Sáenz Q.

MATEMATICAS
PARA
ECONOMISTAS

Alfonso Martínez P.
Fac de Economía

Mathematical Analysis for Economists. R. G. D. Allen

Calculus - F. Ayres Schawn Publishing Co.

Cálculo Diferencial e Integral. Granville, Smith y Longley
UTHEA

(10)

1.- funciones y Gráficas
2.- frecuencias y límites de Frecuencias ✓
3.- Límites de funciones
X 4.- Derivada proceso delta - Indeterminación
5.- Reglas para derivar
6.- Derivadas Sucesivas

Aplicación
Gráficas

~~Ecuación de~~

$\frac{x_2+x_1}{2}$

$\frac{y_2+y_1}{2}$ Punto Medio entre dos punta

Primera edición: Agosto de 1964.
Segunda edición: Enero de 1966.

MATEMATICAS PARA

ECONOMISTAS.

Eladio Sáenz Quiroga

Profesor de matemáticas en la Facultad de Economía y en la Facultad de ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Nuevo León.

P r ó l o g o

El uso de las matemáticas se ha generalizado en los últimos años, no sólo como herramienta de análisis de problemas de economía, sino como auxiliar en el estudio de la teoría económica misma y de sus materias relacionadas, especialmente la estadística. El propósito de estos apuntes es proporcionar a los estudiantes de economía el material básico de matemáticas, incluyendo algunas de sus aplicaciones a economía en cada tema.

El texto requiere conocimientos elementales de álgebra, trigonometría y geometría analítica. Su contenido comprende fundamentalmente cálculo diferencial e integral y álgebra de matrices. El primer capítulo presenta un breve repaso de los conceptos más importantes de geometría analítica para el estudio del cálculo. La parte correspondiente al cálculo diferencial incluye el estudio de funciones de varias variables y sus aplicaciones a economía. El cálculo integral se reduce a funciones de una variable, para continuar con un capítulo de series que constituye un complemento importante para el estudio de funciones. El estudio del álgebra de matrices y su relación con la discusión y solución de sistemas de ecuaciones lineales aparece en los últimos dos capítulos, terminado con una breve introducción a programación lineal, a manera de propaganda para el tema. En el desarrollo de todos los temas, se dedica especial atención a la utilidad de las matemáticas para el entendimiento de algunos conceptos de la teoría económica y al análisis de problemas específicos en las aplicaciones.

El material del texto, incluyendo la solución completa de los ejercicios, fue cubierto totalmente en un curso anual con 3 horas de teoría y 6 de ejercicios por semana.

La realización de estos apuntes se debe en gran parte a las personas que me animaron y me recomendaron para lograr experiencias que estimo de manera especial. Durante el año escolar 1961-1962 realicé estudios de matemáticas, economía y estadística en la Universidad de California, en Berkeley, gracias a una beca gestionada por la Srita. Consuelo Meyer, a quien expreso principalmente mi gratitud. Pasé dos veranos en la Ciudad de México, estudiando matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma, enviado por el Ing. Roberto Treviño y el Ing. Rafael Serna. Por último, participé como Profesor en el IV Curso Intensivo de Capacitación en Problemas de Desarrollo Económico y Evaluación de Proyectos, recomendado por el Lic. Víctor L. Urquidi. Reciban estas personas el mérito, si es que tiene alguno, de este modesto esfuerzo. En esta segunda edición se han corregido errores de la primera edición. Se incluye al final las respuestas de algunos de los problemas de los ejercicios. Los problemas que pueden ser eliminados por ser especialmente difíciles ó elaborados, han sido indicados con un asterisco (*).

Monterrey, N. L., noviembre de 1965.

Eladio Sáenz Quiroga

I N D I C E   G E N E R A L

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE GEOMETRIA ANALITICA

<u>Introducción</u>. La geometría analítica relaciona el álgebra con la geometría, resolviendo problemas geométricos por métodos algebraicos y utilizando la geometría para resolver ó facilitar la solución de problemas algebraicos.

Desde antes de la era cristiana, los griegos que eran esencialmente geómetras y los árabes que eran algebristas, intercambiaban problemas iniciando de manera informal las relaciones entre el álgebra y la geometría que dieron lugar a la geometría analítica. Sin embargo, hasta el siglo XVII no había sido escrito un tratado formal de la geometría analítica y fué René Descartes el primero que lo hizo, incorporando de esta manera una nueva rama de las matemáticas a las ciencias exactas.

La relación entre conceptos geométricos y conceptos algebraicos permite identificar unos con otros dando lugar a una serie de metáforas que encontraremos desde el principio.

<u>Escala de números reales</u>. Empezaremos por identificar los números reales con los puntos de una línea recta. Consideremos una recta infinita en ambas direcciones y seleccionemos un punto arbitrario que llamaremos origen y le haremos corresponder el número cero. A la derecha y a intervalos iguales hacemos corresponder puntos a números enteros positivos. De la misma manera, hacemos corresponder puntos a la izquierda del origen con números enteros negativos, como indica la figura 1.1.

Fig. 1.1

Ahora, cualquier número real, racional ó irracional puede hacerse corresponder a uno y sólo un punto de la recta y viceversa logrando de esta manera una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta.

1.1 Coordenadas rectangulares. Hemos identificado cada punto de una recta infinita con un número real. Veamos ahora como René Descartes ideó un sistema de referencia para identificar cada punto de un plano infinito con una pareja de números reales y viceversa.

Se trazan dos ejes perpendiculares, uno horizontal y el otro vertical, que llamaremos eje de las X y eje de las Y respectivamente. A la intersección de éstos dos ejes le llamaremos origen y corresponderá al cero de las escalas numéricas sobre cada uno de los ejes como se indica en la figura 1.2.

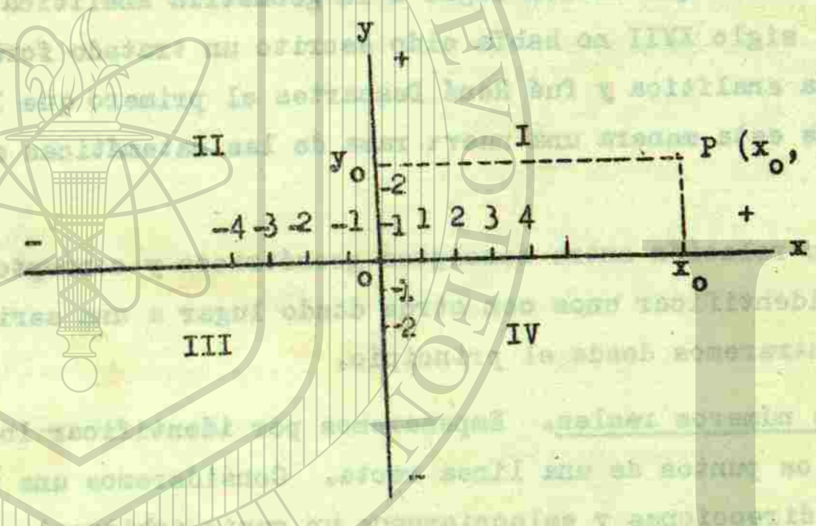


Fig. 1.2

Consideraremos un punto arbitrario P, en el plano. El punto será identificado por una pareja ordenada de números reales (x_o, y_o) en la que x_o es el número correspondiente al pié de la perpendicular trazada de P al eje de las X y y_o es el número correspondiente al pié de la perpendicular trazada de P al eje de las Y.

Inversamente, dada una pareja ordenada de números reales (x_o, y_o), el punto correspondiente se localiza levantando perpendiculares en los puntos x_o y y_o sobre el eje X y el eje Y respectivamente hasta encontrar su intersección.

El sistema de referencia establecido divide el plano infinito en cuatro cuadrantes que llamaremos I, II, III y IV de acuerdo como se indica en la figura 1.2. Así, el punto P (x_o, y_o) está en el primer cuadrante. A la pareja ordenada de números reales se les llama coordenadas del punto y para cada uno de los números reales que forman la pareja ordenada usaremos la siguiente notación:

x_o = Abscisa del punto P

y_o = Ordenada del Punto P

Observación. Cualquier punto del primer cuadrante tiene sus 2 coordenadas positivas. En el segundo cuadrante, la abscisa es negativa y la ordenada es positiva. En el tercer cuadrante, las dos coordenadas son negativas y en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada es negativa.

1.2 Distancia entre 2 puntos. Consideremos 2 puntos arbitrarios P y Q que para comodidad situaremos en el primer cuadrante.

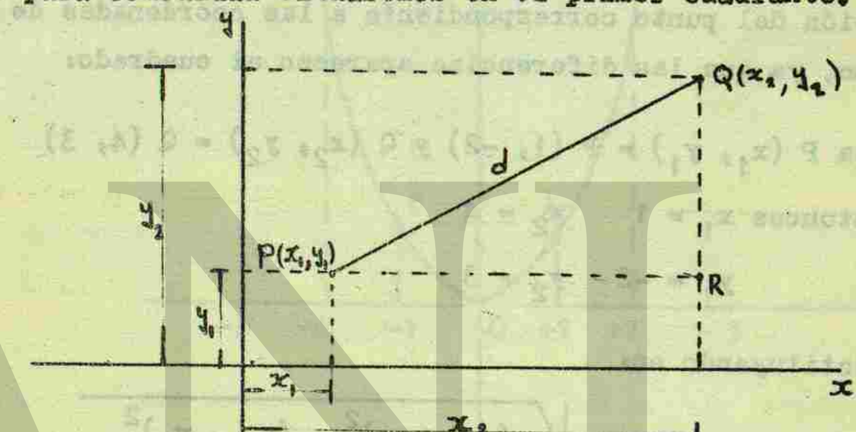


Fig. 1.3

Se trazan las perpendicualres de los puntos P y Q a los ejes, determinando las abscisas y ordenadas de los puntos que, de acuerdo con la definición, corresponden a las distancias marcadas en la figura. Según la construcción geométrica, P Q R es un triángulo rectángulo cuyos catetos son $PR = x_2 - x_1$ y $QR = y_2 - y_1$. Entonces la hipotenusa puede ser encontrada por el teorema de Pitágoras obteniendo de ésta manera una fórmula para la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ *

Ejemplo: Encontrar la distancia entre los puntos P (1, -2) y Q (4, 3)

Solución: En problemas de geometría analítica es siempre conveniente dibujar una figura esquemática:

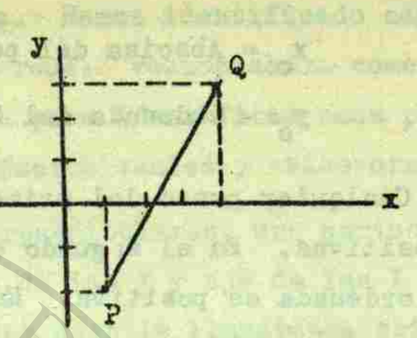


Fig. 1.4

De acuerdo con la fórmula de la distancia, es indiferente la selección del punto correspondiente a las coordenadas de subíndice uno, ya que las diferencias aparecen al cuadrado:

Sea $P(x_1, y_1) = P(1, -2)$ y $Q(x_2, y_2) = Q(4, 3)$

Entonces $x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

$y_1 = -2 \quad y_2 = 3$

Sustituyendo en:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9 + 25}$$

$$\underline{d = \sqrt{34}}$$

1.3 Gráficas de ecuaciones.

Consideremos ahora la relación entre una ecuación indeterminada con 2 incógnitas y una gráfica en el plano.

Def. La gráfica de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Ejemplo. Sea la ecuación indeterminada siguiente:

$$y = 4x^2$$

Esta ecuación tiene una infinidad de soluciones reales porque para cada valor que le demos a x encontramos un correspondiente valor de y para formar una solución. Tabulemos algunas de las soluciones:

Puntos	x	y
O	o	o
A	1	4
B	2	16
C	-1	4
D	-2	16

Dando valores enteros a x encontramos para $x = 0$, $y = 0$. Es decir, el origen es solución de la ecuación. Después para valores a derecha ó izquierda encontramos simetría en los valores de y y observamos que crecen a medida que aumentamos x. Graficando los puntos y trazando una curva suave a través de ellos obtenemos la gráfica ó curva correspondiente a la ecuación:

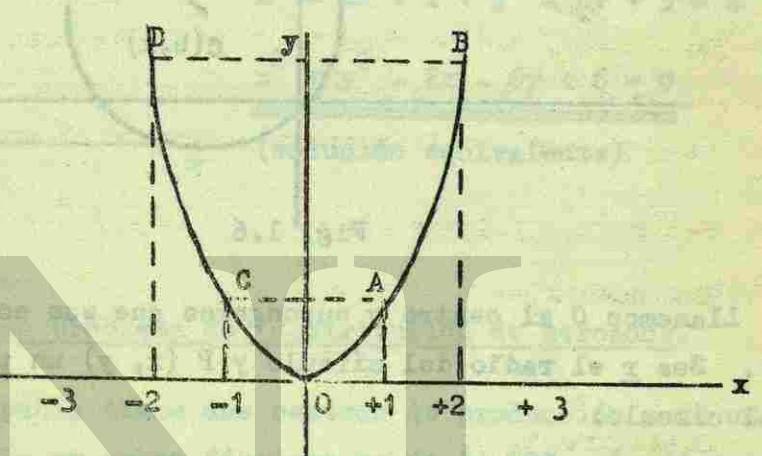


Fig. 1.5

Observación. Aun cuando la ecuación propuesta $y = 4x^2$ tiene una infinidad de soluciones, éstas siguen cierta ley de formación porque para cada valor de x, el valor de y es precisamente cuatro veces el cuadrado de x obteniéndose una curva que contiene una infinidad de puntos ligados por cierta ley de formación, que es la ecuación misma.

Ahora, si se tiene un conjunto de puntos en el plano con ciertas características comunes, es posible encontrar la ecuación de la curva que determinan. Consideremos por ejemplo el círculo:

1.4 Def. Círculo. Es una curva cerrada en el plano cuyos puntos están situados a igual distancia de un punto fijo llamado centro. (A la distancia de los puntos al centro se le llama radio)

En nuestro sistema de referencia, la expresión geométrica de un círculo arbitrario es la siguiente:

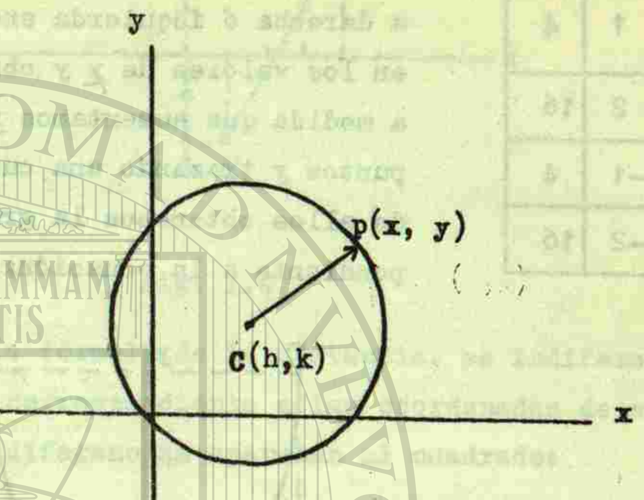


Fig. 1.6

Llamemos C al centro y supongamos que sus coordenadas son (h, k). Sea r el radio del círculo y P (x, y) un punto arbitrario del círculo.

De acuerdo con la definición, la distancia del centro C a cualquier punto debe ser igual a r.

$$CP = r$$

Con la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sea r = d ; C (h, k) ; P (x, y). Sustituyendo:

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

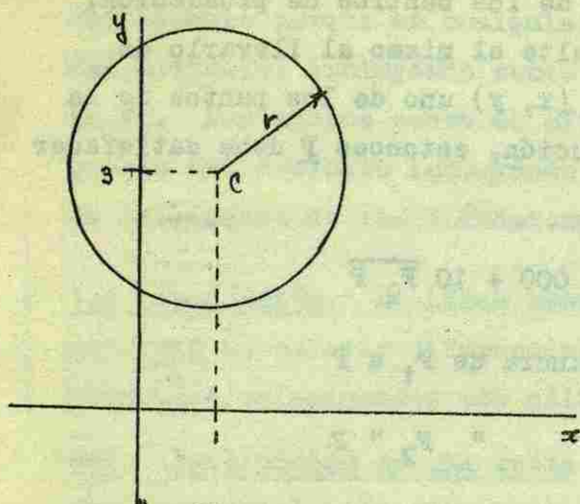
Elevando al cuadrado:

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Hem s encontrado así una expresión algebraica para el círculo, que es una figura geométrica. La ecuación del círculo es entonces:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación del círculo con centro en C (1, 3) y radio r = 2. (fig. 1.7)



F I G. 1.7

$$\overset{h\ \ k}{C\ (1,\ 3)}\ ;\ r = 2$$

$$\underline{\underline{(x - 1)^2 + (x - 3)^2 = 4}} \text{ (solución)}$$

ó desarrollando y simplificando:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$$

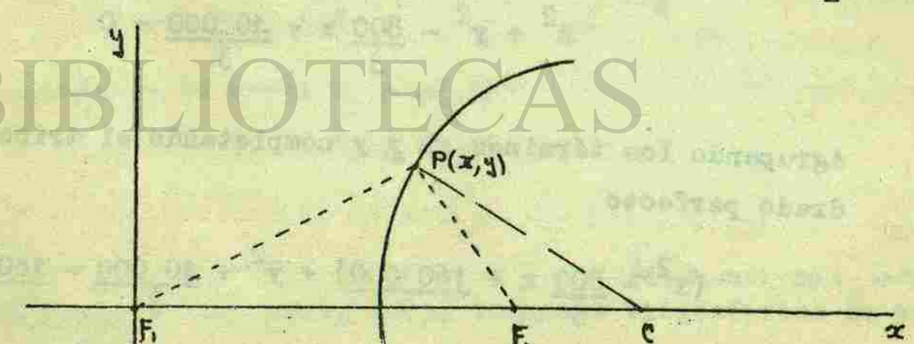
$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0}}$$

(solución equivalente)

*1.5 Aplicación a un problema de distribución de mercados.

