{n^2}$

3.4 $u_n = (0.08)^n$

3.5 $u_n = 3\left(\frac{1}{5^n}\right)$

3.6 $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

3.7 $u_n = \frac{(-1)^n x^n}{n}$

3.8 $u_n = \frac{1}{n+1}$

3.9 $u_n = \frac{x^n}{n!}$

3.10 $u_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)$

Ejercicio 38.

Tema. Series geométricas. Regla de L'Hospital.

1. Determinar si las siguientes series geométricas son convergentes o divergentes. Cuando sean convergentes, encontrar el valor de la serie:

1.1 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3})^{n-1} = 1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ldots\ldots\ldots$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1000} = \frac{3}{1000} + \frac{9}{1000} + \frac{27}{1000} + \ldots\ldots\ldots$

1.4 $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots\ldots$

1.5 $8 + 4 + 2 + 1 + \ldots\ldots\ldots$

2. Encontrar la fracción de que provienen los siguientes números decimales.

2.1 0.858585........

2.2 0.9999 ....

2.3 0.125125125

2.4 0.3225

2.5 0.87777........

2.6 3.181818........

2.7 0.21400400400.....

2.8 12.121212 ....

3. Si la expansión del ingreso es determinada por el multiplicador $m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}$, encontrar una fórmula para <u>m</u> cuando α está entre cero y uno. Determinar el multiplicador cuando la propensión marginal al consumo es $\alpha = 0.6$.

4. Si la propensión marginal al ahorro es igual a 0.25, encontrar la propensión marginal al consumo α y el multiplicador del ingreso <u>m</u>.

5. Evaluar los siguientes límites, aplicando la regla de L'Hospital cuando sea necesario:

5.1 $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

5.4 $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2}\right)$

5.2 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

5.3 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$

5.5 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{1 - x} \right)$

5.6 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x + x}{x^2 \ln x}$

Ejercicio 39.

Tema: Convergencia y divergencia de series de términos positivos.

1. Demostrar que las siguientes series son divergentes porque el límite del enésimo término cuando n tiende a infinito es diferente de cero:

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^2 + 1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{9}{10} + \ldots\ldots\ldots$

1.2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = 1 + \dfrac{5}{4} + \dfrac{25}{16} + \ldots\ldots\ldots$

1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n - 1} = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \ldots\ldots$

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots\ldots$

2. Determinar si las siguientes series son convergentes ó divergentes:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n + 1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + \ldots\ldots$

2.2 $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{13} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{4n + 1} + \ldots\ldots$

2.3 $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{n^3} + \ldots\ldots$

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + 1}{n\,(4)^{n-1}}$

2.5 $\dfrac{1}{(1)\,(2)} + \dfrac{1}{(2)\,(2^2)} + \dfrac{1}{(3)\,(2^3)} + \dfrac{1}{4(2^4)} + \ldots\ldots$

2.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots\ldots$

2.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots$

2.8 $\dfrac{2}{\ln 2} + \dfrac{3}{\ln 3} + \dfrac{4}{\ln 4} + \dfrac{5}{\ln 5} + \ldots\ldots\ldots$

2.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{e^n} = \dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e^2} + \dfrac{3}{e^3} + \ldots\ldots$

2.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3\,n^2}$

2.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n\,(n + 1)}$

2.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n \sqrt{n}}$

2.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln\,(n+1)}$

* 2.14 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 4}}$

2.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2 + 4}$

Ejercicio 40.

Tema. Series alternantes: Series de potencias.

1. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes. En caso de que sean convergentes, investigar si son absolutamente convergentes.

1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2n - 1} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots\ldots$

1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

2. Encontrar el valor de la siguiente serie aproximado a 5 decimales:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots\dots\dots$$

3. Encontrar la suma de los primeros 10 términos de la siguiente serie y comparar el error, con respecto al valor de la serie, con el onceavo término:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+4)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{(2)\,(6)} + \frac{1}{(3)\,(7)} - \frac{1}{(4)\,(8)} + \dots\dots$$

4. Encontrar el intervalo de convergencia de las siguientes series y representarlo gráficamente.

4.1 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots\dots$

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\dots\dots$

4.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{1}{2!}\,x + \frac{1}{3!}\,x^2 + \dots\dots\dots$

4.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

4.5 $(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots\dots\dots$

4.6 $(x-2) + 2!\,(x-2)^2 + 3!\,(x-2)^3 + 4!\,(x-2)^4 + \dots\dots$

4.7 $\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{4}{16x^4} + \dots\dots\dots\dots$

4.8 $(x-3) + (x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4 + \dots\dots$

4.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2} = 1 + \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{9}\,x^2 + \dots\dots\dots$

Ejercicio 41.

Tema: Desarrollo de funciones en serie. Aplicaciones.

1. Desarrollar en serie de Maclaurin (potencias de x) las siguientes funciones y determinar su intervalo de convergencia.

1.1 $f(x) = \ln(1-x)$

1.2 $f(x) = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$

* 1.3 $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

2. Desarrollar en serie de Taylor (potencias de $(x-c)$ las siguientes funciones; para el valor indicado de c y determinar su intervalo de convergencia.

2.1 $f(x) = \ln x \qquad c = 3$

2.2 $f(x) = e^{\frac{x}{3}} \qquad c = 3$

2.3 $f(x) = \ln(1+x) \qquad c = 0$

3. Encontrar el valor aproximado a cuatro decimales de ln 0.98 utilizando el desarrollo en serie de $\ln(1-x)$ encontrado en el problema 1.1.

4. Encontrar el valor aproximado a cuatro decimales de ln 1.04 utilizando el desarrollo en serie encontrado en el problema 2.3

5. Encontrar el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$ para encontrar el área aproximada limitada por la curva de $f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Sugestión. Integrar la serie aproximada a 6 términos entre los límites $x = 0$ y $x = 1$.

6. Encontrar el valor aproximado a 3 decimales del número e utilizando el desarrollo en serie de $f(x) = e^{x/3}$ encontrado en el problema 2.2

Sugestión. Sustituir $c = 3$.

CAPITULO 11

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

11.1 Matrices. El estudio del álgebra de matrices y sus álgebras isomórficas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales, proporcionan la base matemática para el desarrollo de nuevas técnicas de optimización de funciones lineales de varias variables sujetas a condiciones laterales lineales. La programación lineal y el planteo y solución de modelos lineales exigen conocimientos básicos de esta rama de las matemáticas que se ha denominado Algebra Lineal.

Empezaremos por definir el concepto de matriz y la notación matemática que será utilizada. Las matrices se definen, en general, sobre los elementos de un sistema algebraico llamado campo. Limitaremos el estudio de las matrices al campo de los números reales, es decir, sus elementos serán del sistema de números reales, que satisface las condiciones necesarias para ser un campo.

La forma general de una matriz $m \times n$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$