$$D = -4 \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4\,(20 + 8)$$

$$\therefore \quad D = -112$$

b) Numerador de $x_1 = N_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Aplicando el método de Chiò, con el elemento en primer hilera y última columna como pivote:

No. de hilera del pivote + No. de columna = 1 + 4 = 5. Entonces, le corresponde signo negativo.

$$N_{x_1} = - \begin{vmatrix} -5 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1/4$$

Aplicando de nuevo el método de Chiò, con el elemento en 2a. hilera y primer columna como pivote: (le corresponde signo negativo):

$$N_{x_1} = 4 \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = 4\,(-56) = -224$$

Entonces, $x_1 = \dfrac{-224}{-112} = 2$

c) Numerador de $x_2 =$

$$N_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Por el método de Chiò, con pivote encerrado en círculo:

$$N_{x_2} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la última columna:

$$N_{x_2} = -4 \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4\,(20 + 8) = -112$$

Entonces: $x_2 = \dfrac{-112}{-112} = 1$

d) Numerador de $x_3 = N_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Por el mismo camino que el anterior:

$$N_{x_3} = \begin{vmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4\,(-5 + 5) = 0$$

Entonces, $x_3 = \dfrac{0}{-112} = 0$

e) Sustituyendo x_1, x_2 y x_3 en la primera ecuación:

$$2 + 2 + 0 + x_4 = 1$$

$$\therefore \quad x_4 = -3$$

Entonces, la solución es:

$$x_1 = 2\,; \quad x_2 = 1$$
$$x_3 = 0\,; \quad x_4 = -3$$

<u>12.6 Inversa de una matriz por determinantes.</u> Una aplicación interesante de los determinantes al álgebra de matrices es la determinación de la inversa de multiplicación A^{-1} de una matriz A.

El teorema fundamental de determinantes para obtener la fórmula de la inversa es el siguiente:

Teorema: El producto de los elementos de una hilera cualquiera de un determinante, por los correspondientes cofactores de otra hilera, es cero.

En símbolos, si:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ entonces:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{kj} = 0 \quad \text{para todo } i \neq k$$

__Dem.__ La expresión $\Sigma\, a_{ij}\, C_{kj}$ es el desarrollo de Laplace de un determinante que tiene 2 hileras iguales. Entonces, por una de las propiedades fundamentales de los determinantes, su valor es cero.

Definamos ahora lo que se llama la __matriz adjunta__ A^* de una matriz cuadrada A.

__Def.__ La adjunta A^* de una matriz cuadrada A es la matriz de cofactores del determinante de la traspuesta de la matriz A.

En símbolos, sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La traspuesta de A es:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, por definición, la matriz adjunta A^* es:

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

En notación compacta:

Si $A = ((a_{ij}))$; $A' = ((a_{ji}))$; $A^* = ((C_{ji}))$

__Ejemplo.__ Encontrar la adjunta A^* de la matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

__Solución:__

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 14 & -6 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el producto de una matriz cuadrada A por su adjunta A*.

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots\cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots\cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots\cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{2j}, & \cdots\cdots, & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} C_{1j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} C_{2j}, & \cdots\cdots, & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} C_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} C_{1j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} C_{2j}, & \cdots\cdots, & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} C_{nj} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son todos iguales al desarrollo de Laplace por cofactores de las diferentes hileras del determinante de A, mientras que todos los demás elementos son desarrollos de determinantes que valen cero por el teorema fundamental que acabamos de demostrar. (Tienen 2 hileras iguales).

Entonces:

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= |A|\ I$$

Suponiendo que $|A|$ es diferente de cero, podemos dividir ambos lados entre $|A|$ para obtener:

$$\frac{A\ A^*}{|A|} = I$$

Asociando convenientemente:

$$A\left(\frac{1}{|A|}\ A^*\right) = I$$

Entonces por definición de la inversa A^{-1} de una matriz A, se tiene:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ A^*}$$

Entonces, la inversa de una matriz puede ser determinada, encontrando el valor del determinante de la matriz $|A|$ y los valores de los determinantes cofactores de la matriz traspuesta que proporcionan la adjunta A*. Este es un método práctico para encontrar A^{-1} cuando A es una matriz de pequeño orden ya que el cálculo de los determinantes cofactores se complica rápidamente cuando el orden de $|A|$ aumenta.