Problema. Una compañía tiene dos centros de producción para un artículo cuyo precio en ambas fábricas es de $3,000. La distancia entre los dos centros de producción es de 100 kilómetros y los costos de transporte aéreo por artículo y por kilómetro son $5 para una fábrica y $10 para la otra. Determinar las áreas de distribución para cada fábrica de manera que los precios, incluyendo costos de transporte, sean lo más bajo posibles para cualquier lugar.

Solución. Situemos al primer centro de producción F_1 en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y al otro centro de producción F_2 sobre el eje de las x a la derecha de F_1 (fig. 1.8)



F I G. 1.8

Entonces F_1 tiene coordenadas (0, 0) y F_2 tiene coordenadas (100, 0), tomando un kilómetro como unidad de coordenadas.

Encontremos el límite ó frontera de las 2 zonas cuyos puntos estén situados a una distancia de los centros de producción, tal que el precio del artículo resulte el mismo al llevarlo de cualquiera de las fábricas. Sea P (x, y) uno de los puntos de la frontera de las 2 zonas de distribución, entonces P debe satisfacer la siguiente condición:

$$3\,000 + 5\,\overline{F_1 P} = 3\,000 + 10\,\overline{F_2 P}$$

donde: $\overline{F_1 P}$ = distancia de F_1 a P

$\overline{F_2 P}$ = " " F_2 " P

Entonces, por la fórmula de la distancia:

$$\overline{F_1 P} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De la misma manera:

$$\overline{F_2 P} = \sqrt{(x - 100)^2 + y^2}$$

Sustituyendo en la condición establecida:

$$5\sqrt{x^2 + y^2} = 10\sqrt{(x - 100)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$25\,(x^2 + y^2) = 100\,(x^2 - 200x + 10\,000 + y^2)$$

Simplificando: $3x^2 + 3y^2 - 800x + 40{,}000 = 0$

Dividiendo entre 3:

$$x^2 + y^2 - \frac{800}{3}x + \frac{40\,000}{3} = 0$$

Agrupando los términos en x y completando el trinomio cuadrado perfecto

$$\left(x^2 - \frac{800}{3}x + \frac{160\,000}{9}\right) + y^2 + \frac{40\,000}{3} - \frac{160\,000}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{400}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{40\,000}{9} = \left(\frac{200}{3}\right)^2$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en:

$$C\ \left(\frac{400}{3}, 0\right);\ r = \frac{200}{3}$$

Entonces, la zona de distribución para F_2 es el interior del círculo porque en cualquier punto fuera del círculo, el precio del artículo, incluyendo costo de transporte, es menor si se lleva de F_1. Los puntos sobre el círculo son "neutrales", es decir, el precio del artículo incluyendo transporte, es el mismo si se lleva de cualquiera de las 2 fábricas.

1.6 Línea Recta. La línea recta es un concepto geométrico de gran utilidad en cálculo diferencial, por lo que estudiaremos algunos conceptos relacionados con ella.

Def. Inclinación de una recta es el ángulo que se forma trazando una horizontal a la derecha a partir de un punto cualquiera de la recta y girándola en sentido contrario al giro normal de las manecillas de un reloj hasta encontrar a la recta, como se ilustra en la figura 1.9.

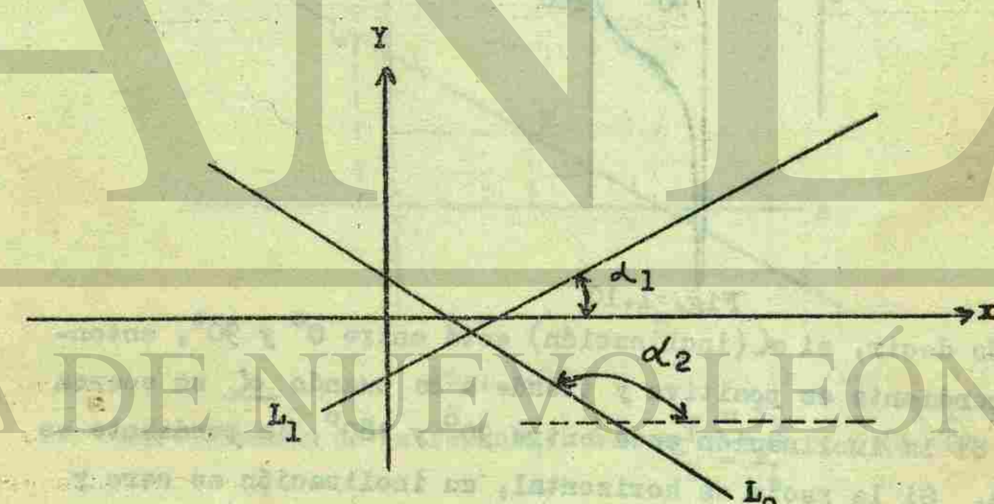


Fig. 1.9

Inclinación de la recta $L_1 = \alpha_1$

" " " " $L_2 = \alpha_2$.

trigonometrica Grey.

Def. Pendiente de una recta es la tangente trigométrica de su inclinación.

Llamaremos m a la pendiente de una recta. En la gráfica una recta, si es horizontal su inclinación es de 0° (por convención)

anterior.

Pendiente de $L_1 = m_1 = \tan \alpha_1$

Pendiente de $L_2 = m_2 = \tan \alpha_2$

Observación. La inclinación de una recta es un ángulo entre 0 y 180 grados. Ahora, la pendiente es la tangente trigométrica de la inclinación y por lo tanto puede tener un valor entre $-\infty$ y $+\infty$ que es la variación de la tangente trigométrica cuando el ángulo toma valores de 0° a 180°. Recordemos la gráfica de tangente de un ángulo α estudiada en trigonometría.

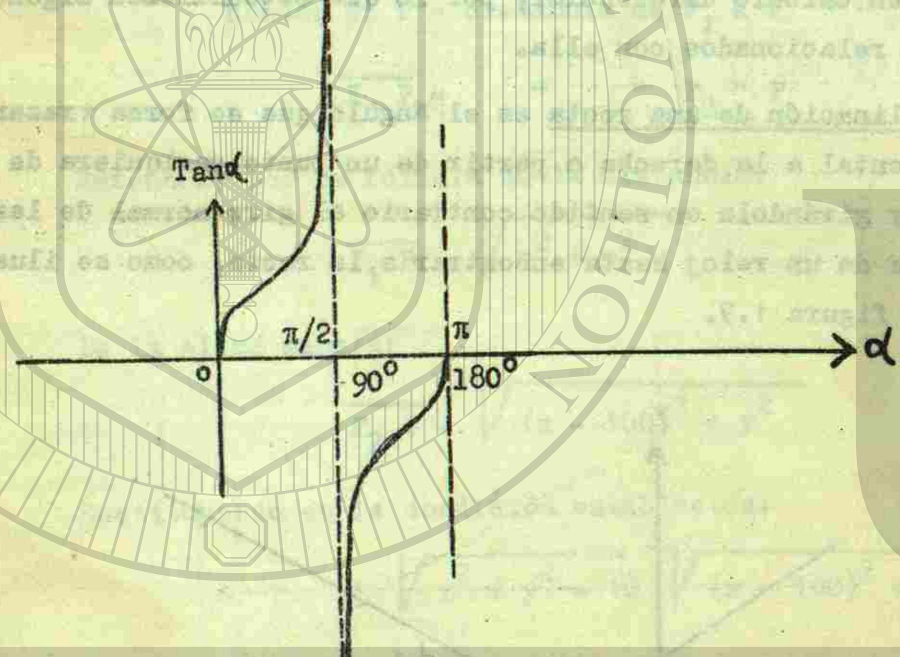


Fig. 1.10

Es decir, si α (inclinación) está entre 0° y 90°, entonces la pendiente es positiva y tiende a ∞ cuando α se acerca a 90°. Si la inclinación está entre 90° y 180°, la pendiente es negativa. Si la recta es horizontal, su inclinación es cero y su pendiente es cero también. Si la recta es vertical, su inclinación es 90° y su pendiente es infinito.

Fórmula de la pendiente. Consideremos la recta L determinada por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ como se indica en la figura 1.11.

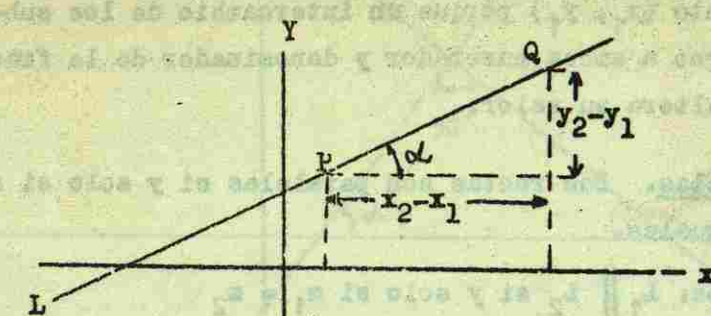


Fig. 1.11

El ángulo α es la inclinación de la recta y por definición de pendiente tenemos:

Pendiente de $L = m = \tan \alpha$

$$\therefore\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo: Encontrar la pendiente de la recta que pasa por P (4, 2) y Q (-1, 5). (Fig. 1.12).

Solución.

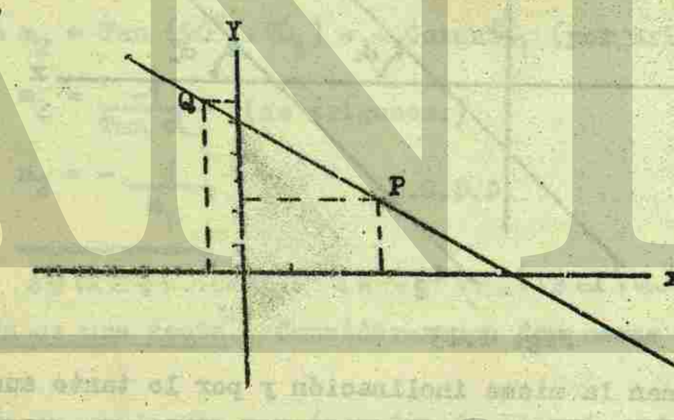


Fig. 1.12

Sustituyendo en la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $P\ (\overset{x_1}{4}, \overset{y_1}{2})$; $Q\ (\overset{x_2}{-1}, \overset{y_2}{5})$

$$\therefore\ m = \frac{5 - 2}{-1 - 4} = \frac{3}{-5}$$

$$m = -\frac{3}{5}$$

Nota: En la fórmula de la pendiente, igual que en la fórmula de la distancia, es indiferente considerar cualquiera de los puntos

P ó Q como el punto (x_1, y_1) porque ún intercambio de los sub-índices, cambia signo a ambos numerador y denominador de la fracción lo cual no altera su valor.

1.7 Rectas paralelas. Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

En símbolos: $L_1 \parallel L_2$ si y solo si $m_1 = m_2$

Demostración. Un teorema de geometría nos dice que si dos rectas son paralelas, entonces tienen ángulos correspondientes iguales al ser cortadas por una transversal.

Supongamos que las dos rectas L_1 y L_2 son paralelas. Entonces tienen ángulos correspondientes iguales con una transversal horizontal como indica la figura 1.13.

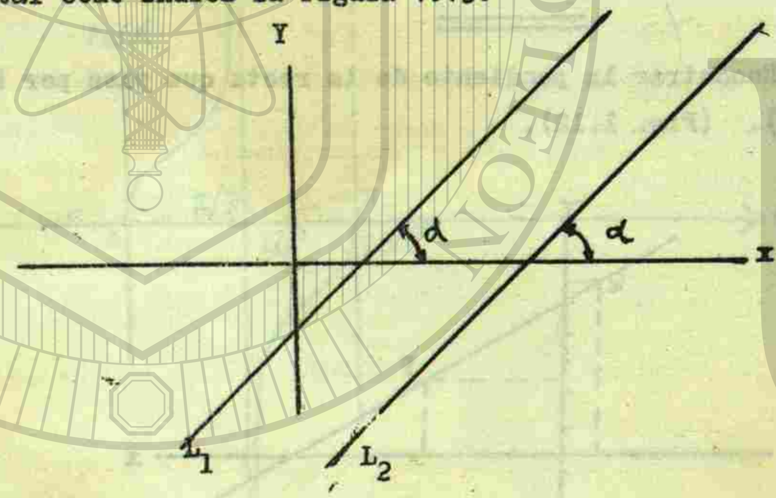


Fig. 1.13

Entonces tienen la misma inclinación y por lo tanto sus pendientes son iguales, es decir: $m_1 = m_2$.

Inversamente, si $m_1 = m_2$, sus inclinaciones son iguales y las rectas son paralelas.

Rectas perpendiculares. Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una es la recíproca y de signo contrario de la pendiente de la otra.

Demostración. Sean las rectas perpendiculares L_1 y L_2 como indica la figura 1.14.

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 = \overline{m_2}$

a) Si $L \parallel y$ entonces la ecuación es $X = X_0$

b) Si $L \parallel X$ " " " $y = y_0$

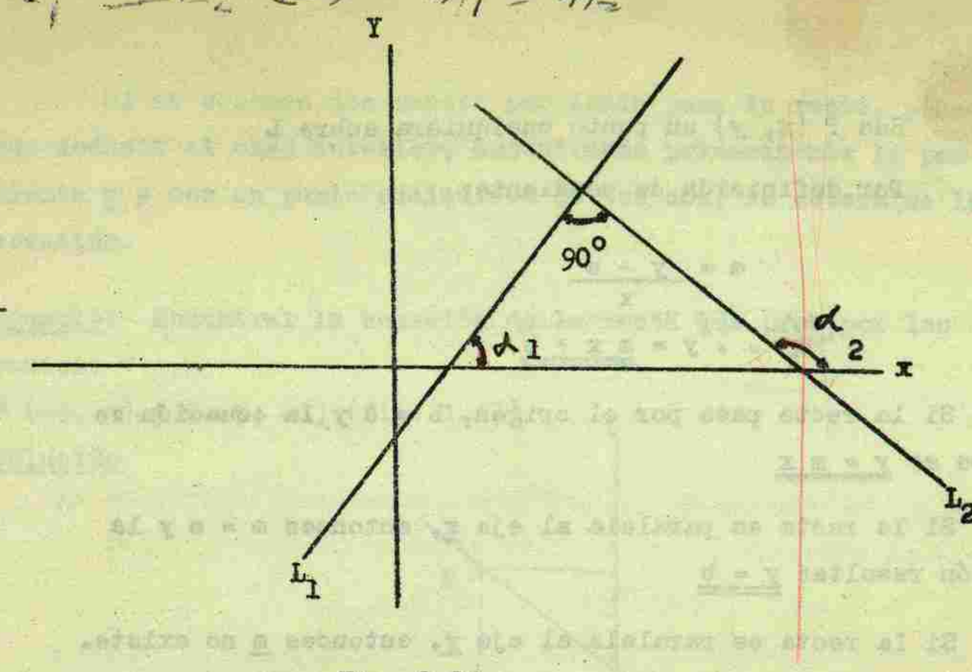


Fig. 1.14

Pendiente de $L_1 = m_1 = \text{Tan}\,\alpha_1$

Pendiente de $L_2 = m_2 = \text{Tan}\,\alpha_2$

ahora $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ (por trigonometría).

$\therefore m_2 = \text{Tan}\,(90^\circ + \alpha_1) = -\,\text{Cotan}\,\alpha_1$ (por trigonom.)

$\therefore m_2 = \dfrac{-1}{\text{Tan}\,\alpha_1}$ (de trigonom.)

$\therefore m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ L.C.D.D.

La demostración en el sentido inverso es trivial.

