Sugestión. Integrar la serie aproximada a 6 términos entre los límites $x = 0$ y $x = 1$.

6. Encontrar el valor aproximado a 3 decimales del número e utilizando el desarrollo en serie de $f(x) = e^{x/3}$ encontrado en el problema 2.2

Sugestión. Sustituir $c = 3$.

CAPITULO 11

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

11.1 Matrices. El estudio del álgebra de matrices y sus álgebras isomórficas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales, proporcionan la base matemática para el desarrollo de nuevas técnicas de optimización de funciones lineales de varias variables sujetas a condiciones laterales lineales. La programación lineal y el planteo y solución de modelos lineales exigen conocimientos básicos de esta rama de las matemáticas que se ha denominado Algebra Lineal.

Empezaremos por definir el concepto de matriz y la notación matemática que será utilizada. Las matrices se definen, en general, sobre los elementos de un sistema algebraico llamado campo. Limitaremos el estudio de las matrices al campo de los números reales, es decir, sus elementos serán del sistema de números reales, que satisface las condiciones necesarias para ser un campo.

La forma general de una matriz $m \times n$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Def. Una matriz $\underline{m \times n}$ es un arreglo en $\underline{m}$ hileras y $\underline{n}$ columnas de números reales.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } \underline{2 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1/5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } \underline{3 \times 3}$$

El doble subíndice en los elementos de la matriz permite identificar la posición de cualquier elemento, pues el primer subíndice indica el número de la hilera y el segundo subíndice indica el número de la columna a que pertenece cada elemento. Así, por ejemplo, a_{34} es el elemento que está en la 3a. hilera y en la cuarta columna de la matriz.

Si n = m, se tiene una matriz cuadrada. Si m = 1, la matriz es una matriz hilera y si n = 1, será una matriz columna. Es conveniente observar la semejanza entre una matriz cuadrada y un determinante y hacer notar que son conceptos matemáticos totalmente distintos. Una matriz es un arreglo de números, mientras que un determinante es un número que se obtiene de acuerdo con su definición.

Notación compacta. La matriz $\underline{m \times n}$ se expresa en forma compacta de la siguiente manera:

$A = ((a_{ij}))\ \underline{m \times n}$ donde: a_{ij} = Elemento en la hilera $\underline{i}$ y columna $\underline{j}$.

La hilera $\underline{i}$ se denota para $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots a_{in})$

La columna $\underline{j}$ se denota por:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Nótese que A_i es una matriz $\underline{1 \times n}$; $A^{(j)}$ es una matriz $\underline{m \times 1}$.

11.2 Transformaciones elementales en hileras. De acuerdo con su definición, las matrices constituyen un conjunto infinito de elementos, (arreglos de números reales en $\underline{m}$ hileras y $\underline{n}$ columnas), sobre los cuales definiremos operaciones para formar propiamente un álgebra que es el álgebra de las matrices. Antes de definir operaciones con matrices, definiremos las llamadas "Transformaciones elementales en hileras" de una matriz con el propósito de relacionar las matrices con los sistemas de ecuaciones lineales y al mismo tiempo motivar el estudio del álgebra de matrices aplicando estos conceptos fundamentales a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Consideremos primeramente las siguientes definiciones:

Def. Multiplicar una hilera de una matriz por un número real $\underline{c}$ es multiplicar cada elemento de la hilera por el número real en cuestión.

$$c\,A_i = c\,(a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots a_{in}) = (c\,a_{i1}, c\,a_{i2}, \ldots\ldots, c\,a_{in})$$

Def. Sumar 2 hileras de una matriz es sumar sus elementos correspondientes.

En nuestra notación:

$$A_i + A_h = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots, a_{in}) + (a_{h1}, a_{h2}, \ldots\ldots, a_{hn})$$
$$= (a_{i1} + a_{h1}, a_{i2} + a_{h2}, \ldots\ldots, a_{in} + a_{hn})$$

Las transformaciones elementales en hileras son las siguientes:

(i) Intercambio de 2 hileras cualquiera.
(ii) Multiplicación de una hilera por un número real diferente de cero.
(iii) Suma de un múltiplo cualquiera de una hilera a otra hilera.