<u>Corolario</u>: Una condición necesaria para que A tenga inversa, es que $|A|$ sea diferente de cero.

<u>Ejemplo</u>. Consideremos la matriz A del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Encontramos:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 14 & -6 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= +42 + 2 = +44$$

De acuerdo con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, A^* = \frac{1}{+44}\begin{pmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 14 & -6 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{44} & \frac{17}{44} & \frac{13}{44} \\ \frac{14}{44} & -\frac{6}{44} & -\frac{2}{44} \\ \frac{5}{44} & \frac{1}{44} & -\frac{7}{44} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/44 & 17/44 & 13/44 \\ 14/44 & -6/44 & -2/44 \\ 5/44 & 1/44 & -7/44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

12.7 Demostración de la regla de Cramer. La regla de Cramer puede ahora ser deducida de la fórmula para resolver un sistema lineal cuadrado y la fórmula que acabamos de obtener para la inversa de la matriz del cuadro de coeficientes.

El sistema lineal cuadrado tiene la forma matricial: $Ax = B$. La solución general x está dada por: $x = A^{-1}B$. Sustituyendo $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, se tiene: $x = \frac{1}{|A|} A^*B$

Donde $A^* = ((C_{ji}))$; C_{ji} = Cofactor de a_{ji}.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Consideremos el producto A^*B:

$$A^*B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_{i1}\, b_i \\ \sum_{i=1}^{n} C_{i2}\, b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_{in}\, b_i \end{pmatrix}$$

Cada una de las sumatorias son desarrollos de Laplace de determinantes que se obtienen de A cambiando cada una de sus columnas por la matriz columna B. Ahora, en el enunciado de la regla de Cramer, estos determinantes son los numeradores de las incógnitas, que hemos designado por $N_{x_1}, N_{x_2}, \ldots, N_{x_n}$.

Es decir:

$$A^*B = \begin{pmatrix} N_{x_1} \\ N_{x_2} \\ \vdots \\ N_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en $x = \frac{1}{|A|}(A^*B)$,

se tiene la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} N_{x_1} \\ N_{x_2} \\ \vdots \\ N_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{x_1}}{|A|} \\ \frac{N_{x_2}}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{N_{x_n}}{|A|} \end{pmatrix}$$

12.8 Inversa por transformaciones elementales. La inversa de una matriz A puede ser determinada también utilizando transformaciones elementales en hileras. Empecemos con la siguiente definición:

Def. Las matrices elementales en hileras son las que se obtienen de la identidad por medio de una operación elemental en hileras.

<u>Ejemplo</u>. Para la identidad <u>3 x 3</u>: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices elementales: a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

etcétera.

Ahora, de esta definición, pueden verificarse los casos posibles del siguiente lema:

<u>Lema</u>. El efecto que produce una transformación elemental en hileras en una matriz cuadrada A, es el mismo que le produce la multiplicación por la izquierda por la correspondiente matriz elemental en hileras.

<u>Aplicación del lema para la determinación de la inversa A^{-1}</u>. Supongamos que la matriz A tiene inversa. Entonces, por transformaciones elementales en hileras, encontramos su forma reducida en escalón que debe ser una matriz identidad I para que A^{-1} exista según se verá enseguida. Al mismo tiempo, se van encontrando las matrices elementales en hileras correspondientes a las transformaciones elementales efectuadas. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_r$, las matrices elementales encontradas. Entonces, de acuerdo con el lema:

$$E_r \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots E_3 \left[E_2 \left(E_1 A \right) \right] \right\} = I$$

Por la ley asociativa:

$$(E_r E_{r-1} \ldots\ldots E_3 E_2 E_1) A = I$$

Entonces:

$$A^{-1} = E_r E_{r-1} \ldots\ldots E_3 E_2 E_1$$

Ahora, multiplicando por I ambos lados:

$$A^{-1} I = (E_r E_{r-1} \ldots\ldots E_3 E_2 E_1) I$$

De nuevo, por la ley asociativa:

$$A^{-1} = E_r \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots E_3 \left[E_2 \left(E_1 I \right) \right] \right\}$$

Es decir A^{-1} se obtiene aplicando a la matriz identidad, las transformaciones elementales en hileras que se necesitan para transformar la matriz A en la matriz identidad I.