1.8 Ecuación de una recta. Consideraremos dos casos fundamentales:

I. Dada su pendiente $\underline{m}$ y la ordenada al origen $\underline{b}$ (fig. 1.15)

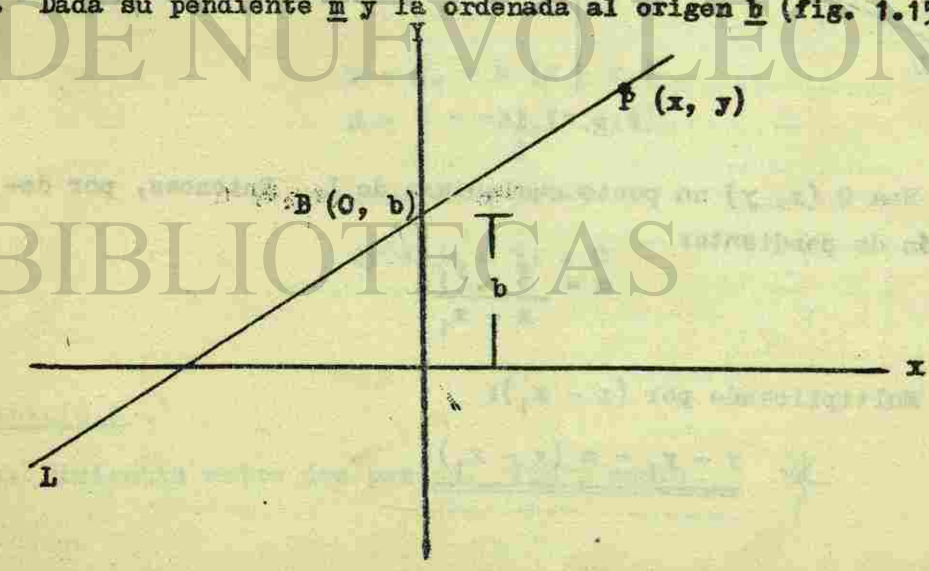


Fig. 1.15

Sea P (x, y) un punto cualquiera sobre L

Por definición de pendiente:

$$m = \frac{y - b}{x}$$

$$\therefore \; \underline{\underline{y = m\,x + b}}$$

Si la recta pasa por el origen, b = o y la ecuación se reduce a: $\underline{y = m\,x}$

Si la recta es paralela al eje $\underline{x}$, entonces m = o y la ecuación resulta: $\underline{y = b}$

Si la recta es paralela al eje $\underline{y}$, entonces $\underline{m}$ no existe. En este caso, la recta es un conjunto de puntos situados a igual distancia, digamos $\underline{a}$, del eje $\underline{Y}$. Entonces, su ecuación es:

$$\underline{x = a}$$

II. Dados un punto por donde pasa, digamos P (x_1, y_1) y la pendiente $\underline{m}$. (fig. 1.16)

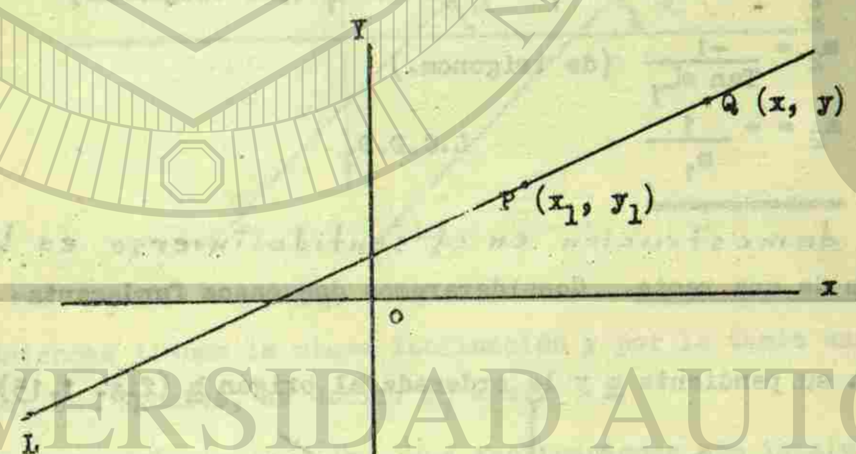


Fig. 1.16

Sea Q (x, y) un punto cualquiera de L. Entonces, por definición de pendiente:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando por $(x - x_1)$:

$$\underline{\underline{y - y_1 = m\,(x - x_1)}}$$

Si se conocen dos puntos por donde pasa la recta, podemos reducir al caso anterior, encontrando primeramente la pendiente $\underline{m}$ y con un punto cualquiera de los dos, se determina la ecuación.

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

P (-3, 5) y Q (5, -1) (fig. 1.17)

<u>Solución</u>

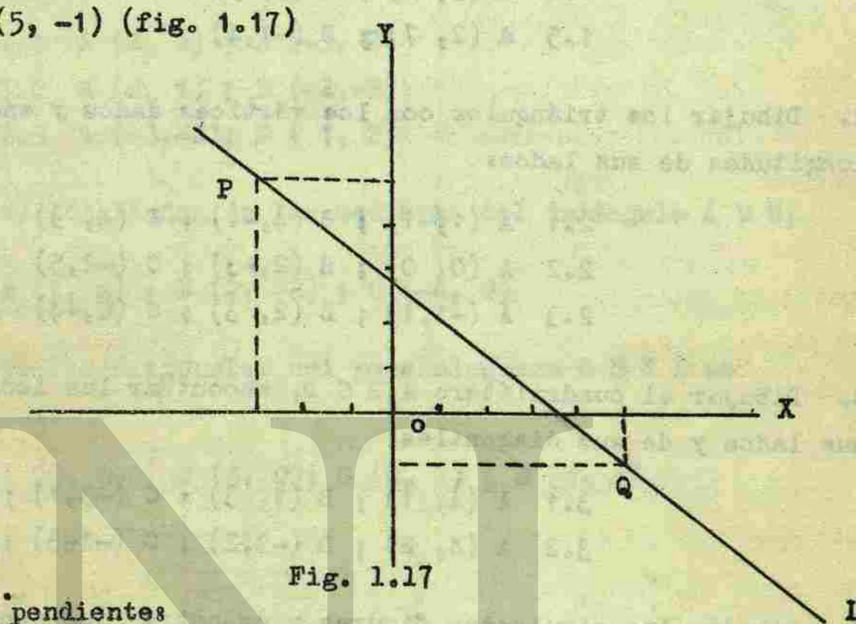


Fig. 1.17

Encontremos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad P\,(\overset{x_1}{-3}, \overset{y_1}{5});\; Q\,(\overset{x_2}{5}, \overset{y_2}{-1})$$

$$m = \frac{-1 - 5}{5 + 3} = \frac{-6}{8} \; \therefore -\frac{3}{4}$$

Entonces, tenemos pendiente m = - 3/4 y pasando por P $(\overset{x_1}{-3}, \overset{y_1}{5})$.

Sustituyendo en la fórmula:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{3}{4}\,(x + 3)$$

$$4y - 20 = -3x - 9$$

$$4y + 3x - 11 = 0$$

<u>Ejercicio 1</u>

Tema: Distancia entre dos puntos. Punto medio.

1. Encontrar la distancia entre los siguientes pares de puntos: (situar los puntos en cada caso).

1.1 A (1, 3) ; B (4, 7)
1.2 A (-2,-3); B (1, 0)
1.3 A (0,-4) ; B (3, 0)
1.4 A (3,-2) ; B (3,-5)
1.5 A (2, 7) ; B (-1,4)

2. Dibujar los triángulos con los vértices dados y encontrar las longitudes de sus lados:

2.1 A (1,-1) ; B (4,-1) ; C (4, 3)
2.2 A (0, 0) ; B (2,-3) ; C (-2,5)
2.3 A (-1,1) ; B (2, 3) ; C (0,-4)

3. Dibujar el cuadrilátero A B C D, encontrar las longitudes de sus lados y de sus diagonales.

3.1 A (4, 1) ; B (1, 3) ; C (-3,1) ; D (-2, -1)
3.2 A (4, 2) ; B (-3,2) ; C (-1-3) ; D (2, -3)

4. Dibujar las siguientes figuras y demostrar que son del tipo indicado.

4.1 A (-4,3) ; B (4, -3) ; C $(3\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$: Triángulo equilátero
4.2 A (3, 1) ; B (5, 5) ; C (9, -2): Triángulo rectángulo
4.3 A (2, 3) ; B (6, 8) ; C (7, -1): Triángulo rectángulo isósceles
4.4 A (-3,1) ; B (0, 4) ; C (6, -2) ; D (3, -5) : Rectángulo
4.5 A (2, 1) ; B (3, -2) ; C (6, -1) ; D (5, 2) : Cuadrado

5. Investigar si los siguientes tres puntos están en línea recta. (usar la fórmula de la distancia):

5.1 A (2, 1) ; B (-1,2) ; C (5, 0)
5.2 A (-1,1) ; B (1, 5) ; C (3, 9)

6. Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a una circunferencia con centro en C (0, 1) y radio 3:

A (3, 1) ; B (2, 4)
C (0,-2) ; D $(\sqrt{8},\ 2)$

7. Deducir fórmulas para las coordenadas del punto medio del segmento de recta determinado por P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2).

Situar los siguientes puntos y encontrar las coordenadas del punto medio:

$$\left(x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad Y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

7.1 A (2, 6) ; B (-3, 2)
7.2 A (2, 1) ; B (-2,-3)
7.3 A (-3,-4); B (1, 2)

8.- Encontrar las longitudes de las medianas del triángulo A B C,

A (2, 4) ; B (2, -2) ; C (-4, 0)

9.- Demostrar que las diagonales del paralelogramo A B C D se bisectan mutuamente:

A (0, 0) ; B (3, 0); C (2, 4) ; D (5, 4)

Ejercicio 2

Tema: Ecuación del círculo. Una aplicación a economía.

1. Encontrar la ecuación del círculo con las siguientes características. Hacer una gráfica esquemática en cada caso:

1.1 C (2, 4) ; r = 4
1.2 C (-3,3) ; r = 2
1.3 C (-1,-3); r = 3/2
1.4 C (4, 0) ; r = 3
1.5 C (1/2, 1/3); r = 6

2. El diámetro de un círculo es el segmento que une los puntos A (-2, 3) y B (4, -3). Encontrar su ecuación y dibujar.

3. Encontrar la ecuación del círculo con centro en el orígen y radio igual a la diagonal de un cuadrado de lado tres.

4. Encontrar la ecuación del círculo inscrito en un cuadrado de lado 5 y con centro en C (3, 2)

5. Encontrar la ecuación del círculo con centro en C (1, 4) y que pasa por el origen.

6. Encontrar el centro y el radio de cada uno de los siguientes círculos, dibujar.

6.1 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$
6.2 $x^2 + y^2 + 8x = 0$
6.3 $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$
6.4 $x^2 + y^2 - 6y + 2x + 9 = 0$
6.5 $3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 15 = 0$
6.6 $x^2 + y^2 + 5y - 12x = 0$

7. Una compañía tiene dos centros de producción para un artículo cuyo precio es igual a \$ 1,000 en ambas fábricas. La distancia entre los dos centros de producción es de 200 kilómetros y los costos de transporte por artículo y por kilómetro son de \$8 para una fábrica y \$16 para la otra. Encontrar la frontera (zona de igual precio total llevando el artículo de cualquiera de las dos fábricas) y determinar las áreas de distribución del mercado para cada una de las fábricas.

8. Supongamos que en el problema anterior el costo de transporte es de \$2 por artículo y por kilómetro para ambas fábricas. Determinar la frontera y las áreas de distribución del mercado.

Ejercicio 3

Tema: Línea recta

1. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

1.1 A (3, 4) ; B (5, 9)
1.2 A (2, 5); B (4,-2)
1.3 A (-3,2) ; B (2, -4)
1.4 A (-5,-4); B (2, -3)
1.5 A (-4, 4); B (2, 2)
1.6 A (3.2,1.6) ; B (-5.8,4.6)

2. Dibujar el cuadrilátero cuyos vértices son:

A (2, 4) ; B (1, 5) ; C (-2, 2) ; D (-1, 1) y verificar qué es rectángulo calculando las pendientes de sus lados.

3. Encontrar las pendientes de la línea perpendicular a la línea que pasa por los siguientes puntos:

3.1 A (3, 4) ; B (2, 1)	3.3 A(3, -2) ; B (-4,-1)
3.2 A (6,-6) ; B (2, 2)	3.4 A (-2,8) ; B (3, 6)

4. Determinar si los siguientes tres puntos están en línea recta utilizando la fórmula de la pendiente:

4.1 A (0, 3) ; B (2, 6) ; C (-2, 0)
4.2 A (-1,2) ; B (1, 4) ; C (3, 5)

5. Encontrar $\underline{x}$ de manera que los puntos A (-1, 7); B (3,-5) ; C (-4, x), estén en línea recta.

6. Encontrar la ecuación de la recta con las siguientes características:

6.1 pasando por P (-3, 2) con pendiente m = 2/3
6.2 pasando por P (-2, 7) con pendiente m = - 5/2
6.3 pasando por P (2, 4) con pendiente m = 4/3
6.4 pasando por P (7, -9) con pendiente m = 4
6.5 pasando por P (-2, 2) con pendiente m = 0

7. Encontrar la ecuación de la recta determinada por los siguientes puntos:

7.1 A (2, 4) ; B (-3, 5)	7.4 A (0, 0) ; B (-1, -3)
7.2 A (0, 5) ; B (-2,-1)	7.5 A (-3,-2); B (1, 3)
7.3 A $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$; B $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right)$	7.6 A $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; B $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

8. Encontrar la ecuación de la recta con las siguientes condiciones:

8.1 Pasando por P (1, 5) y perpendicular a la línea que pasa por A (-2, -6) y B (8, 2)

8.2 Pasando por P (1, -2) y paralela a la línea que pasa por A (1, 3) y B (2, -4)

8.3 Pasando por el punto medio del segmento A (-7, 2) ; B (3, -4) y perpendicular al mismo segmento AB.

9. Encontrar el punto de intersección de las siguientes rectas. Dibujar en cada caso:

9.1 $x + y = 5$; $2x + 3y = 4$

9.2 $x - 6 = 1$; $x + y = 2$

9.3 $2x - y = -5$; $4x - 2y = 7$

9.4 $7x + 8y = 12$; $2x - 4y = -3$

CAPITULO 2

FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.

2.1 Funciones de una variable. Es común encontrar, por observación directa, cosas que varían produciendo cambios en otras siguiendo en algunos casos una ley determinada.

Por ejemplo, la presión atmosférica de un lugar cambia de acuerdo con su posición respecto al nivel del mar. Específicamente la presión atmosférica P disminuye al aumentar la altura sobre el nivel del mar h. Entonces, se dice que la presión atmosférica de un lugar es función de su altura sobre el nivel del mar y en lenguaje matemático lo expresamos de la siguiente manera:

$$P = f(h)$$

En economía, la cantidad demandada por un artículo disminuye cuando el precio del artículo aumenta. Esto es lo que sucede en el caso "normal". En general, se observa una relación entre los cambios del precio y los de la cantidad demandada. Entonces, decimos que la cantidad demandada x es función del precio P y lo expresamos de la siguiente manera:

$$x = f(P)$$

Llamaremos a P la variable independiente y a x la variable dependiente de la función f.

Los ejemplos anteriores dan una idea clara de lo que es una función. Sin embargo, es conveniente formalizar las definiciones de los conceptos envueltos.

Def. Una variable es un símbolo que representa una cantidad que puede cambiar. Al conjunto de valores que puede tomar la variable, le llamaremos dominio de definición de la variable.

8.3 Pasando por el punto medio del segmento A (-7, 2) ; B (3, -4) y perpendicular al mismo segmento AB.

9. Encontrar el punto de intersección de las siguientes rectas. Dibujar en cada caso:

9.1 $x + y = 5$; $2x + 3y = 4$

9.2 $x - 6 = 1$; $x + y = 2$

9.3 $2x - y = -5$; $4x - 2y = 7$

9.4 $7x + 8y = 12$; $2x - 4y = -3$

CAPITULO 2

FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.

2.1 Funciones de una variable. Es común encontrar, por observación directa, cosas que varían produciendo cambios en otras siguiendo en algunos casos una ley determinada.

Por ejemplo, la presión atmosférica de un lugar cambia de acuerdo con su posición respecto al nivel del mar. Específicamente la presión atmosférica P disminuye al aumentar la altura sobre el nivel del mar h. Entonces, se dice que la presión atmosférica de un lugar es función de su altura sobre el nivel del mar y en lenguaje matemático lo expresamos de la siguiente manera:

$$P = f(h)$$

En economía, la cantidad demandada por un artículo disminuye cuando el precio del artículo aumenta. Esto es lo que sucede en el caso "normal". En general, se observa una relación entre los cambios del precio y los de la cantidad demandada. Entonces, decimos que la cantidad demandada x es función del precio P y lo expresamos de la siguiente manera:

$$x = f(P)$$

Llamaremos a P la variable independiente y a x la variable dependiente de la función f.

Los ejemplos anteriores dan una idea clara de lo que es una función. Sin embargo, es conveniente formalizar las definiciones de los conceptos envueltos.

Def. Una variable es un símbolo que representa una cantidad que puede cambiar. Al conjunto de valores que puede tomar la variable, le llamaremos dominio de definición de la variable.

Def. Una constante es una cantidad que permanece fija en un problema determinado.

Def. Una función es una relación que asigna uno o más valores a una variable dependiente, cuando la variable independiente toma un determinado valor de su dominio de definición. Al dominio de definición de la variable independiente se le llama dominio de la función y al conjunto de valores que toma la variable dependiente al dar a la variable independiente los valores del dominio, se le llama co-dominio de la función.