Observemos el efecto de estas transformaciones en la matriz general $\underline{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transformación (i) intercambia 2 hileras de la matriz, digamos A_i y A_j y el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transformación (ii) multiplica la hilera A_i por un número real c diferente de cero y el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transformación (iii) suma un múltiplo de A_j a la hilera A_i y el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

11.3 <u>Equivalencia de matrices</u>. Una matriz A es equivalente a otra matriz B si puede transformarse A en B por medio de un número finito de transformaciones elementales en hileras.

<u>Notación</u>: La relación A es equivalente a B se denota por $A \sim B$.

La relación $A \sim B$ es una relación de equivalencia, es decir, satisface las leyes reflexiva, simétrica y transitiva.

1. <u>Ley reflexiva</u>. Cualquier matriz A es equivalente a si misma $A \sim A$. Esta ley es inmediata de la definición de equivalencia.

2. Ley simétrica. Si A es equivalente a B, entonces B es equivalente a A. En símbolos:

$$\text{Si } A \sim B, \text{ entonces } B \sim A.$$

Esta ley se deduce de que para cada una de las transformaciones elementales en hileras puede encontrarse a otra transformación elemental en hileras que invierte el efecto de la primera. Por ejemplo, el efecto de la transformación que intercambia la hilera A_i con la hilera A_j puede invertirse por medio de la transformación que intercambia la hilera A_j con la hilera A_i.

Si $A \sim B$, entonces, por definición, puede transformarse A en B por medio de un número finito de transformaciones en hileras. Aplicando las transformaciones inversas, puede transformarse B en A por medio de un número finito de transformaciones elementales en hileras. Es decir, $B \sim A$.

3. Ley transitiva. Si A es equivalente a B y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C. En símbolos:

$$\text{Si } A \sim B \text{ y } B \sim C, \text{ entonces } A \sim C.$$

Esta ley también es inmediata de la definición de equivalencia de matrices.

11.4 Formas reducidas de una matriz. Por medio de transformaciones elementales en hileras, podemos reducir una matriz a ciertas formas específicas que son útiles para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Las formas reducidas que utilizaremos son las siguientes:

1. Forma reducida inferior. Se dice que una matriz tiene una forma reducida inferior si, después de aplicarle transformaciones elementales convenientes, cuando esto sea necesario, satisface las siguientes condiciones:

a) El primer elemento diferente de cero (elemento principal) de cada hilera es uno.

b) Todos los elementos bajo el elemento principal de cada hilera son cero.

2. Forma reducida en escalón. Es una forma reducida inferior que además satisface las siguientes condiciones:

c) Los elementos sobre cada elemento principal son cero.

d) Las hileras de ceros, si las hay, aparecen al final.

e) Sea hi el número de la columna que contiene al elemento principal de la hilera i. Entonces: $h_i < h_j$ si $i < j$. Esto significa que los elementos principales de la matriz están escalonados a la derecha y hacia abajo.

Ejemplos.

1. Encontrar una forma reducida inferior de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para las transformaciones elementales que se aplicarán a la matriz, utilizaremos números encerrados en círculos para indicar multiplicación de la hilera por el número en cuestión y flechas para indicar intercambio de hileras o suma de un múltiplo de una hilera a otra:

$$\begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} -1$$

$$\sim -4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

La última matriz B es una forma reducida inferior de la matriz A.

Nótese que el camino seguido para encontrar la forma reducida es un proceso sistemático en el que se aplica una sucesión de transformaciones elementales para satisfacer las condiciones necesarias. La primera condición es que el primer elemento diferente de cero en la primera hilera sea uno. En el ejemplo, esta condición se satisface en la matriz original A. Después los elementos bajo el elemento principal de la primera hilera deben ser ceros, lo cual se consigue sumando a las hileras después de la primera, múltiplos apropiados de la primera hilera. El siguiente paso es que el elemento principal de la segunda hilera sea uno, lo cual se consigue por medio de transformaciones elementales con las hileras después de la primera tratando de evitar fracciones que complicarían los cálculos posteriores. En el peor de los casos, hay que dividir entre el primer elemento diferente de cero de la segunda hilera para obtener un uno como elemento principal. Este proceso se repite hasta satisfacer todas las condiciones necesarias.

Para la forma reducida en escalón, el proceso es completamente semejante:

Por ejemplo:

Encontrar la forma reducida en escalón de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando las mismas indicaciones que en ejemplo anterior:

$$\begin{matrix} (1) & (-2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\overset{(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1/11)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 17 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} \underset{(-17)\ (-8)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 17 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10/14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/11 \\ 0 & 1 & 0 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & 10/11 \end{pmatrix} = B$$

La matriz B es la forma reducida en escalón buscada.

