Esta y otras propiedades del álgebra ordinaria que no se cumplen en el álgebra de matrices debilitan su estructura y es importante tener plena conciencia de sus limitaciones para evitar errores.

Potencias de matrices. Habiendo definido la multiplicación de matrices en general, podemos concentrar nuestra atención en las matrices cuadradas para definir el concepto de potencia entera positiva.

Def. Si A es una matriz cuadrada nxn y p es un número entero positivo:

$$A^p = \underbrace{A\,A\,A\,.....\,A}_{\text{p factores}}$$

Las propiedades inmediatas de esta definición son las siguientes:

1. $A^p\ A^q = A^{p+q}$
2. $(A^p)^q = A^{pq}$

Nótese que estas propiedades corresponden a 2 de las 5 leyes fundamentales de exponentes en el álgebra de los números reales. Por otra parte la potencia de matrices cuadradas que hemos definido tiene la siguiente falla, que es una consecuencia de la no conmutatividad de la multiplicación:

$(AB)^p \neq A^p\ B^p$, en general.

El concepto de potencia tiene importancia para ciertos modelos dinámicos en economía, en los que se utilizan conceptos como los siguientes:

Def. Si $A^p = 0$, entonces A es Nul-potente de índice p.

Def. Si $A^2 = A$, entonces se dice que A es idem-potente.

Def. Si $A^{k+1} = A$, entonces A es periódica de periodicidad k.

11.9 Traspuesta de una matriz cuadrada. Es otra matriz cuadrada cuyas columnas son las correspondientes hileras de la matriz original. En símbolos: Si $A = ((a_{ij}))$ es nxn, entonces.

Traspuesta de $A = A' = ((a_{ji}))$

Nótese que A' puede obtenerse de la matriz A reflejando todos sus elementos sobre la diagonal principal.

$$\text{Si}\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Las propiedades de la traspuesta son las siguientes:

1. La traspuesta de la traspuesta de A es igual a A. Es decir $(A')' = A$.

Dem. Si $A = ((a_{ij}))$ es nxn, entonces por la definición:

$A' = ((a_{ji}))$ y reaplicando la definición se obtiene:

$(A')' = ((a_{ij})) = A$

2. $(kA)' = kA'$ para cualquier número real k.

Dem. Sea $A = ((a_{ij}))$ nxn

$kA = ((ka_{ij}))$ por definición.

Ahora: $(kA)' = ((ka_{ij}))' = ((ka_{ji}))$; por definición

Entonces $(kA)' = k\ ((a_{ji})) = kA'$

3. La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas de los sumandos. Es decir. $(A + B)' = A' + B'$.

Dem: Sea $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$, dos matrices <u>nxn</u>.

$A + B = ((a_{ij} + b_{ij}))$ por definición de suma

$(A + B)' = ((a_{ji} + b_{ji}))$ por definición de traspuesta.

$= ((a_{ji})) + ((b_{ji})) = A' + B'$

4. La traspuesta de un producto es igual al producto de las traspuestas de los factores en orden inverso. Es decir: $(AB)' = B'\,A'$.

Dem. Sea $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{jk}))$, dos matrices <u>nxn</u>. El elemento general del producto $C = AB$ es, por definición:

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

Ahora: $(AB)' = C' = ((C_{ik}))' = ((C_{ki})) = ((\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji}))$

Por otra parte desarrollando $B'\,A'$ y observando que los subíndices <u>i</u> y <u>k</u> varían ambos de <u>1</u> a <u>n</u>, se encuentra que:

$$(A\,B)' = B'\,A'$$

<u>11.10 Matriz simétrica</u>. Es aquella en la que los elementos semejantemente situados con respecto a la diagonal principal, son iguales. Es decir:

$A = ((a_{ij}))$ es simétrica, si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j = 1, 2, ..., n.

<u>Ejemplo</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$ es una matriz simétrica 3 x 3.

<u>Corolario</u>. Si A es simétrica, entonces $A' = A$.

<u>Matriz anti-simétrica</u>. Es aquella en la que los elementos semejantemente situados con respecto a la diagonal principal son iguales pero de signo contrario. Es decir:

$A = ((a_{ij}))$ es anti-simétrica si:

$a_{ij} = -\,a_{ji}$ para todo <u>i</u> y <u>j</u>

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$ Es una matriz anti-simétrica <u>4 x 4</u>

<u>Corolario</u>. Si A es anti-simétrica; entonces: $A' = -A$. Inmediatamente se deduce que si A es anti-simétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros.

<u>11.11 Inversa de una matriz</u>. La matriz inversa A^{-1} de una matriz cuadrada A <u>nxn</u> es otra matriz cuadrada tal que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$

La inversa de una matriz cuadrada no siempre existe según veremos adelante.

La propiedad fundamental de la inversa es la siguiente:

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

Nótese el cambio de orden en el producto de las inversas (lado derecho de la ecuación). Además, es necesario que A y B tengan inversas para que ésto tenga sentido.

El problema de la determinación de la inversa de una matriz cuadrada A es uno de los temas fundamentales del álgebra de matrices por sus múltiples aplicaciones. Existen diversos métodos para resolverlo, de los cuales serán considerados los 2 métodos que utilizan los conceptos establecidos, además de la teoría de determinantes que condensaremos en seguida. (Capítulo 12).