El concepto de función puede ser interpretado como una transformación de los elementos de un conjunto llamado dominio en los elementos de otro conjunto llamado co-dominio. La figura 2.1 ilustra esquemáticamente esta interpretación.

Fig. 2.1

Si el dominio y el co-dominio de una función están contenidos en el conjunto de los números reales, entonces se dice que la función es de variable real. Limitaremos este curso al estudio de funciones de variable real.

Ejemplos. Determinar el dominio y el co-dominio de las siguientes funciones de variables reales:

1. $f(x) = 3 \text{ sen } x$

Solución: Dominio: Todos los números reales (valores que puede tomar el ángulo x, en radianes).

Co-dominio: el conjunto de los números reales comprendidos entre menos tres y mas tres. (Valores que toma la función al asignar a x los valores del dominio).

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

Solución: Dominio: Todos los números reales excepto el 1, porque

Dominio Valores de x — Co Dominio Valores de Y $\{ Y = f(x)$

para $x = 1$ la función no está definida.

Co-dominio: Todos los números reales.

3. $f(x) = x^2$

Dominio: Todos los números reales, excepto el 5.

Co-dominio: Los números reales no negativos.

Función inversa. En la función $y = f(x)$, decimos que x es la variable independiente mientras que y es la variable dependiente. Ahora, cuando sea posible despejar x con ayuda de transformaciones matemáticas, entonces encontraremos lo que se llama la función inversa g de f:

$$x = g(y)$$

En la función inversa, y es la variable independiente y x se transforma en la variable dependiente.

Ejemplo: Sea la función: $\underset{\text{DEP}}{y} = 2\underset{\text{IND.}}{x} + 4$. Despejando x encontramos la función inversa:

$$2x = y - 4$$

$$\underset{\text{DEP.}}{x} = 0.5\,\underset{\text{IND.}}{y} - 2$$

2.2 Funciones de varias variables. El número de variables independientes que determinan el valor de la variable dependiente puede ser mayor que uno, en cuyo caso se tiene una función de varias variables. Por ejemplo, el capital acumulado de una inversión a interés simple anual depende del capital inicial Co, de la tasa de interés r y del tiempo transcurrido desde el momento de hacer la inversión t. Si llamamos C_t al capital acumulado después de t años, se tiene:

$$C_t = f(Co, r, t)$$

Variable dependiente = C_t

Variables independientes: 1. Co
2. r
3. t

Observación: No siempre es posible obtener una expresión matemática exacta que describa la relación entre ciertas variables. En algunos casos, es necesario tabular explícitamente los valores de la variable independiente con los correspondientes valores de la variable dependiente. En éstos casos, que son comunes en estadística, la expresión que representa a la función es una tabla de valores. Siempre es deseable obtener una ley matemática a la tabla de valores aunque sea de manera aproximada, reduciendo los errores al mínimo. Una de las finalidades de la estadística es precisamente encontrar funciones aproximadas para un conjunto de datos empíricos con el propósito de hacer proyecciones futuras y facilitar el análisis matemático de la relación entre las variables consideradas.

2.3 Clasificación de las funciones. Una de las finalidades fundamentales del cálculo infinitesimal, es el estudio de las funciones. Para facilitar dicho estudio, es muy conveniente clasificar las funciones de acuerdo con su expresión matemática. En la siguiente tabla se presenta la clasificación de las funciones de una variable en funciones algebraicas y funciones trascendentes, con algunos ejemplos. Las funciones algebraicas son las que tienen una expresión puramente algebraica, es decir, contienen a la variable envuelta en operaciones algebraicas, (suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces). Las funciones trascendentes son todas las que no son algebraicas.

Funciones de una variable $y=f(x)$

Algebraicas

1. Constante: $f(x) = c$
2. Polinomial: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

 a) Lineal : $f(x) = a_0 + a_1 x$

 b) Cuadrática: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

3. Racional: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

 $P(x)$, $Q(x)$: Polinomios

Trascendentes. Ejemplos

1. Trigonométricas .... $g(x) = \text{sen } x$
2. Exponenciales .... $g(x) = 4^{2x}$
3. Logarítmicas......................... $g(x) = \ln x$

 etcétera.

2.4 Gráficas de funciones. Una función de una variable $y = f(x)$ puede ser considerada como una ecuación indeterminada en x y y, es decir, una ecuación con una infinidad de soluciones. Entonces, la gráfica de una función es la curva de la ecuación correspondiente. Hemos visto en geometría analítica un método para graficar ecuaciones que corresponde al siguiente proceso sistemático:

1. Hacer una tabla de valores dando a la variable independiente valores de su dominio, de la siguiente manera:

 a) Primero se le da el valor cero y valores enteros positivos hasta que se defina el comportamiento de la variable dependiente.

 b) Después se dan valores negativos enteros hasta que se defina la función a la izquierda del origen.

 c) Si hay duda del comportamiento de la función entre 2 enteros, se dan valores fraccionarios en ese intervalo a la variable independiente.

Si alguno de los valores considerados no están en el dominio de la función, se excluyen de la tabulación.

2. Se sitúan en un sistema de coordenadas los puntos correspondientes a las parejas ordenadas de números reales que aparecen en la tabla.

3. Se traza una curva suave a través de los puntos determinados para obtener la gráfica de la función.

Ejemplo. Hacer una gráfica esquemática de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4$$

Solución. El dominio de la función es el conjunto de los números reales, es decir x puede tomar valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Empecemos con la tabulación.

x	f(x)
0	4
1	4
2	8
3	22
4	42
-1	2
-2	-8
-3	-32
-4	-76

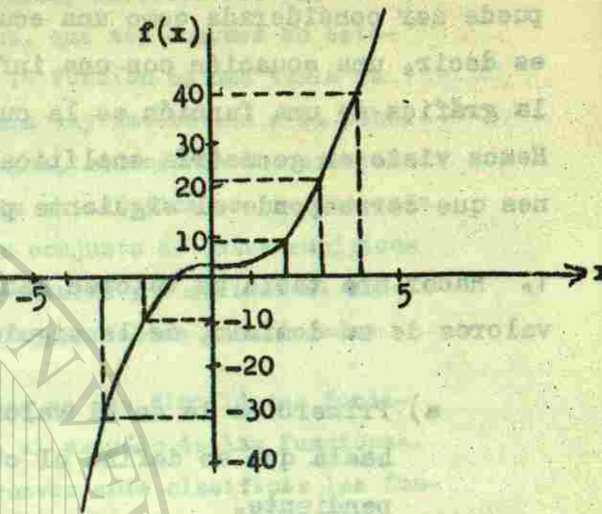


Fig. 2.2

$f(x) = x^3 - x^2 + 4$

El comportamiento de la función es incierto (de la tabla) en el intervalo de $x = -1$ a $x = +1$. Consideremos valores de x en ese intervalo:

x	f (x)
-1/2	$29/8 \approx 3.6$
1/2	$31/8 \approx 3.9$

Ahora, situando los puntos correspondientes y trazando una curva suave a través de ellos se obtiene la gráfica de la función (fig. 2.2.)

De este ejemplo, se deduce que no es posible obtener una descripción gráfica exacta de la función por este procedimiento. En el intervalo $0 < x < 1$ no sabemos cual es el valor mínimo de f (x) y si seguimos dando valores a x entre 0 y 1, posiblemente podríamos encontrar aproximadamente la posición del punto mínimo que está en el intervalo y que es importante en la gráfica de f (x). Posteriormente veremos como el cálculo diferencial es de gran utilidad para graficar funciones.

Funciones en Teoría Económica. En economía se estudian relaciones entre cantidades variables como son precios, ingresos, costos, tasas de interés, etc. Cuando la relación entre un conjunto de variables económicas puede ser expresada por una ley matemática, se obtiene lo que se llama una relación funcional que facilita notablemente el análisis de los problemas económicos

en los que intervienen las variables. Sin embargo, generalmente es prácticamente imposible obtener una ley matemática rígida que describa exactamente un fenómeno económico, porque hay variables económicas que son muy difíciles de medir y hay que conformarse con estimaciones que en muchos casos son discutibles. Por otra parte, hay conceptos económicos que no pueden ser precisados de manera específica como el concepto de "utilidad" o "satisfacción". Es entonces muy importante tener plena conciencia de las limitaciones que tienen las expresiones matemáticas de fenómenos económicos. Sin embargo, la herramienta matemática ha demostrado ser un recurso magnífico no sólo para el análisis de problemas económicos determinados, sino para la mejor comprensión de los conceptos fundamentales de la teoría económica.

2.5 Funciones de demanda. Consideremos un artículo en un mercado de competencia pura. En general, la cantidad demandada por el artículo depende de varias variables como son el precio del artículo, el precio de los demás artículos en el mercado, los gustos de los consumidores, etc. Si tomamos en cuenta todas las variables que determinan la cantidad demandada, obtenemos una función muy complicada en la que intervienen variables independientes que influyen muy poco en el valor de la cantidad demandada. Entonces, despreciamos las variables que podríamos llamar secundarias para obtener una función simplificada de demanda, considerando que la cantidad demandada depende únicamente del precio del artículo. Para justificar la eliminación de las demás variables, limitaremos la función a un instante dado o a un intervalo de tiempo tal que las variables pueden ser consideradas constantes. De esta manera obtenemos lo que se llama una función de demanda estática. $x = f(p)$.

$f(Q) = P$

Una de las leyes básicas de economía dice que la cantidad demandada disminuye cuando el precio aumenta. Entonces, las posibles formas funcionales entre estas 2 variables deben satisfacer ésta ley. Consideremos algunos ejemplos de formas posibles de funciones de demanda estática. Las gráficas se limitan al primer cuadrante, es decir para valores no negativos de las variables x y P.

1. Sea: $P = 50 - 2x$. (normalmente se trabaja en economía con la función inversa. En este caso la función original sería, despejando x : $x = 25 - 1/2\ P$, que expresa la cantidad demandada x como una función del precio P).

Graficando la función para verificar la ley fundamental que debe satisfacer una función de demanda, se obtiene:

Puesto que es una ecuación lineal, su gráfica es una recta. Además x y P toman únicamente valores positivos. Encontremos sus intersecciones con los ejes: (fig. 2.3)

x	P
0	50
25	0

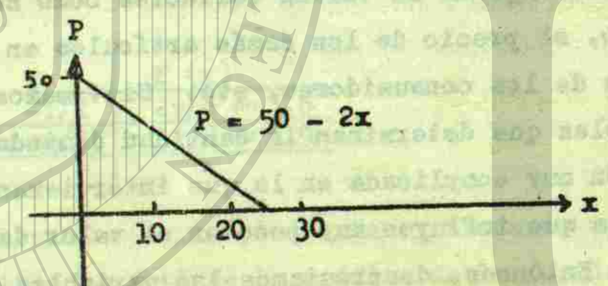


Fig. 2.3

De la gráfica se deduce que la cantidad demandada x disminuye cuando el precio P aumenta.

2. Sea: $P = \frac{400}{x + 4} - 10$ obtenida de la función de demanda:

$$x = \frac{400}{p + 10} - 4$$

Tabulando para valores no-negativos de la cantidad demandada x y el precio P, se obtiene la Fig. 2.4:

Cap V- Allen

x	P
0	90
1	70
4	40
6	30
12	15
16	10
36	0

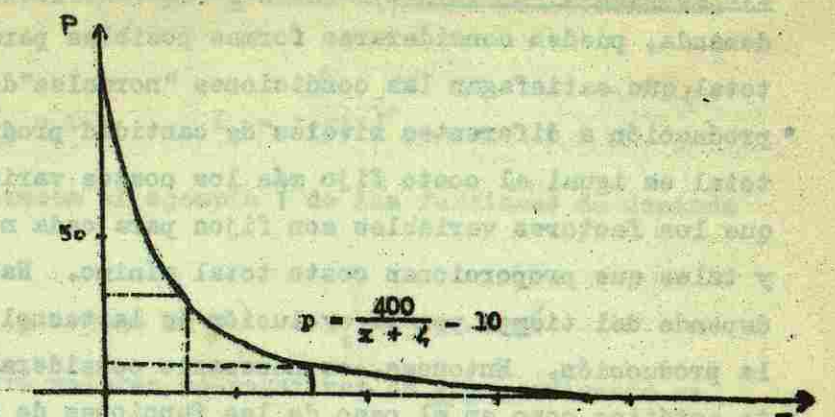


Fig. 2.4

3. Sea $x = \sqrt{\frac{800-P}{2}}$ de donde se obtiene la siguiente función despejando P.

$$P = 800 - 2x^2$$

Tabulando:

x	P
0	800
5	750
10	600
15	350
20	0

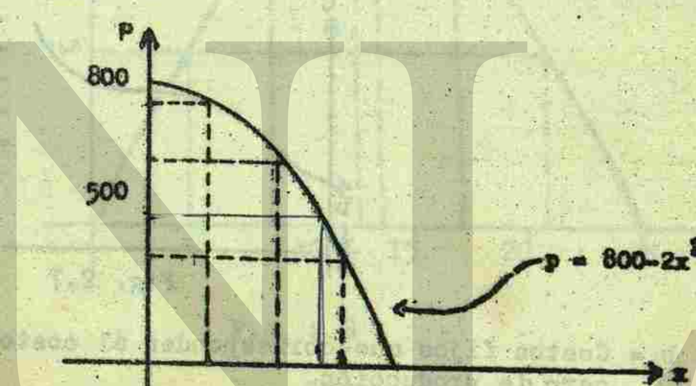


Fig. 2.5

4. Sea: $P = 2\log \frac{1000}{x}$

Tabulando:

x	P
1	6
10	4
100	2
1000	0
$\to 0$	$\to \infty$

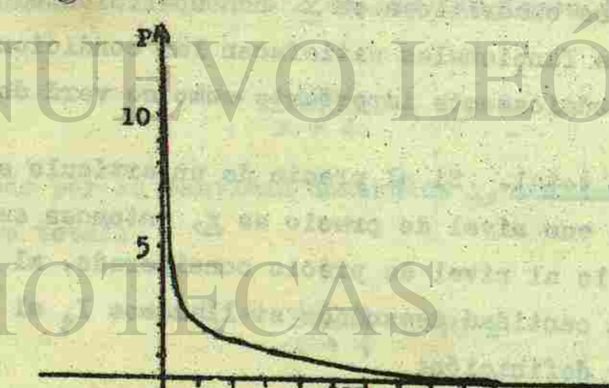


Fig. 2.6

2.6 Funciones de costo. De la misma manera que en las funciones de demanda, pueden considerarse formas posibles para funciones de costo total, que satisfagan las condiciones "normales" del costo total de producción a diferentes niveles de cantidad producida. El costo total es igual al costo fijo más los costos variables. Se supone que los factores variables son fijos para cada nivel de producción y tales que proporcionan costo total mínimo. Naturalmente, ésto depende del tiempo por la evolución de la tecnología empleada en la producción. Entonces, es necesario considerar funciones de costo estático como en el caso de las funciones de demanda.

Si llamamos C al costo total y x a la cantidad producida, la curva "normal" de costo debe tener aproximadamente la forma de la fig. 2.7.

Fig. 2.7

b = Costos fijos que corresponden al costo total al nivel cero de producción.

Formas aproximadas de funciones de costo pueden ser líneas rectas de pendiente y ordenada al origen positivas, parábolas, o sea funciones cuadráticas en x con coeficientes positivos, etc. Estas formas funcionales satisfacen las condiciones "normales" en la zona económicamente importante como se verá después.

2.7 Ingreso total. Si el precio de un artículo es P y la cantidad demandada a ese nivel de precio es x, entonces se llama ingreso total obtenible al nivel de precio considerado, al producto del precio por la cantidad demandada si llamamos I_t al ingreso total, entonces, por definición:

$$I_t = P \cdot x$$

Para una función de demanda determinada $x = f(p)$, se obtiene

INDEP.

la función inversa $p = g(x)$ de donde se deduce la función del ingreso total I_t multiplicando por x ambos miembros de la ecuación $p = g(x)$:

cant precio

$$I_t = p \cdot x \qquad I_t = x \cdot g(x)$$

Ejemplo 1. Consideremos el ejemplo 1 de las funciones de demanda graficadas:

$$p = 50 - 2x \qquad I_t = 50x - 2x^2$$

Tabulando para valores no-negativos de x y graficando se obtiene la figura 2.8.

x	I_t
0	0
4	168
8	272
12	312
13	312
17	272
21	168
25	0

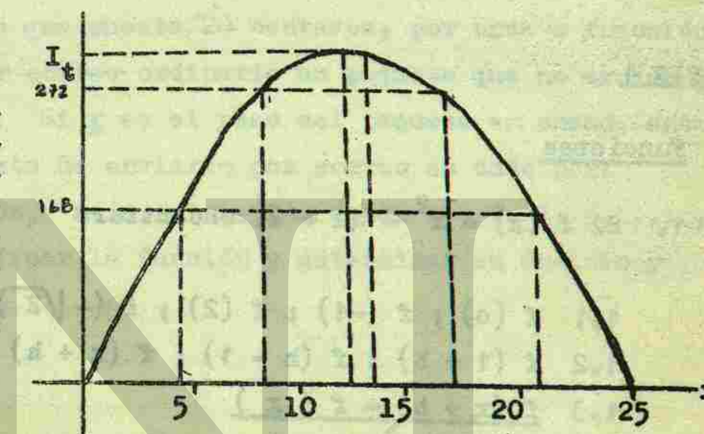


Fig. 2.8

De acuerdo con la tabla y la curva, el ingreso total alcanza su máximo entre $x = 12$ y $x = 13$. En cálculo diferencial estudiaremos con más detalle la curva del ingreso total.

