Planteo del problema. E l problema es encontrar las cantidades de los distintos alimentos de la dieta, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que satisfagan las condiciones establecidas. Es decir:

Minimizar: $c = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

Nota: Las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deben ser no-negativos por la naturaleza del problema. Entonces se tiene la condición adicional: $x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

En notación matricial, el planteo se reduce a:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Minimizar : } c = CX \\ \text{Sujeta a : } AX \geqslant b \\ \qquad\qquad\quad X \geqslant 0 \end{array}}$$

Obsérvese que el problema de la dieta tiene una estructura semejante a la forma 2 considerada en la definición del problema general de programación lineal. A la función lineal, que se va a minimizar en este caso, se le llama función objetiva u objetivo del problema y al conjunto de relaciones entre las incógnitas, que son desigualdades en el problema de la dieta, se le llama conjunto de restricciones.

La solución del problema no será discutida por ahora, pero se pueden deducir algunas observaciones sobre la función objetivo (función de costo total de la dieta) y sobre los resultados de un problema específico. Por ejemplo, los costos de los alimentos dependen, en cierta forma, de las cantidades que se vayan a comprar para proporcionar la dieta. El resultado puede contener alimentos que no proporcionen una dieta apetecible, etc. Estos son aspectos prácticos del problema que no deben ser sub-estimados en los problemas de optimización.

12.11 Problema de producción. Una fábrica dispone de m máquinas $M_1, M_2, \ldots, M_m$, para la producción de n artículos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Sea a_{ij} el número de horas de la máquina M_i necesarias para fabricar una unidad del artículo A_j. Supongamos que el número de horas-máquina disponibles por semana es limitado de manera que b_i es el número máximo de horas que puede trabajar la máquina M_i por semana. Si P_j es el precio d del artículo A_j, incluyendo utilidad, determinar la producción semanal que proporcione el máximo ingreso total.

Tabulación.

Denotemos por x_j el número de unidades del artículo A_j que deberá fabricarse para obtener máximo ingreso total. En una tabla, los datos del problema pueden presentarse de la siguiente manera:

No. de Unidades de A_j	x_1	x_2	....	x_n	
Artículos / Máquinas	A_1	A_2	....	A_n	No. de horas-máquinas disponibles
M_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	b_1
M_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
M_n	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_m
Precio por unidad de A_j	P_1	P_2	....	P_n	

Planteo. De acuerdo con el enunciado, el planteo matemático del problema es el siguiente:

$$\text{Maximizar:} \quad I = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n$$

$$\text{Sujeta:} \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

Puesto que los x_j deben ser no-negativos, se tiene la condición adicional:

$$x_j \geqslant 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

En notación matricial, el problema se reduce a:

$$\text{Maximizar:} \quad I = PX$$

$$\text{Sujeta a:} \quad \begin{cases} A X \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

12.12 Problema de transporte. Una compañía que fabrica refrigeradores tiene 3 almacenes A_1, A_2, A_3, distribuídos en cierta zona geográfica. Supongamos que las existencias en los almacenes son 20, 40 y 40 unidades respectivamente, cuando sus cinco tiendas T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5, solicitan 20, 10, 15, 30 y 25 unidades respectivamente. Los costos de transporte por unidad de los almacenes a cada una de las tiendas son los siguientes:

Costos/ Unidad	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	100	30	60	45	35
A_2	40	30	40	50	55
A_3	95	60	30	35	40

El problema es determinar cuántas unidades deberán transportarse de cada almacén a cada tienda de manera que el costo total de transporte sea mínimo y que se satisfagan las demandas de las tiendas.

Tabulación. Además de la tabla de costos unitarios, podemos reunir los demás datos del problema en la siguiente tabla:

Tiendas → / Almacenes ↓	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Cantidad disponible en A_i
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	20
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	40
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	40
Cantidad demandada por T_j	20	10	15	30	15	

x_{ij} = No. de unidades que deberán transportarse de A_i a T_j de manera que el costo de transporte sea mínimo.

Planteo: La estructura de este problema es diferente a la de los anteriores y su solución es, en general, más complicada debido al número de incógnitas que intervienen. Sin embargo, obsérvese que los artículos considerados son indivisibles, es decir los x_{ij} deben ser números enteros no-negativos. Entonces el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad C = {} & 100\, x_{11} + 30\, x_{12} + 60\, x_{13} + 45\, x_{14} \\ & + 35\, x_{15} + 40\, x_{21} + 30\, x_{22} + 40\, x_{23} \\ & + 50\, x_{24} + 55\, x_{25} + 95\, x_{31} + 60\, x_{32} \\ & + 30\, x_{33} + 35\, x_{34} + 40\, x_{35} \end{aligned}$$

Sujeta a:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leqslant 20 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} \leqslant 40 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} \leqslant 40 \\ x_{ij} \geqslant 0; \; i = 1,2,3, \; ; \; j = 1,2,3,4,5 \; ; \; x_{ij} : \text{Enteros} \end{cases}$$

Solución por tanteos. El problema puede resolverse por tanteos, en este caso particular, si se observa que la suma de las existencias en los almacenes es igual a la suma de las cantidades demandadas por las tiendas. Entonces, podemos intentar una solución que satisfaga las igualdades en el sistema de restricciones para las incógnitas. Si empezamos por satisfacer las demandas mayores al menor costo de transporte posible, encontramos la siguiente solución en la que se han tomando en cuenta las existencias en almacenes y los costos de transporte:

Tiendas / Almacenes	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Existencia en almacenes
A_1	0	0	0	0	20	20
A_2	20	10	10	0	0	40
A_3	0	0	5	30	5	40
Demanda en tiendas	20	10	15	30	25	

El cuerpo de la tabla contiene los valores de los x_{ij}. De la solución de este sencillo problema de transporte se deduce que no siempre será posible aplicar simple deducción lógica para cualquier problema de transporte porque la estructura del problema puede complicarse demasiado.

La generalización del problema de transporte para m almacenes $A_1, A_2, \ldots, A_m$ y n tiendas $T_1, T_2, \ldots, T_n$, es inmediata del ejemplo considerado y puede hacerse como ejercicio.

Ejercicio 46.

Tema: Determinantes. Aplicación a sistemas de ecuaciones lineales.

1. Encontrar el valor de los siguientes determinantes:

1.1 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 16 & 5 \end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.4 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ -2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$

1.5 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 1.6 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

1.7 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por determinantes. (Regla de Cramer).

2.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = -6 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$ *2.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 11 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

3. Resolver los sistemas del problema anterior (2.1 a 2.4) por el método de Gauss y el método de Gauss-Jordán.

Ejercicio 47.

Tema: Inversa de una matriz por determinantes.

1. Verificar, por comprobación directa que $A\,A'$ es una matriz simétrica:

1.1 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

2. Demostrar que la adjunta de la adjunta de una matriz 2 X 2 es igual a la matriz dada.

3. Verificar el resultado del problema 2 para las matrices:

3.1 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 3.2 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

4. Verificar que la matriz adjunta de la siguiente matriz 3 X 3 es igual a la matriz dada.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Encontrar la inversa de las siguientes matrices por determinantes:

5.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ 5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 5.4 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

Ejercicio 48.

Tema. Inversa por transformaciones elementales. Solución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados por la inversa.

1. Encontrar la inversa A^{-1} de las siguientes matrices por transformaciones elementales en hileras:

1.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 1.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 1.4 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por la inversa de la matriz de coeficientes:

2.1 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_3 = 5 \end{cases}$, 2.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$