Antes de atacar el problema de la determinación de la inversa, veamos una motivación en nuestro objetivo fundamental que es la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

El sistema general de <u>n</u> ecuaciones con <u>n</u> incógnitas tiene la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,X_1 + a_{12}\,X_2 + \cdots\cdots + a_{1n}\,X_n = b_1 \\ a_{21}\,X_1 + a_{22}\,X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}\,X_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}\,X_1 + a_{n2}\,X_2 + \cdots\cdots + a_{nn}\,X_n = b_n \end{array}\right.$$

Esta expresión general para el sistema lineal puede compactarse utilizando sumatorias simples:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,X_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,X_j = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,X_j = b_n \end{array}\right.$$

Esto puede expresarse en forma más compacta utilizando una sola sumatoria, de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,X_j = b_i \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Consideremos ahora, la matriz del cuadro de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si las incógnitas las expresamos en una matriz columna :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Los términos independientes los reunimos también en una matriz columna:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema puede expresarse en términos de matrices de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O sea: $\underline{AX = B}$

Supongamos que la inversa A^{-1} de la matriz cuadrada A existe. Entonces multiplicando ambos lados de la ecuación por A^{-1} por la izquierda, se tiene:

$$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B$$

Por la ley asociativa y las definiciones de inversa e identidad, se tiene:

$$(A^{-1}\,A)\,X = A^{-1}\,B$$
$$I\,X = A^{-1}\,B$$
$$\underline{\underline{X = A^{-1}\,B}}$$

Entonces, la solución del sistema general de $\underline{n}$ ecuaciones lineales con $\underline{n}$ incógnitas, es igual al producto de la inversa de la matriz del cuadro de coeficientes por la matriz columna de términos independientes.

Ejercicio 42.

Tema: Matrices. Transformaciones elementales y formas reducidas.

1. Encontrar la forma reducida inferior de las siguientes matrices:

1.1 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 1.4 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1.5 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

2. Encontrar la forma reducida en escalón de las siguientes matrices.

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2.2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

2.3 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 10 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 2.4 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

2.5 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2.6 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 43.

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de Gauss y de Gauss–Jordán.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss:

1.1 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 14 \\ -3x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 14 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss–Jordán:

2.1 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 4 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$ 2.6 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \\ 7x_1 + 7x_2 = 12 \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 2.8 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

Ejercicio 44.

Tema: Matrices. Operaciones fundamentales.

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar el resultado de las siguientes operaciones cuando la expresión tenga sentido:

1.1 $A + B$	1.2 $A + C$
1.3 $B + C$	1.4 $A + B + C$
1.5 $A - B - C$	1.6 $A + B + D$
1.7 $A + B + C + D$	1.8 $A + D + E$
1.9 $3A + 2B$	1.10 $5B - 3D$
1.11 $3E - 2F$	1.12 $D - E + 2F$

2. Utilizando las matrices del problema anterior, encontrar la matriz X, tal que:

$$2A + 3C - B - 5X + 4C = C - A$$

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones cuando la expresión tenga sentido:

3.1 $A\,B$	3.2 $E\,A$
3.3 $A\,D$	3.4 $B\,D$
3.5 $A\,B\,C$	3.6 $A\,B\,D$
3.7 $C\,A\,B$	3.8 $A\,(B + D)$
3.9 $3\,A\,B - 2\,A$	3.10 $D\,B + B\,D - C$
3.11 $4\,C\,A\,(B - D)$	3.12 $(B + D)\,(B - D)$

Sugestión: Pueden utilizarse las propiedades de las operaciones y los resultados que se van obteniendo en los primeros problemas para resolver los últimos.

Ejercicio 45.

Tema: Potencias de matrices. Traspuesta. Matrices simétricas y anti-simétricas.

1. Verificar que la siguiente matriz es idem-potente.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Verificar que la siguiente matriz es nul-potente y determinar su orden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Encontrar: $A^3 - A^2 + 3A - 2I$, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Verificar que la siguiente matriz es periódica y determinar su periodicidad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y k = 6, verificar que $(k\,A)' = k\,A'$.

6. Verificar que $(A\,B\,C)' = C'B'A'$ para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada <u>nxn</u>, entonces:

   7.1 $A + A'$ es una matriz simétrica

   7.2 $A - A'$ es una matriz anti-simétrica

   7.3 $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$. Es decir, cualquier matriz <u>nxn</u> puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una anti-simétrica.

8. a) Expresar el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

   b) Verificar que la siguiente matriz es la inversa del cuadro de coeficientes y resolver el sistema aplicando la fórmula $X = A^{-1}\,B$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

CAPITULO 12

<u>DETERMINANTES. INVERSA DE UNA MATRIZ</u>

<u>12.1 Determinantes.</u> Los determinantes son arreglos cuadrados de números en hileras y columnas que tienen un valor numérico de acuerdo con su definición. Las fórmulas para resolver los sistemas de ecuaciones lineales sugieren la definición de los determinantes, que simplifican notablemente la expresión para la solución general de los sistemas lineales.

Consideremos el sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquiera de los métodos de eliminación, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$