Ejemplo 2. Consideremos el ejemplo 2 de las funciones de demanda:

$$P = \frac{400}{x + 4} - 10$$

Multiplicando por la cantidad demandada x, obtenemos la función del ingreso total:

$$I_t = \frac{400\,x}{x + 4} - 10\,x$$

Tabulando para valores no-negativos de x, se obtiene la curva del ingreso total en la figura 2.9.

x	I_t
0	0
1	70
4	160
6	180
12	180
16	160
36	0

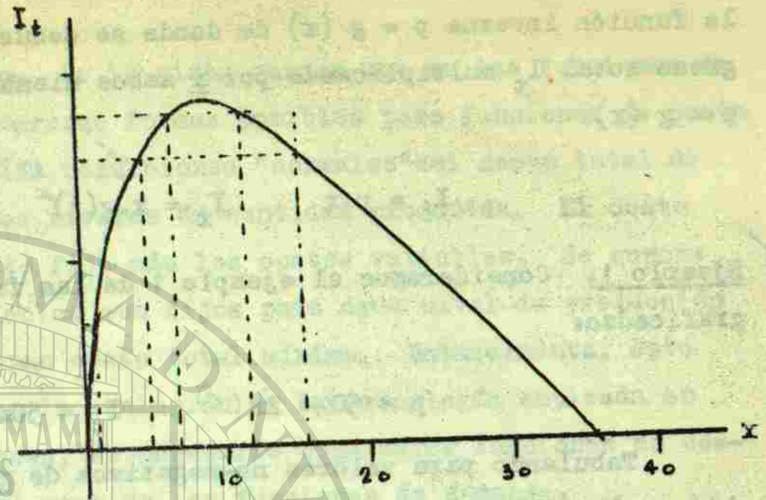


Fig. 2.9

Ejercicio 4

Tema: Funciones

1. Si $f(x) = x^2 - 4x + 2$, encontrar:

   1.1 $f(o)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-\sqrt{2})$

   1.2 $f(1 + h)$; $f(h - 1)$; $f(x + h)$

   1.3 $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

   1.4 $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

2. Si $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$, encontrar:

   2.1 $g(o)$; $g(1)$; $g(-2)$; $g(a^2)$

   2.2 $g(x + h)$; $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$

   2.3 $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$

3. Si $f(x) = x^2 - x - x + 6$, para que valores de $\underline{x}$ es:

   3.1 $f(x) = f(2x)$

   3.2 $2f(x) = f(2x)$

4. Graficar y encontrar el dominio y el co-dominio de la función:

   4.1 $f(x) = x^3 - 1$

   4.2 $g(x) = +\sqrt{x - 3}$

   4.3 $f(x) = +\sqrt{4 - x^2}$

   4.4 $y = \dfrac{1}{x-2}$

   4.5 $y = 2x^2 + 1$

5. Graficar y comparar los dominios y co-dominios de las siguientes dos funciones:

   1) $f(x) = x + 2$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

6. Supongamos que cuesta 20 centavos, por onza o fracción, enviar por correo ordinario un paquete que no exceda de 100 onzas. Si $\underline{x}$ es el peso del paquete en onzas, entonces el costo de enviarlo por correo es dado por: $f(x) = 20n$, si $n - 1 < x \leq n$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots,$ 100. Graficar la función y determinar su dominio y co-dominio.

Ejercicio 5

Tema: Gráficas.

1. Hacer una gráfica esquemática de las siguientes tablas de datos empíricos.

   1.1 Exportación de trigo del país $\underline{x}$ en millones de sacos desde 1940 hasta 1950.

Año	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950
Exportación	8.2	13.9	15.5	13.8	10.2	8.9	10	11.2	11.6	16.1	14

   1.2 Profundidades de un río a diferentes distancias normales al margen desde un banco fijo sobre la orilla.

Distancia (metros)	0	8	16	24	32	40	48	56
Profundidad (metros)	0	3	2	30	26	6	11	2

1.3 Producción de algodón en miles de pacas del país x y precio promedio en pesos por kilo desde 1940 a 1950.

Año	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950
Producción	11.5	15.5	13.5	14	16	11	11.5	11.5	12	11.5	13.5
Precio	2	1.60	1.80	1.90	1.10	1.50	2.20	3.60	3.60	4.40	2.20

2. El valor de un automóvil es dado por: $V = 50{,}000 - 1500t$ donde V es el valor en pesos y t el tiempo en años después de su fabricación. Dibujar la función de $t = 0$ a $t = 25$ utilizando intervalos de cinco años en la tabulación.

3. Graficar las siguientes funciones:

3.1 $y = x^2 - 2$

3.2 $y = x + 5$

3.3 $y = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$

3.4 $y = x^4 - 5x^2 + 4$

3.5 $y = 2 \cos x$

3.6 $y = 4 \log x$

3.7 $y = 5$

4. Dibujar las gráficas y encontrar el punto de intersección de los siguientes pares de curvas:

4.1 $y = x + 2$ $\quad x + 2 + x^2 - 1 = 0$ $\quad y + (y-2)^2 - 1 = 0$

$y + x^2 - 1 = 0$ $\quad x^2 + x + 1 = 0$ $\quad y + y^2 - 4y + 4 - 1 = 0$

$x(x+1) = -1$ $\quad y^2 - y + 3 = 0$

4.2 $y = -x + 3$ $\quad x = -1$ $\quad y^2 - y = -3$

$y = 4 - x^2$ $\quad x = 0$ $\quad y(y-1) = -3$

$y = -1 + 2$

$y = 1$ $\quad y = -3$ $\quad y = -2$

Ejercicio 6

Tema: Funciones y gráficas en teoría económica

1. La función de demanda para un cierto artículo es dada por:

$$x = \frac{90}{p+5} - 6$$

Dibujar la gráfica de la curva de demanda. Dibujar la gráfica del ingreso total y determinar a qué nivel de producción es máximo el ingreso total.

2. Un fabricante investiga la demanda por su producto variando el precio y colecciona los siguientes datos:

Precio	9	12	15	18
Demanda	1030	900	795	715

Dibujar la gráfica del ingreso total y verificar que aproximadamente el ingreso total es una función lineal de la cantidad demandada.

3. El número de personas x que viajan en un tren está relacionado al precio del pasaje P de acuerdo con la siguiente ley:

$$P = \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$$

Dibujar la curva de demanda y la curva de ingreso total.

4. Para una función de teatro se sabe que la asistencia x depende del precio del boleto P de acuerdo con la ley: $x = \frac{a}{p} - b$. El teatro tiene 3000 asientos y se ha encontrado que cuando el precio del boleto es un peso se venden la mitad de las localidades, pero cuando el precio se reduce a 90 centavos sólo queda la sexta parte de los asientos vacíos. Encontrar a y b. Dibujar la curva de demanda y encontrar el precio del boleto que llenará el teatro.

5. Una planta produce x unidades de un cierto artículo a un costo total de:

$$C = 2\sqrt{40x - 175} + 90$$

Dibujar la curva del costo total. Expresar el costo medio como una función de x y dibujar la curva del costo medio.

6. La siguiente tabla muestra los resultados de una investigación de demanda por un cierto artículo:

Precio (pesos)	P	10	15	20	25	30	35	40
Demanda (unidades)	Q	300	270	260	230	200	168	154

Representar estas demandas gráficamente y verificar que la curva de demanda es aproximadamente de la forma lineal $Q = 350 - 5P$. Graficar también el ~~producto~~ Ingreso total como una función de la cantidad producida. (Q demandada)

Estudiar

CAPITULO 3

LIMITES. DERIVADA DE UNA FUNCION

Introducción. El concepto de límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor determinado, es de fundamental importancia para el estudio del cálculo diferencial é integral. Antes de formalizar el concepto de límite, definiremos las secuencias ilustrando con algunos ejemplos.

3.1 Secuencias. Una secuencia es una función definida sobre enteros no-negativos. Es decir, es una función de una variable cuyo dominio de definición está contenido en el conjunto de los enteros no-negativos. Consideremos algunos ejemplos:

1. $f(n) = 2 + n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

El dominio de esta función son los números enteros positivos. Para graficarla se acostumbra escalonar los puntos aislados que corresponden realmente a la gráfica de la función. Este escalonamiento es completamente convencional y lo haremos de la siguiente manera: (Fig. 3.1)

n	f (n)
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
.	.
.	.
.	.

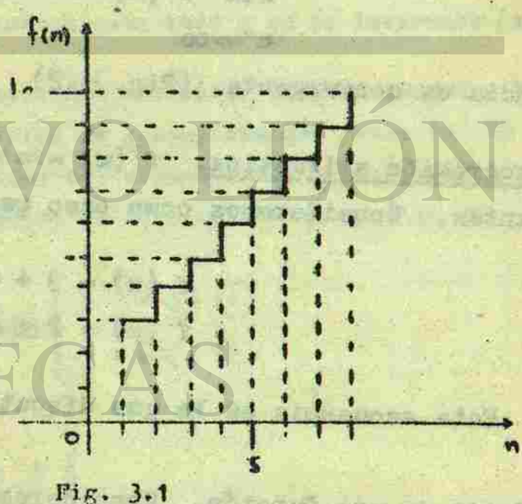


Fig. 3.1

Representar estas demandas gráficamente y verificar que la curva de demanda es aproximadamente de la forma lineal $Q = 350 - 5P$. Graficar también el ~~producto~~ INGRESO total como una función de la cantidad producida. (Q demandada)

Estudiar

CAPITULO 3

LIMITES. DERIVADA DE UNA FUNCION

Introducción. El concepto de límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor determinado, es de fundamental importancia para el estudio del cálculo diferencial é integral. Antes de formalizar el concepto de límite, definiremos las secuencias ilustrando con algunos ejemplos.

3.1 Secuencias. Una secuencia es una función definida sobre enteros no-negativos. Es decir, es una función de una variable cuyo dominio de definición está contenido en el conjunto de los enteros no-negativos. Consideremos algunos ejemplos:

1. $f(n) = 2 + n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

El dominio de esta función son los números enteros positivos. Para graficarla se acostumbra escalonar los puntos aislados que corresponden realmente a la gráfica de la función. Este escalonamiento es completamente convencional y lo haremos de la siguiente manera: (Fig. 3.1)

n	f (n)
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
.	.
.	.
.	.

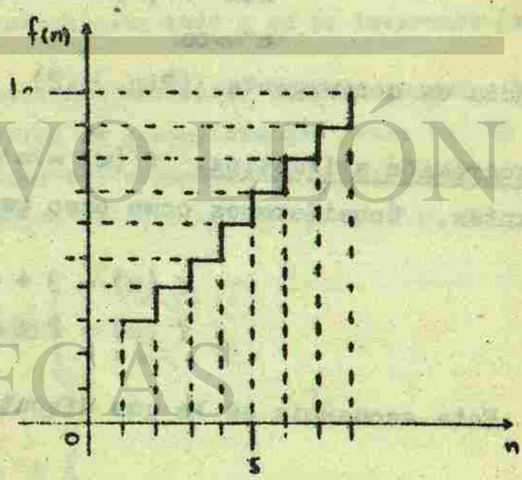


Fig. 3.1

De la tabla se deduce que f (n) aumenta indefinidamente al aumentar n haciéndolo tender a infinito. En lenguaje matemático se dice que f (n) tiende a infinito cuando n tiende a infinito y en símbolos lo expresaremos de la siguiente manera:

$\lim_{n \to \infty} f(n) = \infty$. En este caso, se dice que la secuencia es divergente.

2. $f(n) = 1/n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tabulando:

n	f(n)
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5
°	°
°	°
°	°
°	°

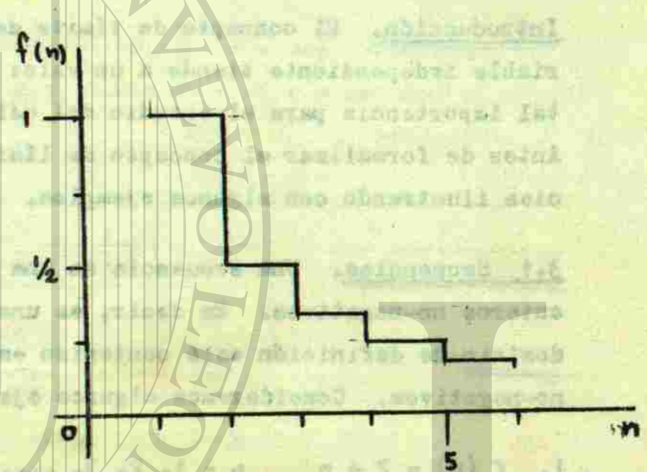


Fig. 3.2

De la tabla, se deduce que f (n) se acerca a cero cuando n se hace más grande tendiendo a infinito. En nuestra notación:

$\lim_{n \to \infty} f(n) = 0$ En este caso, se dice que la secuencia es convergente. (Fig. 3.2)

3. Progresión aritmética. $f(n) = a + (n - 1)d$, donde a y d son constantes. Consideremos como caso particular: $a = 3$; $d = 1$.

$$f(n) = 3 + (n - 1)$$
$$f(n) = 2 + n$$

Esta secuencia es la que discutimos en el ejemplo 1.

3.2 Límite de una función. Consideremos la función: $f(x) = x^2$.

Tabulando para graficar, obtenemos:

x	f (x)
0	0
1	1
2	4
−1	1
−2	4

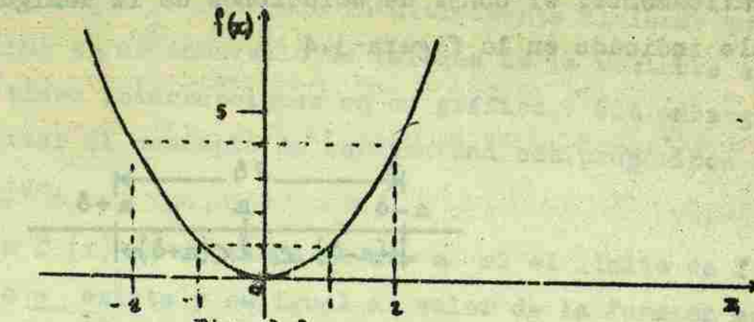


Fig. 3.3

Supongamos que nos interesa saber que le sucede a la función f (x) cuando x se acerca a 2. Hagamos una tabla dando valores a x que tiendan al valor x = 2.

x	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99	1.999
f (x)	1	2.25	3.24	3.61	3.8025	3.9601	3.9960

De la tabla se deduce que f (x) tiende a 4 cuando x tiende a 2. Observando la gráfica se obtiene el mismo resultado. En símbolos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Formalmente definiremos el límite de una función de la siguiente manera:

X **Def.** $\lim_{x \to a} f(x) = A$ si para todo $\varepsilon > 0$ (mayor) existe una $\delta > 0$ tal que: $|f(x) - A| < \varepsilon$ se satisface para todo x en el intervalo $|x-a| < \delta$.

Observación. $|x - a| < \delta$ es una vecindad alrededor de a de longitud 2δ. Es decir es un conjunto de valores de x comprendidos entre $(a - \delta)$ y $(a + \delta)$ que determinan un intervalo alrededor de a de longitud 2δ. Para demostrar esto, se descompone la desigualdad $|x-a| < \delta$ en un sistema de 2 desigualdades:

$$|x - a| < \delta \begin{cases} x - a < \delta & (1) \\ -x + a < \delta & (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{De (1)} : x - a < \delta ;\ x < \delta + a \\ \text{De (2)} : -x + a < \delta ;\ x > a - \delta \end{array}\right\}$$

Gráficamente, el conj. de soluciones de la desigualdad es el intervalo indicado en la figura 3.4

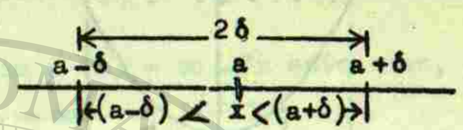


Fig. 3.4

Con la ayuda de la interpretación geométrica de una desigualdad de la forma $|x - a| < \delta$, la definición de límite de una función puede hacerse objetiva: (fig. 3.5)

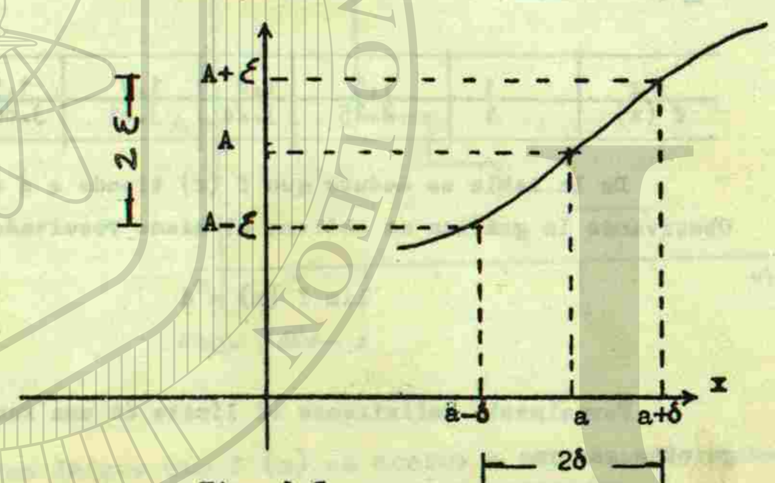


Fig. 3.5

De acuerdo con la definición, para cualquier $\epsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x en la vecindad marcada en el eje x de longitud 2δ, los valores correspondientes de la función f (x) están contenidos en la vecindad de longitud 2ϵ marcada sobre el eje de f (x). El significado de todo esto es la noción natural de límite porque si hacemos ϵ suficientemente pequeña haciéndola tender a cero, entonces δ tiene que tender a cero también y por lo tanto al acercar x al valor a, f (x) se acercará al valor A. Es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

(numero) $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$

3.3 Continuidad de una función. El concepto de continuidad es, en general, un concepto que se entiende intuitivamente diciendo que una función es contínua en un intervalo de valores de la variable independiente si no tiene interrupciones en su gráfica. Sin embargo, es necesario formalizar el concepto de continuidad con propósitos de análisis matemático.