Entonces, el cálculo de A^{-1} por transformaciones elementales puede hacerse de la siguiente manera:

1. Se empieza con la matriz A y la matriz I separadas por una línea vertical. $(A \mid I)$.

2. Se aplican transformaciones elementales en hileras a esta matriz doble tendiendo a encontrar la forma reducida en escalón de A hasta transformar A en I, lo cual siempre es posible cuando A^{-1} existe.

3. La inversa A^{-1} se encuentra en el lugar de la matriz I después de haber cumplido la condición anterior.

Es decir:

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$$

<u>Ejemplo</u>. Encontrar la inversa A^{-1} de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AI) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobación:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \quad - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 \quad\;\; + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Solución. En notación matricial, el problema es resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora, hemos encontrado en el ejemplo anterior que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Entonces, la respuesta es:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 42 \\ x_2 &= -26 \\ x_3 &= -11 \end{aligned}}$$

Comprobación.

1a. ecuación : $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$42 - 26 - 11 = 5$

$5 = 5$

2a. ecuación : $-x_2 + 2x_3 = 4$

$26 - 22 = 4$

$4 = 4$

3a. ecuación : $x_1 + 4x_3 = -2$

$42 - 44 = -2$

$-2 = -2$

12.9 Problemas de optimización. En las aplicaciones de la derivada parcial (Capítulo VII), hemos considerado el problema de la determinación de máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales. El método de los multiplicadores de Lagrange nos permite encontrar, por lo menos teóricamente, los posibles máximos y mínimos de la función. Cuando la naturaleza del problema implica la existencia de un máximo y las ecuaciones de Lagrange se satisfacen en un solo punto, entonces se deduce lógicamente que ese punto es el máximo buscado. Si el sistema de ecuaciones de Lagrange puede ser resuelto y tiene un número finito de soluciones, entonces se pueden probar las soluciones encontradas para determinar el máximo o el mínimo de la función, según el caso. Ahora, cuando el número de posibles máximos y mínimos es infinito, como sucede en los problemas de programación lineal, generalmente no es posible determinar el máximo o el mínimo de la función por medio del cálculo infinitesimal. Entonces, ha sido necesario idear nuevas técnicas para resolver el problema. El Algebra Lineal ha sido utilizada con éxito para resolver ciertos tipos de problemas de máximos o mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales. Por ahora, nos limitaremos a establecer definiciones y a considerar algunos ejemplos de programación lineal para ilustrar la organización de los datos y el planteo matemático del problema. El tema será estudiado con detalle en un curso posterior de matemáticas aplicadas a economía.

Def. 1. Problema general de optimización: Maximizar o minimizar una función de varias variables sujetas a condiciones laterales.

En símbolos matemáticos:

Maximizar o minimizar: $z = f(x, y, \dots, w)$ si las variables están sujetas a las condiciones laterales:

$$\begin{aligned} \phi_1 (x, y, \dots, w) &= 0 \\ \phi_2 (x, y, \dots, w) &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \phi_m (x, y, \dots, w) &= 0 \end{aligned}$$

Def. 2. Modelo lineal. Maximizar o minimizar una función lineal de varias variables sujetas a condiciones laterales lineales.

Nota. Las condiciones laterales lineales en un modelo lineal pueden ser ecuaciones, desigualdades, ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, ecuaciones de diferencia, etc.

Def. 3. Programación lineal. Maximizar o minimizar una función lineal de varias variables sujetas a un sistema de ecuaciones y (o) desigualdades lineales.