Sistemas de ecuaciones lineales. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, tenemos los métodos de eliminación estudiados en el álgebra elemental. Estos métodos resultan sumamente laboriosos cuando el número de incógnitas en el sistema es grande, digamos más de 3 incógnitas. El método de Gauss es un proceso organizado de eliminación que, con la ayuda de matrices y form reducidas, resulta ser uno de los mejores métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sistemas cuadrados. Consideremos la forma general de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\text{(I)} \begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots\cdots + a_{1n} X_n = b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots\cdots + a_{2n} X_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots\cdots + a_{nn} X_n = b_n \end{cases}$$

La eliminación gaussiana consiste en eliminar X_1 en todas las ecuaciones después de la primera. Después, eliminar X_2 en todas las ecuaciones después de la segunda, y así sucesivamente hasta la incógnita X_{n-1} que se elimina en la última ecuación. Al terminar este proceso y si el sistema (I) es consistente, se obtiene un sistema equivalente que se transforma en la forma reducida de Gauss, dividiendo cada ecuación entre su primer coeficiente. Es decir, el sistema original se reduce al siguiente sistema:

$$\text{(II)} \begin{cases} X_1 + C_{12} X_2 + C_{13} X_3 + \cdots\cdots + C_{1n-1} X_{n-1} + C_{1n} X_n = d_1 \\ \qquad\quad X_2 + C_{23} X_3 + \cdots\cdots + C_{2n-1} X_{n-1} + C_{2n} X_n = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_{n-1} + C_{n-1n} X_n = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_n = d_n \end{cases}$$

De la última ecuación se tiene el valor de $X_n = d_n$. De la penúltima ecuación, se obtiene X_{n-1} en términos de X_n cuyo valor d_n ya se conoce y así sucesivamente hasta llegar a X_1.

De la forma reducida de Gauss (II), se obtiene la siguiente fórmula para obtener cada incógnita en términos de las que le siguen:

$$X_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} C_{ij} X_j$$

El método de Gauss puede efectuarse trabajando únicamente con el cuadro de coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones del sistema. Consideremos la siguiente definición:

11.5 Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales. Es la matriz que se obtiene agregando a la matriz del cuadro de coeficiente, la columna de términos independientes.

En nuestro sistema general I, la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

De acuerdo con ésto, hemos establecido una ley de correspondencia que asocia a cada sistema de ecuaciones, una matriz y a cada matriz, el correspondiente sistema de ecuaciones. Inmediatamente podemos deducir el siguiente:

Lema: Matrices equivalentes corresponde a sistemas de ecuaciones lineales equivalentes, es decir, sistemas que tienen exactamente las mismas soluciones.

Demostración: Si en la matriz asociada al sistema, efectuamos transformaciones elementales en hileras, obtenemos una matriz equivalente y el efecto de cada transformación elemental en hileras sobre el sistema correspondiente es el siguiente:

1. El intercambio de 2 hileras produce un intercambio de las 2 correspondientes ecuaciones en el sistema.
2. La multiplicación de una hilera por un número real diferente de cero equivale a multiplicar la ecuación correspondiente por ese número.
3. La suma de un múltiplo de una hilera a otra hilera, equivale a sumar un múltiplo de una ecuación a otra del sistema.

Puesto que éstas transformaciones conducen a sistemas equivalentes en el sentido de tener las mismas soluciones, se concluye que matrices equivalentes corresponden a sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Con la ayuda del lema que acabamos de demostrar, el método de Gauss puede realizarse de la siguiente manera:

1. Se ordenan las incógnitas en las ecuaciones para obtener la matriz asociada al sistema.
2. Por transformaciones elementales en hileras se encuentra la forma reducida inferior.
3. Se establece el sistema correspondiente a la forma reducida inferior que tendrá las características de la forma reducida de Gauss de un sistema de ecuaciones.
4. Se resuelve como antes, determinando los valores de las incógnitas de atrás para adelante, es decir, empezando con X_n y terminando con X_1. Este último paso del proceso puede efectuarse directamente de la matriz en su forma reducida inferior eliminando el paso 3.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 - X_2 - 2X_3 = 5 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$