Def. Una función f (x) es continua en x = a si el límite de f (x) cuando x tiende a a existe y es igual al valor de la función en x = a. En símbolos:

f (x) es continua en x = a Si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La función f (x) es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ si el intervalo completo está contenido en el dominio de la función y el límite de f (x) cuando x tiende a c es igual a f (c) para todo c contenido en el intervalo. En símbolos:

f (x) es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, si f (x) es contínua en todo punto c tal que $a \leq c \leq b$.

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x^2 - 3$ es continua en todo su dominio, es decir, es continua para todo x porque:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ para todo } a$$, de acuerdo con las propiedades de límites que veremos enseguida.

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ es discontinua en x = 1 porque f (1) no existe.

3.4 Propiedades fundamentales de los límites. Los siguientes teoremas fundamentales sobre límites serán establecidos sin demostración. La importancia de los teoremas de límites es inmediata porque serán utilizados en la evaluación de límites y la de ciertas formas matemáticas indeterminadas. Además, constituyen la base matemática esencial para el cálculo diferencial, como veremos después.

Teorema 1. El límite de una constante c cuando x tiende a un valor a es igual a la constante misma.

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c}$$

Teorema 2. El límite de una constante por una variable es igual a la constante por el límite de la variable.

$$\lim_{x \to a} cx = c \lim_{x \to a} x = ca$$

Teorema 3. El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \ldots \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \pm \lim_{x \to a} h(x) + \ldots\ldots$$

Teorema 4. El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right] \left[\lim_{x \to a} g(x) \right]$$

Corolario: $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$

Teorema 5. El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites de las funciones siempre y cuando el límite del denominador sea diferente de cero.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Nota: El corolario del teorema cuatro es válido para exponentes racionales. En particular:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^{\frac{1}{n}}$$

Excluyo

3.5 Evaluación de límites. Para encontrar el valor del límite de una función algebraica es conveniente demostrar primeramente las siguientes reglas:

Regla 1. El límite de una función polinomial es igual al valor del polinomio para el valor hacia el cual tiende la variable **x**.

Demostración :

Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n)$$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1 x + \ldots\ldots + \lim_{x \to a} a_n x^n$$

(Teorema 3)

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + \ldots\ldots + a_n \lim_{x \to a} x^n$$

(Teorema 1 y 2)

$$= a_0 + a_1 (a) + \ldots\ldots + a_n (a^n)$$

(Cor. del teorema 4)

Ahora, el valor de $P(x)$ en $x = a$ es:

$$P(a) = a_0 + a_1 (a) + \ldots\ldots + a_n (a^n)$$

$$\therefore \lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

L. C. D. D.

Regla 2. El límite de un cociente de polinomios es igual al cociente de los valores numéricos de los polinomios siempre y cuando el valor del denominador sea diferente de cero.

Demostración :

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_n x^n$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} P(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q(x)} \; ; \text{ cuando } \lim_{x \to a} Q(x) \neq 0$$

(Teorema 5)

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} (a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n)}{\lim\limits_{x \to a} (b_0 + b_1 x + \cdots\cdots + b_n x^n)}$$

$$= \frac{a_0 + a_1 (a) + \cdots\cdots + a_n (a^n)}{b_0 + b_1 (a) + \cdots\cdots + b_n (a^n)}$$

(Regla 1)

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \; ; \; Q(a) \neq 0$$

L. C. D. D.

Ejemplo: Evaluar: $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 4)$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 4) = 2^2 - 3(2) + 4$$
$$= 4 - 6 + 4 = \underline{\underline{2}}$$

3.6 Formas indeterminadas. En algunos casos sucede que el valor numérico de una función es una forma indeterminada, es decir una expresión numérica a la que puede atribuírse cualquier valor de un conjunto infinito de números. Por ejemplo:

$$\text{Sea } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Supongamos que deseamos encontrar $F(2)$:

$$f(2) = \frac{4 - 6 + 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

La expresión $\frac{0}{0}$ puede ser cualquier número real $\underline{C}$ porque:

$$\frac{0}{0} = C \text{ implica : } 0 = C\,0$$
$$0 = 0, \text{lo cual es una identidad.}$$

Esta forma indeterminada y otras que resultan al evaluar funciones algebraicas, pueden ser en algunos casos, interpretadas como el límite de la función cuando la variable tiende al valor considerado. Veamos como puede intentarse la eliminación de la indeterminación en tres casos de formas indeterminadas que corresponden a valores numéricos de funciones algebraicas:

Caso 1. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en un cociente de polinomios.

Consideremos el ejemplo anterior:

$$F(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Para $x = 2$, encontramos:

$$F(2) = \frac{0}{0}$$

Ahora:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Factorizando numerador y denominador:

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \; ; \; (x - 2) \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{2 - 1}{2 + 2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Regla: Para eliminar la indeterminación $\frac{0}{0}$ en un cociente de polinomios en $\underline{x}$, se factorizan numerador y denominador y se eliminan los factores comunes en el límite de la función. (Al aplicar límite a la función, los factores eliminados son diferentes de cero).

Caso 2. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en una fracción con radicales.

$$\text{Sea } g(x) = \frac{x - 7}{\sqrt[4]{x - 4} - \sqrt[4]{3}}$$

El valor de g (x) en X = 7 es:

$$g\ (7)\ \frac{7-7}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

Aplicando límites:

$$\lim_{x \to 7} g\ (x) = \lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$$

Multiplicando numerador y denominador por: $(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}) \neq 0$ para racionalizar:

$$\lim_{x \to 7} g\ (x) = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\ (\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x-4}-\sqrt{3})\ (\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\ (\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{x-4-3}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\ (\sqrt{x-4}+\sqrt{3})}{(x-7)}\ ;\ (x-7) \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 7} (\sqrt{x-4}+\sqrt{3})$$

$$= \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

<u>Regla</u>. Para eliminar la indeterminación $\frac{0}{0}$ en una función en la que el numerador o el denominador contiene radicales, se racionaliza el límite de la función y se simplifica la parte irracional en el resultado.

<u>Caso 3</u>. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ en una fracción polinomial.

$$\text{Sea:}\quad f\ (x) = \frac{x^2-3}{x^3-2x+8}$$

El valor de F (x) en x = ∞ no existe. El límite de f (x) cuando tiende <u>x</u> a infinito es:

$$\lim_{x \to \infty} f\ (x) = \frac{\infty}{\infty}\ \text{(indeterminado)}$$

Dividiendo entre x^3 el numerador y denominador:

$$\lim_{x \to \infty} f\ (x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

<u>Regla</u>. Para eliminar la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en el límite de una función algebraica racional, se divide entre la mayor potencia de la variable <u>x</u> que esté en numerador o denominador y se evalúa el resultado.

Las formas indeterminadas que acabamos de discutir son de gran utilidad para el cálculo de derivadas y reglas de derivación que veremos en el cálculo diferencial. Formas indeterminadas mas complicadas pueden ser evaluadas por la <u>regla de L'Hospital</u> cuya demostración se basa en conceptos avanzados de cálculo y será considerada después.

<u>3.7 Derivada de una función</u>.

<u>Introducción</u>: El objetivo principal del cálculo diferencial es el estudio de la variación de una función <u>f (x)</u> al variar la variable independiente <u>x</u>. El cálculo diferencial establece técnicas para encontrar una medida de variación de una función. Esta medida de variación, que llamaremos la derivada de la función, es de gran utilidad en las aplicaciones como veremos mas adelante.

Los inventores del cálculo infinitesimal fueron Isaac Newton y Gottfried W. Leibnitz en el siglo XVII. Newton desarrolló el cálculo diferencial bajo el nombre de teoría de las fluxiones y publicó su primera obra sobre cálculo en 1687. Por otra parte, Leibnitz publicó sus descubrimientos del cálculo infinitesimal en 1684.

<u>Incrementos</u>. El incremento de una variable <u>x</u> es el cambio que experimenta <u>x</u> al pasar de un valor x_1 a otro valor x_2 de su dominio de definición. Lamaremos Δx (delta x) al incremento de <u>x</u>. De acuerdo con la definición:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

El valor de x puede ser positivo o negativo de acuerdo con los valores de $\underline{x_1}$ y $\underline{x_2}$

Ejemplos:

1. Cuando $\underline{x}$ cambia de $x = 3$ a $x = 8$, entonces:

$$x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 8, \text{ entonces:}$$

$$\therefore \Delta x = 8 - 3 = \underline{\underline{5}}$$

2. Cuando $\underline{x}$ cambia de $x = 1$ a $x = -2$, entonces:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -2$$

$$\therefore \Delta x = x_2 - x_1 = -2 - 1 = \underline{\underline{-3}}$$

Incremento de una función $f(x)$. Si a la variable independiente se le aplica un incremento Δx, entonces la función $f(x)$ recibe también un incremento $\Delta f(x)$ que es igual a $f(x + \Delta x) - f(x)$ siendo $\underline{x}$ el valor inicial a partir del cual se aplica el incremento a la variable independiente. La siguiente gráfica ilustra el incremento de una función correspondiente a un incremento de la variable independiente: (Fig. 3.6)

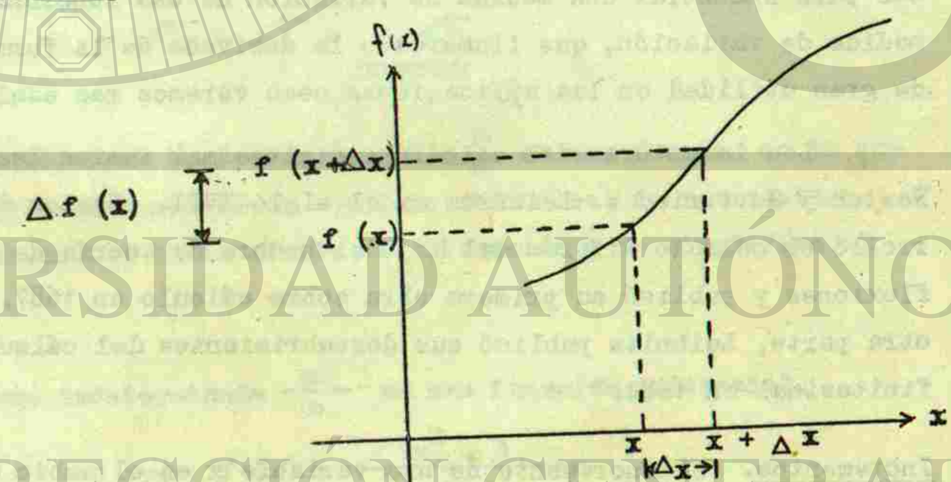


Fig. 3.6

De la gráfica se deduce inmediatamente:

$$\underline{\underline{\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)}}$$

Hemos encontrado una fórmula general para encontrar el incremento de la función para un incremento dado de la variable independiente. Desde luego, $\Delta f(x)$ puede ser positivo o negativo de acuerdo con el valor de Δx y la forma de la curva de la función en el intervalo considerado.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Encontrar la expresión general para $\Delta f(x)$ y calcular su valor cuando $\underline{x}$ cambia de $x = 1$ a $x = 3$.

Solución:

a) Expresión general para $\Delta f(x)$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Ahora: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 - 3x - 3\Delta x + 4$$

$$\therefore f(x + \Delta x) = x^2 - 3x + 4 + 2x\,\Delta x - 3\Delta x + \overline{\Delta x}^2$$

$$- \; f(x) = -x^2 + 3x - 4$$

$$\therefore \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \underline{\underline{2x\,\Delta x - 3\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2}}$$

b) Si x cambia de $x = 1$ a $x = 3$:

$$x_1 = 1 \; ; \; x_2 = 3$$

$$\Delta x = 3 - 1 = 2$$

Sustituyendo en $\Delta f(x)$:

$$\Delta f(x) = 2(1)(2) - 3(2) + (2)^2$$

$$= 4 - 6 + 4$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

Derivada. La derivada de una función con respecto a la variable independiente es la razón de cambio instantánea de la función con respecto a la variable independiente. En otras palabras, la derivada es el límite del cociente de los incrementos de la función y la variable independiente cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

En símbolos, sea $y = f(x)$. Entonces la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$ es:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = f_x(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(diferentes notaciones para denotar la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$)

Hemos encontrado que:

$\Delta f(x) = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La derivada así definida es una medida de variación instantánea de la variable dependiente $\underline{y}$ con respecto a la variable independiente $\underline{x}$. Es importante observar que la existencia del límite envuelto, en todo caso, es una propiedad local de la función en el valor considerado de la variable independiente $\underline{x}$. Si la derivada existe en un punto $x = x_0$, se dice que la función es derivable en este punto. Si una función es derivable en todos los puntos de un intervalo $a \leq x \leq b$, entonces se dice que la función es derivable en el intervalo.

Interpretación geométrica de la derivada. De acuerdo con su definición, la derivada de una función $f(x)$ es otra función $f'(x)$, cuyo dominio es el conjunto de valores de $\underline{x}$ para los cuales la derivada existe. Para entender el significado geométrico del valor de la derivada en un punto de la curva de la función $f(x)$, recordemos la definición de tangente a una curva en un punto dado:

Def. Supongamos que la curva de la función $y = f(x)$ es la de la figura 3.7:

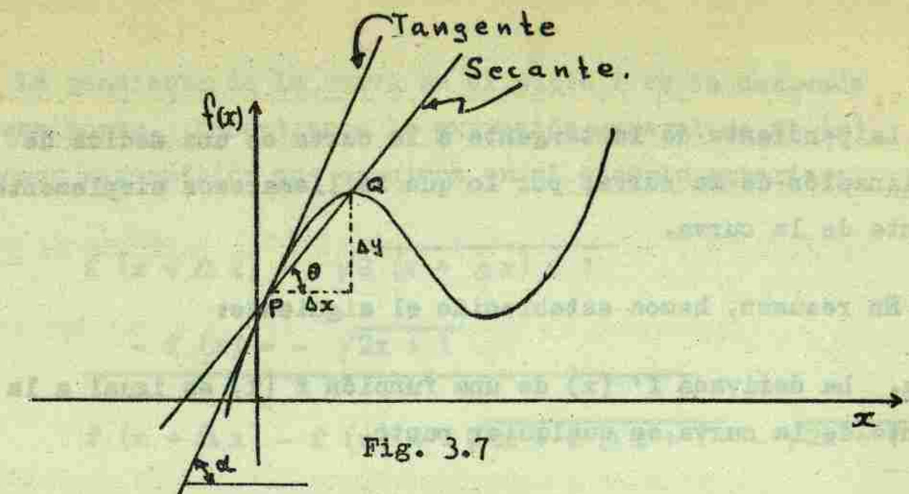


Fig. 3.7

Consideremos la línea secante $\underline{S}$ que pasa por los puntos $P(x, y)$ y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Si mantenemos fijo el punto P y giramos sobre él la secante $\underline{S}$ de manera que el punto Q tienda al punto P, entonces la posición límite de la recta secante S es la tangente a la curva en el punto P.

Examinemos ahora el significado geométrico de la derivada. El cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la tangente trigonométrica de la inclinación de la secante $\underline{S}$, es decir, es la pendiente de la recta S. De la figura:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta = m_s$$

Ahora, la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ es el límite del cociente de los incrementos cuando Δx tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando Δx tiende a cero, el punto Q tiende al punto P y por lo tanto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a la tangente trigonométrica de la inclinación de la tangente T, es decir, a la pendiente de la recta tangente en el punto P. De la figura:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha = m_T$$

Entonces, la derivada de una función es la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto donde la función sea derivable.