En símbolos matemáticos, dos formas típicas de problemas de programación lineal son las siguientes:

1 Maximizar: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

Sujeta a:
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0 \quad ; \quad x_2 \geqslant 0 \ ; \ \dots\dots \ ; x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Utilizando notación matricial, sea:

$$C = (c_1, c_2, \dots\, c_n) \ ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces el problema es:

Maximizar: $z = CX$

Sujeta a : $AX \leqslant b \ ; \quad X \geqslant 0$

2 Minimizar: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

Sujeta a:
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geqslant b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0; \ x_2 \geqslant 0; \dots\dots; \quad x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

o utilizando la misma notación matricial que antes:

$$\text{Minimizar} \quad Z = CX$$
$$\text{Sujeta a}: \quad AX \geqslant b \quad ; \quad X \geqslant 0$$

Breve historia. Las nuevas técnicas de optimización son relativamente recientes. En 1929, el matemático alemán J. Von Newman publicó su primer ensayo sobre Teoría de Juegos, sugiriendo que sus ideas podían ser utilizadas para resolver problemas de economía. Sin embargo, el ensayo fue tan abstracto que solamente unas cuantas personas pudieron entenderlo. Esto provocó inquietud entre los economistas de la época que empezaron a preocuparse seriamente por el uso de las matemáticas en economía y de 1930 a 1940 se observa una influencia notable de las matemáticas en problemas de tipo económico y en la teoría económica misma. En 1944, habiendo emigrado a Estados Unidos, J. Von Newman y O. Margerstern publicaron su libro titulado "The Theory of Games and Economic Behavior". Este libro atrajo la atención de gran cantidad de investigadores economistas y matemáticos que reconocieron la importancia de las ideas de Von Newman. Se ha demostrado que los problemas de optimización que hemos definido como problemas de programación lineal tienen la misma estructura matemática que los juegos de dos personas. En 1947, el profesor Dantzig inventó un proceso numérico para resolver el problema general de programación lineal que se conoce como el método Simplex. El profesor Dantzig trabajaba entonces para la fuerza aérea de los Estados Unidos y el método Simplex fue utilizado primeramente para la optimización de técnicas militares. A partir de 1950 se han desarrollado notablemente nuevas técnicas de optimización y actualmente se trabajo en problemas no-lineales de optimización.

Consideremos algunos ejemplos de programación lineal para ilustrar la organización de los datos necesarios y el planteo matemático del problema, así como las limitaciones que resultan de las consideraciones teóricas establecidas.

12.10 Problema de la dieta. Supongamos que se desea obtener una dieta semanal para alimentar a un grupo de estudiantes en un internado de manera que el costo sea mínimo y al mismo tiempo se proporcionen los nutrientes necesarios (calorías, vitaminas, etc.) para que sea una dieta saludable.

Consideremos un grupo de alimentos básicos que llamaremos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Denotemos por $N_1, N_2, \ldots, N_m$, los componentes principales de los alimentos considerados, (calorías, proteínas, vitaminas, etc.). Sea a_{ij} el número de unidades del nutriente N_i contenidas en el alimento A_j. $(i = 1, 2, \ldots m \,;\, j = 1, 2, \ldots, n)$. Llamaremos c_j el costo por unidad del alimento A_j y denotaremos por x_j al número de unidades del alimento A_j que debe contener la dieta óptima. Por último, sea b_i el número mínimo de unidades del nutriente N_i que proporcionan una dieta saludable al grupo de estudiantes.

Organización de los datos. En los problemas de programación lineal es muy conveniente organizar los datos en una tabla para facilitar el planteo del problema. Para el problema de la dieta, y, en general, para cualquier problema que tenga una estructura semejante, una presentación tabular conveniente es la siguiente:

Costo por Unidad de A_j	c_1	c_2	....	c_n	
Alimentos / Nutrientes	A_1	A_2	....	A_n	No. mínimo de unidades de N_i
N_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	b_1
N_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
N_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_m
No. de unidades de A_j en dieta óptima	x_1	x_2	....	x_n	