La pendiente de la tangente a la curva es una medida de la inclinación de la curva, por lo que la llamaremos simplemente pendiente de la curva.

En resumen, hemos establecido el siguiente:

Teorema. La derivada f' (x) de una función f (x) es igual a la pendiente de la curva en cualquier punto.

Ejemplos. 1. A partir de la definición, encontrar la derivada de la función:

$$f(x) = x^2 + 8x + 2$$

Solución: Por definición, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 8(x+\Delta x) + 2$$
$$f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 + 8\,\Delta x + 8x + 2$$
$$-f(x) = -x^2 \qquad -8x - 2$$
$$\therefore f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\,\Delta x + \overline{\Delta x}^2 + 8\,\Delta x$$

Dividiendo esta ecuación entre Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 8$$

Aplicando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 8) = 2x + 8$$

Entonces:

$$\underline{f'(x) = 2x + 8}$$

Ejemplo 2. Encontrar la pendiente de la curva de la función siguiente en el punto P (4, 3):

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

Solución. La pendiente de la curva en el punto P es la derivada f' (x) en ese punto. Encontremos la expresión general de f' (x) por el proceso sistemático que seguimos en el ejemplo anterior:

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{2(x+\Delta x)+1}$$
$$-f(x) = -\sqrt{2x+1}$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{2x + 2\Delta x + 1} - \sqrt{2x+1}$$

Dividiendo entre Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2x+2\Delta x+1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x}$$

Aplicando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x+1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+1}}{0} = \frac{0}{0}$$

(Indeterminado).

Para eliminar la indeterminación, racionalizamos el numerador, multiplicando numerador y denominador por: $\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{2x+2\Delta x+1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + 1 - 2x - 1}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{(\sqrt{2x+2\Delta x+1} + \sqrt{2x+1})\cancel{\Delta x}} = \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \quad \therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

En el punto P (4, 3) tenemos: $f'(4) = \dfrac{1}{\sqrt{8+1}} = \dfrac{1}{3}$

$\cancel{\sqrt{2x+1}}$

$\frac{1}{3}($

Es decir, la pendiente a la curva en el punto P (4, 3) es igual a $\frac{1}{3}$.

Observación. Este último ejemplo da una idea de lo laborioso y en muchos casos complicado que resulta encontrar la derivada aplicando directamente la definición. Para simplificar lo más posible este trabajo, aprovecharemos la clasificación de las funciones para establecer reglas generales de derivación que serán de gran utilidad para el cálculo de derivadas.

Ejercicio 7.

Tema: Secuencias, Límites y Continuidad.

1. Encontrar los primeros cinco términos de las secuencias dadas por las siguientes funciones definidas sobre enteros positivos. Describir el comportamiento de los términos de la secuencia.

   1.1 $f(n) = \frac{1}{n}$

   1.2 $f(n) = n(n+1)$

   1.3 $f(n) = 2n - 3$

   1.4 $f(n) = -n^3$

   1.5 $f(n) = \frac{n+1}{n}$

   1.6 $f(n) = 1 + \frac{1}{n^2}$

2. Consideremos la función $y = \frac{1}{x+4}$, dónde $x = \frac{1}{n+1}$; n: entero positivo. Encontrar los primeros 5 términos de la secuencia definida por y.

3. Aplicando los teoremas de límites, evaluar las siguientes expresiones:

   3.1 $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 4)$

   3.2 $\lim_{x \to 1} (x - 8)^2$

   3.3 $\lim_{x \to 0} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 1}$

   3.4 $\lim_{x \to \infty} (3x - 2)$

   3.5 $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^3 - 3x - 10}$

   3.6 $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + x - 5}$

ojo !!!

4. Graficar y encontrar el dominio y co-dominio de las siguientes funciones. Determinar para que valores de x la función es discontínua:

   4.1 $f(x) = 2x + 3$

   4.2 $f(x) = \frac{x+4}{x^2 - 4}$ $\longrightarrow$ $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4 \to x = 2$, $x = \pm 2$

   $\frac{x+4}{x^2-4}$

   4.3 $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$

   4.4 $f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

x	$f(x)$
0	-1
1	-5/3
1.5	-3.17
→ 2	→ ∞
3	1.4
4	2/3
∞	0
-1	-1
-2	-∞
-3	0.2
→ -∞	0

5. Graficar la función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Como debe definirse esta función en $x = 3$ para que sea contínua en todo x real.

$\frac{x+4}{x^2-4}$ $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1}$

Ejercicio 8.

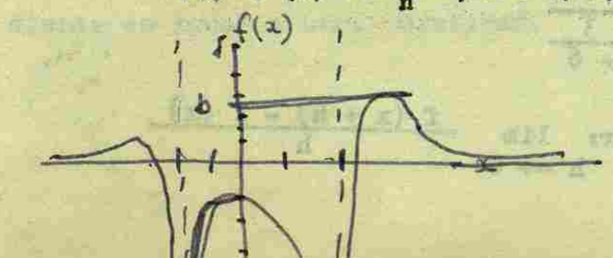
Tema: Límites y continuidad.

1. Encontrar los límites de las siguientes secuencias: (Encontrar los primeros 4 términos).

   1.1 $f(n) = \frac{1}{2n}$; n = 1, 2, 3. ....

   1.2 $f(n) = -\frac{1}{3n}$; n = 1, 2, 3, ...

   1.3 $f(n) = \frac{n+2}{n}$; n = 1, 2, 3, ...



Co = Reales mayores $-\infty \le b$
Do = Reales salvo $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

1.4 $f(n) = \dfrac{1}{1 + n^2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

1.5 $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

1.6 $f(n) = 5$ si $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. Aplicando los teoremas de límites, encontrar:

2.1 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

2.2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x - 6}$

2.3 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2h + 3xh^2 + h^3}{2xh + 5h^2}$

2.4 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

2.5 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 3}{x + 5}$

2.6 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x + 5}$

2.7 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 2}{x^3 - 3x + 4}$

2.8 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots\cdots x\, a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots\cdots + b_n x^n}$

2.9 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

2.10 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h - x}{h}$

2.11 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x + 6}}$

3. Si $f(x) = x^2$, encontrar: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Ejercicio 9.

Tema: Derivada, a partir de la definición.

1. Encontrar la derivada por el proceso delta:

1.1 $y = 3x + 4$

1.2 $y = 2x^2 + 1$

1.3 $y = x^2 - 3x + 4$

1.4 $y = x^3 - 2x + 8$

1.5 $y = x^3 - x^2 + 1$

1.6 $y = \dfrac{2}{x^2 - 2}$

1.7 $y = \dfrac{x^2}{(1 - x^2)}$

1.8 $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

1.9 $y = \sqrt{x + 2}$

1.10 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

1.11 $f(x) = ax^2 + bx + c$

1.12 $f(t) = \dfrac{1}{t}$

1.13 $f(t) = (t - 4)^3$

1.14 $f(x) = (x - 4)(x + 4)$

1.15 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 8}}$

2. Encontrar la pendiente a la curva en el punto cuya abcisa se indica: (Graficar).

2.1 $y = 2x^2 - 1$; $x = 2$

2.2 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $x = 3$

2.3 $y = \dfrac{2}{x - 1}$; $x = 2$

2.4 $y = \sqrt{2x - 1}$; $x = 1$

3. Encontrar el punto de la curva $y = x^2 - 3x$ en el que la pendiente es igual a uno. Graficar.

4. Hallar los puntos sobre la curva $y = x^3 + 1$ donde la tangente a la curva es paralela a la recta $y = 3x$. Graficar.

5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ en el punto cuya abcisa es $x = 2$. Graficar.

$f(x) = 2x^2-3x+6$ $\quad x=2 \quad P(2,8)$

$2(2)^2-3(2)+6 = 8 \rightarrow (y)$

$\frac{dy}{dx} = m = 4x-3$

$x = \rightarrow 2$

$4(2)-3 = 5$

$m = 5 \; ; \; P(2,8)$

Ecuación Recta = $y-8 = 5(x-2)$

$y-8 = 5x-10$

Ecuac Tang. de: $y-5x+2=0$

x	f(x)
0	6
1	4
2	8
3	15

$y = x^3+1$

$T \parallel y = 3x$ (L)

$m_L = 3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$m_T = f'(x) = 3x^2$

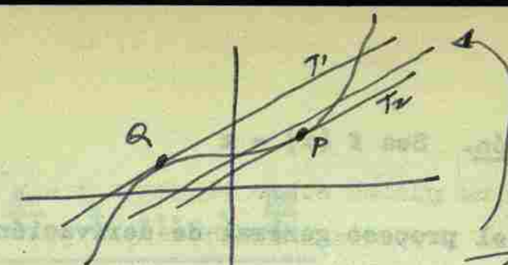
$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x=1 \; ; \; y=2 \quad P(1,2)$

$x=-1 \quad y=-1+1=0 \quad Q(-1,0)$



$y = 3x$

x	y
0	0
2	6

CAPITULO 4

REGLAS PARA DERIVAR.

x	y
-2	-7
-1	0
0	1
1	2

4.1 Reglas para Derivar Funciones Algebraicas. Del proceso general para obtener la derivada de una función a partir de la definición, deduciremos reglas para la derivación de formas funcionales que son importantes en las aplicaciones. Empezaremos con las funciones algebraicas. Deberá entenderse siempre que se trata de funciones de una variable x.

Regla 1. La derivada de una constante es cero.

Demostración: Sea $f(x) = c$. Aplicando el proceso delta:

$$f(x + \Delta x) = c$$
$$-f(x) = -c$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$
$$f'(x) = 0$$

Regla 2. La derivada de x con respecto a x es igual a 1.

4. Hallar los puntos sobre la curva $y = x^3 + 1$ donde la tangente a la curva es paralela a la recta $y = 3x$. Graficar.

5. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ en el punto cuya abcisa es $x = 2$. Graficar.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ $x = 2$ $P(2,8)$

$2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 \to y$

$\frac{dy}{dx} = m = 4x - 3$

$x = \to 2$

$4(2) - 3 = 5$

$m = 5$; $P(2,8)$

Ecuación Recta = $y - 8 = 5(x - 2)$

$y - 8 = 5x - 10$

Ecuac Tang. de: $y - 5x + 2 = 0$

x	f(x)
0	6
1	4
2	8
3	15

$y = x^3 + 1$

$T \parallel y = 3x$ (L)

$m_L = 3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$m_T = f'(x) = 3x^2$

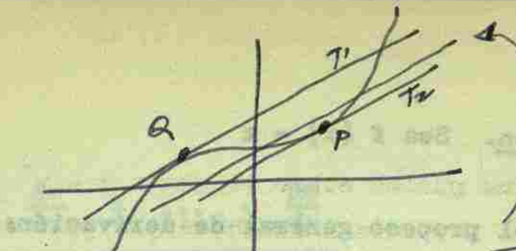
$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x = 1$; $y = 2$ $(P(1,2))$

$x = -1$ $y = -1 + 1 = 0$ $Q(-1,0)$



$y = 3x$

x	y
0	0
2	6

x	y
-2	-7
-1	0
0	1
1	2

CAPITULO 4

REGLAS PARA DERIVAR.

4.1 Reglas para Derivar Funciones Algebraicas. Del proceso general para obtener la derivada de una función a partir de la definición, deduciremos reglas para la derivación de formas funcionales que son importantes en las aplicaciones. Empezaremos con las funciones algebraicas. Deberá entenderse siempre que se trata de funciones de una variable **x**.

Regla 1. La derivada de una constante es cero.

Demostración: Sea $f(x) = c$. Aplicando el proceso delta:

$$f(x + \Delta x) = c$$
$$-f(x) = -c$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$
$$f'(x) = 0$$

Regla 2. La derivada de x con respecto a x es igual a 1.

Demostración. Sea f (x) = x

Aplicando el proceso general de derivación:

$$f(x+\Delta x) = x + \Delta x$$
$$-f(x) = -x$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x$$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1$$
$$\underline{f'(x) = 1}$$

Regla 3. La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

Demostración:

Sea $f(x) = u \pm v \pm \cdots\cdots \pm w.$

donde: $u, v, \ldots, w$ son funciones de x

$$f(x+\Delta x) = (u+\Delta u) \pm (v+\Delta v) \pm \cdots\cdots \pm (w+\Delta w).$$
$$-f(x) = -u \mp v \mp \cdots\cdots \mp w.$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta u \pm \Delta v \pm \cdots\cdots \pm \Delta w$$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \cdots \pm \frac{\Delta w}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \cdots \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \cdots \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \cdots \pm \frac{dw}{dx}}}$$

Regla 4. La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Demostración. Sea $f(x) = c\,u$ donde $u = g(x)$

$$f(x+\Delta x) = c\,(u+\Delta u)$$
$$= cu + c\,\Delta u$$
$$-f(x) = -cu$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = c\,\Delta u$$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\underline{\underline{f'(x) = c\,\frac{du}{dx}}}$$

Regla 5. La derivada de un producto de funciones es igual a la primera por la derivada de la segunda mas la segunda por la derivada de la primera.

Demostración. Sea $f(x) = uv$ donde $\underline{u}$ y $\underline{v}$ son funciones de x.

$$f(x+\Delta x) = (u+\Delta u)(v+\Delta v)$$
$$= uv + u\,\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$-f(x) = -uv$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$f'(x) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \lim_{\Delta u \to 0} \Delta u \frac{dv}{dx}$$

Ahora $\lim_{\Delta u \to 0} \Delta u = 0$

$$f'(x) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Regla 6. La derivada de una potencia de una función es igual al exponente por la función al exponente menos uno por la derivada de la función.

Demostración: Sea: $f(x) = u^n$; $u = g(x)$.

$$f(x + \Delta x) = (u + \Delta u)^n = u^n + n u^{n-1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{2!} u^{n-2} (\Delta u)^2 + \ldots + (\Delta u)^n.$$

$$-f(x) = -u^n$$

$f(x + \Delta x) - f(x) = n u^{n-1} \Delta u + \Delta u$ (Suma de términos que tienen a Δu de factor).

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = n u^{n-1} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}$ (Suma de términos que tienen a Δu de factor)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = n u^{n-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u$ (Suma de ....)

$f'(x) = n u^{n-1} \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \lim_{\Delta u \to 0} \Delta u$ (Suma de términos.....)

$$\therefore f'(x) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

En particular, si $u = x$, se tiene el siguiente:

Corolario. Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n x^{n-1}$

Esta regla es especialmente útil cuando n es grande o fraccionario.

Ejemplos: Derivar

1. $y = x^5$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4$

2. $y = x^{(100,000)}$

$\frac{dy}{dx} = 100,000\ x^{(99,999)}$

Con las reglas hasta ahora establecidas, podemos derivar funciones polinomiales directamente por aplicación sucesiva de varias reglas. Ejemplo:

Derivar: $f(x) = x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 8x - 5$

Solución: Aplicando la regla 3:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(16x^3) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(8x) - \frac{d}{dx}(5)$$

Ahora, aplicando las reglas 1, 4 y 6:

$$f'(x) = 4x^3 - 16 \frac{d}{dx}(x^3) + 3 \frac{d}{dx}(x^2) + 8 \frac{d}{dx}(x) - 0$$

Ahora, aplicando las reglas 2 y 6.

$$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 6x + 8$$

Observación: Con una poca de práctica, se puede obtener directamente la derivada de un polinomio por aplicación simultánea de las diferentes reglas empleadas.

Regla 7. La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo sobre el denominador al cuadrado.

Demostración: Sea $f(x) = \frac{u}{v}$ donde u y v son funciones de x.

Aplicando el proceso delta:

$$f(x + \Delta x) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}$$

$$f(x) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ejemplo: Derivar la siguiente función.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Solución: $F'(x) = \frac{(x^2 + 1)2 - (2x)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Regla 8. La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual a la derivada de la función sobre el doble del radical.

Demostración: Sea $f(x) = \sqrt{u}$; $u = g(x)$

Transformando el radical a exponente fraccionario:

$$f(x) = u^{1/2}$$

Ahora, aplicando la regla 6: $f'(x) = 1/2\, u^{-1/2} \frac{du}{dx}$

Eliminando el exponente negativo: $f'(x) = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{x}}$

Observación: La regla 8 es un caso particular del caso considerado en la regla 6.

Regla 9. (La regla de cadena). Si $z = f(y)$; $y = g(x)$, entonces la derivada de z con respecto a x es igual a la derivada de z con respecto a y por la derivada de y con respecto a x.

Demostración:

Sea: $z = f(y)$; $y = g(x)$

Por definición:

$$\frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \; ; \; \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Entonces: $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ahora, cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta y \to 0$.

$$\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}$$

Entonces: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

4.2 Funciones inversas. Sea $y = f(x)$. Supongamos que $\underline{x}$ puede ser despejada en términos de $\underline{y}$, de manera que $x = g(y)$. Esta nueva función $g(y)$ se le llama la función inversa de $f(x)$. Por ejemplo:

Si: $y = f(x) = 2x + 3$

Despejando $\underline{x}$:

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = g(y)$$

Las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ son mutuamente inversas.

Regla 10. Si $y = f(x)$, entonces la derivada de $\underline{x}$ con respecto a $\underline{y}$ es igual a uno sobre la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$.

Demostración:

Sea $y = f(x)$ y su función inversa $x = g(y)$. Por el proceso delta, se obtiene:

$$1.\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$2.\quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

Multiplicando las ecuaciones 1 y 2:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

$$\therefore \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Aplicando límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ahora, Δy tiende a cero cuando Δx tiende a cero y aplicando los teoremas de límites se obtiene: $\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}}$

4.3 Funciones implícitas. Hasta ahora, hemos considerado que la variable dependiente $\underline{y}$ es una función explícita de $\underline{x}$, es decir, hemos discutido funciones de la forma $y = f(x)$. Supongamos que $\underline{y}$ no está despejada en términos de $\underline{x}$, sino que se tiene lo que se llama una relación funcional entre $\underline{x}$ y $\underline{y}$: $f(x, y) = 0$. En éste caso, si consideramos a $\underline{y}$ como la variable dependiente, diremos que $\underline{y}$ es una función implícita de $\underline{x}$. Por ejemplo: $3xy - x^2 + 4 = 0$

Para encontrar la derivada de una función implícita, se puede intentar primeramente obtener a $\underline{y}$ como una función explícita de $\underline{x}$ para aplicar las reglas de derivación. Sin embargo, esto puede resultar muy complicado y en algunos casos es imposible. Una regla práctica para encontrar la derivada de una función implícita es la siguiente:

Regla 11. Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ en una relación funcional de la forma $f(x, y) = 0$ se deriva, (con respecto a $\underline{x}$) término a término y se despeja después $\frac{dy}{dx}$.

La aplicación de esta regla práctica puede resultar complicada en algunos casos. Más adelante veremos un método para derivar implícitamente con la ayuda de las diferenciales.

Ejemplos:

1. Encontrar la derivada de $\underline{x}$ con respecto a $\underline{y}$, si:

$$y = x^3 - 2x + 8$$

Aplicando la regla de la función inversa (Regla 10):

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 2}$$

Hemos obtenido $\frac{dx}{dy}$ como una función de $\underline{x}$. Si se desea obtener esta derivada como función de $\underline{y}$, tendríamos que despejar $\underline{x}$ en términos de $\underline{y}$ de la función original.

2. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ de la siguiente relación funcional:

$$3x^2 y - 4y^2 + 5x - 28 = 0$$

Derivando término a término con respecto a x:

$$3x^2 \frac{dy}{dx} + 6xy - 8y \frac{dy}{dx} + 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (3x^2 - 8y) = -6xy - 5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{6xy - 5}{3x^2 - 8y}$$

3. Un punto se mueve en un plano siguiendo la trayectoria de la curva $z = x^2 + 4$ de tal manera que x cambia a través del tiempo siguiendo la ley:

$$x = 3t + 2$$

Encontrar $\frac{dz}{dt}$ (proyección vertical de la velocidad del móvil).

Solución:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(Regla 9)}$$

Ahora: $z = x^2 + 4$; $x = 3t + 2$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 2x \; ; \; \frac{dx}{dt} = 3$$

Sustituyendo estas derivadas se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = (2x)\, 3$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = 6x$$

Si deseamos encontrar $\frac{dz}{dt}$ como una función de t, debemos

sustituir en el resultado $x = 3t + 2$ para obtener:

$$\frac{dz}{dt} = 6\,(3t + 2) = \underline{18t + 12}$$

4.4 Derivadas sucesivas de una función. Hemos definido la derivada de una función de una variable, de tal manera que podemos obtenerla por medio de un proceso sistemático. Si repetimos el proceso después de encontrar la derivada, encontramos lo que se llama la segunda derivada de la función, es decir la derivada de la primera derivada de la función. Repitiendo el proceso, 3, 4, o más veces, obtenemos la tercera, cuarta, etcétera, derivadas de la función. Utilizaremos la siguiente notación:

Sea $y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$. 1a. derivada de y con respecto a x.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$. 2a. derivada de y con respecto a x.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x)$. 3a. derivada de y con respecto a x.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d^{iv}y}{dx^{iv}} = y^{iv} = f^{iv}(x)$. 4a. derivada de y con respecto a x.

$\vdots$

$\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Enésima derivada de y con respecto a x.

Ejemplos:

1. Encontrar todas las derivadas sucesivas de la siguiente función:

$$y = x^2 - 3x + 4$$

Solución:

Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$

Segunda derivada: $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 2$

Tercera derivada: $\dfrac{d^3 y}{d x^3} = 0$

Las derivadas de orden mayor que 3 son iguales a cero puesto que $\dfrac{d^3 y}{d x^3} = 0$.

2. Encontrar la primera y segunda derivadas de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} \quad \text{(Regla 8)}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - (x) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 3)^{3/2}}$$

Observación. Las derivadas sucesivas de una función polinomial son cada vez expresiones mas sencillas, como en el primer ejemplo. Por otra parte la derivada de una expresión radical se va complicando a medida que aumenta el orden de la derivación.

Funciones trascendentes. Hemos definido las funciones trascendentes como todas aquellas que no son algebraicas. Estudiaremos únicamente las funciones trascendentes mas importantes en economía que son las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales. Estas funciones han sido discutidas en cursos elementales de matemáticas por lo que sintetizaremos su definición y propiedades fundamentales sin demostrarlas.

Hasta aquí

4.5 Funciones logarítmicas.

Def. El logaritmo en base a de un número real x es el exponente que debe aplicarse al número a para obtener x.

En símbolos matemáticos, si llamamos y al logaritmo en base a de x se tiene:

$$\log_a x = y \text{ tal que } a^y = x.$$

donde $\log_a x$ = Logaritmo en base a de x.

Por ejemplo, si a = 10 se tiene el conocido sistema de logaritmos decimales o logaritmos comunes que es muy útil para hacer cálculos numéricos aproximados. De acuerdo con la definición, podemos citar los siguientes ejemplos:

1. Log. 10 = 1 porque $10^1 = 10$

2. Log. 1000 = 3 porque $10^3 = 1000$

Nota: Cuando una expresión logarítmica está referida a la base 10, se acostumbra no indicar la base como sub-índice, en cuyo caso debe entenderse que se trata de logaritmos decimales. El cálculo de logaritmos decimales de números que no son potencias exactas de 10 es laborioso y requiere conocimientos de desarrollos en serie, por lo que se dispone de tablas que contienen los logaritmos decimales de los números aproximados a 3, 4 o más decimales.

Consideremos la función logarítmica general y su gráfica.

Sea $f(x) = \log_a x$. De la definición se deducen inmediatamente las siguientes características generales de la función logarítmica en cualquier base: $a > 1$

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero.

$$\log_a 1 = 0 \text{ porque } a^0 = 1$$ (cualquier número elevado a la cero es igual a 1)

2. El logaritmo de un número entre cero y uno es negativo y aumenta en valor absoluto a medida que el número se acerca a cero.

En símbolos:

$$\log_a x < 0 \text{ para todo } 0 < x < 1.$$

3. Los logaritmos de los números no-positivos (negativos y el cero) no existen en el sistema de los números reales si la base a es mayor que cero.

4. El logaritmo de un número real mayor que uno es positivo y aumenta cada vez más lentamente a medida que el número aumenta.

En símbolos:

$$\log_a x > 0 \text{ para todo } x > 1.$$

De acuerdo con estas características fundamentales, la función logarítmica tiene como dominio los números reales positivos y su co-dominio son todos los números reales. La curva de la función logarítmica, cualquiera que sea su base es la siguiente:

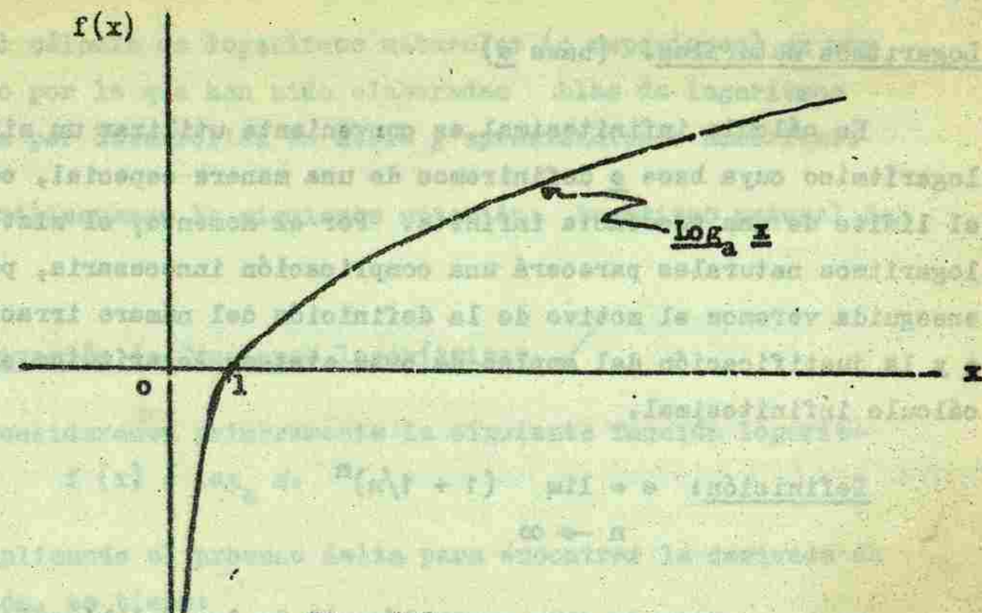


Fig. 4.1

Las propiedades fundamentales de los logaritmos en cualquier base son las siguientes:

(i) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(ii) $\log_a (x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(iii) $\log_a (x_1^n) = n \log_a x_1$

Estas propiedades son de gran utilidad para la simplificación de cálculos numéricos aproximados y para el método de derivación logarítmica que veremos más adelante.

Ejemplo. Encontrar el logaritmo decimal de $\sqrt[3]{2}$ aproximado a 6 decimales.

Solución: Puesto que $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$, se tiene:

$$\log \sqrt[3]{2} = \log 2^{(1/3)}$$

$$= 1/3 \log 2 \text{ (propiedad iii)}$$

De la tabla, se obtiene $\log 2 = 0.301030$.

$$\log \sqrt[3]{2} = 1/3\ (0.301030)$$

$$= 0.100343$$

Logaritmos naturales. (base e)

En cálculo infinitesimal es conveniente utilizar un sistema logarítmico cuya base e definiremos de una manera especial, como el límite de una secuencia infinita. Por el momento, el sistema de logaritmos naturales parecerá una complicación innecesaria, pero enseguida veremos el motivo de la definición del número irracional e y la justificación del empleo de este sistema logarítmico en el cálculo infinitesimal.

Definición: $$e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$$

El desarrollo de esta expresión por la ley del binomio da una serie infinita cuando n tiende a infinito. Investiguemos el valor numérico de la expresión, asignando valores a n cada vez más grandes:

$$\text{Si } n = 1 : (1 + 1/n)^n = (1 + 1/1)^1 = (1 + 1)^1 = 2^1 = 2$$

$$\text{Si } n = 2 : (1 + 1/n)^2 = (1 + 1/2)^2 = (3/2)^2 = 9/4 = 2.25$$

$$\text{Si } n = 3 : (1 + 1/3)^3 = (4/3)^3 = 64/27 = 2.37$$

En general, para cualquier n:

$$(1+1/n)^n = 1^n + n\,(1^{n-1})\,(1/n) + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,(1^{n-2})\,(1/n)^2 + \ldots + (1/n)^n$$

(ley del binomio para enteros n).

Simplificando: $$(1+1/n)^n = 1 + 1 + \frac{n-1}{2!n} + \ldots + 1/(n)^n$$

Si seguimos aumentando n dándole valores enteros positivos, encontramos un valor aproximado del número e. Este valor aproximado a 3 decimales es: $e = 2.718$.

El cálculo de logaritmos naturales (o neperianos) es muy laborioso por lo que han sido elaboradas tablas de logaritmos naturales por desarrollos en serie y aproximaciones numéricas.

Utilizaremos la siguiente notación: logaritmo natural de $x = \ln x$.

4.6 Derivación de funciones logarítmicas.

Consideremos primeramente la siguiente función logarítmica: $f(x) = \log_a x$.

Aplicando el proceso delta para encontrar la derivada de la función, se tiene:

$$f(x + \Delta x) = \log_a (x + \Delta x)$$

$$-f(x) = -\log_a x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

Por la propiedad (ii) de los logaritmos aplicada en sentido inverso:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a \frac{(x + \Delta x)}{x}$$

$$= \log_a (1 + \Delta x/x)$$

Dividiendo entre Δx:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (1/\Delta x)\ \log_a (1 + \Delta x/x)$$

Multiplicando y dividiendo por x el primer factor del lado derecho de la ecuación y sustituyendo $\Delta x/x = \frac{1}{x/\Delta x}$ en el segundo factor, resulta:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1/x\ (x/\Delta x)\ \log_a \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)$$

Ahora, aplicando la propiedad (iii) de los logaritmos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 1/x \log_a\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}$$

Entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1/x) \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}$$

Ahora, un teorema de límites dice que el límite del logaritmo de una variable es igual al logaritmo del límite de la variable.

De acuerdo con este teorema:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = 1/x \left\{\log_a\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}\right]\right\}$$

Si hacemos $n = x/\Delta x$, entonces se tiene que $\lim_{\Delta x \to 0} x/\Delta x = \infty$. Es decir, $\underline{n}$ tiende a infinito cuando Δx tiende a cero. Sustituyendo en la última igualdad:

$$f'(x) = 1/x \left\{\log_a\left[\lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n\right]\right\}$$

Ahora, la expresión entre paréntesis rectangular es el número $\underline{e}$, por definición.

$$\boxed{\therefore\ f'(x) = 1/x \log_a e}$$

Hemos deducido la siguiente:

Regla: La derivada del logaritmo en base $\underline{a}$ de una variable, es igual a uno entre la variable por el logaritmo en base $\underline{a}$ del número $\underline{e}$.

Caso general. Consideremos ahora la función logarítmica mas general:

$$g(x) = \log_a f(x)$$

Sustituyendo $u = f(x)$: $g(x) = \log_a u$

Por la regla de cadena, es decir, la regla para la derivada de una función de una función: $g'(x) = \frac{d(g(x))}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Ahora, por la regla que acabamos de establecer:

$$\frac{d(g(x))}{du} = 1/u \log_a e$$

Además: $\frac{du}{dx} = f'(x)$, puesto que $u = f(x)$

Sustituyendo: $g'(x) = 1/u \log_a e\, f'(x)$

Ahora, devolviendo la sustitución $u = f(x)$:

$$\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e}$$

Este resultado se traduce en palabras por medio de la siguiente:

Regla: La derivada del logaritmo en base $\underline{a}$ de una función de $\underline{x}$, es igual a la derivada de la función sobre la función misma, por el logaritmo en base $\underline{a}$, del número $\underline{e}$.

Corolario. La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función entre la función misma. En símbolos:

Si $y = \ln f(x)$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}}$

Ejemplos: Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \log_2 (2x + 3)$

Solución: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+3} \log_2 e$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \log_2 e}{2x+3}$$

ln x² =

2. $f(x) = \ln (x^2 - 5)^3$

Solución: $$f'(x) = \frac{3(x^2-5)^2\, 2x}{(x^2-5)^3}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{6x}{x^2-5}$$

3. $f(x) = \ln (x^2 - 3x + 2)$

Solución: $$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

4.7 Derivación logarítmica. Es un método de diferenciación que consiste en aplicar logaritmos naturales antes de derivar. Este método es muy útil en algunos casos cuando la función está compuesta por productos, fracciones y (ó) potencias de funciones complicadas. Puesto que los logaritmos transforman productos en sumas, fracciones en restas y potencias en multiplicaciones, la pre-aplicación de logaritmos para derivar, simplifica notablemente la diferenciación:

Ejemplo: Derivar la siguiente función:

$$y = (x^3 - 4)(x^2 + 8)^2$$

Aplicando logaritmos: $\ln y = \ln (x^3 - 4) + 2 \ln (x^2 + 8)$

Derivando:

$$\frac{dy/dx}{y} = \frac{3x^2}{x^3 - 4} + \frac{2(2x)}{x^2 + 8}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3x^2}{x^3 - 4} + \frac{4x}{x^2 + 8}\right)$$

Sustituyendo y: (para tener y' en función de x)

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 4)(x^2 + 8)^2\left(\frac{3x^2}{x^3 - 4} + \frac{4x}{x^2 + 8}\right)$$

$$= 3x^2(x^2 + 8)^2 + 4x(x^3 - 4)(x^2 + 8)$$

$$= (x^2 + 8)(3x^4 + 24x^2 + 4x^4 - 16x)$$

$$= (x^2 + 8)(7x^4 + 24x^2 - 16x)$$

4.8 Funciones exponenciales.

Consideremos la siguiente función exponencial y su gráfica:

$$f(x) = a^x \qquad a > 1 \quad ó \quad 0 < a < 1$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales, mientras que el co-dominio es el conjunto de los números reales no-negativos. En la figura 4.2 aparecen las formas de las curvas correspondientes a funciones exponenciales para los diferentes valores posibles del número a.

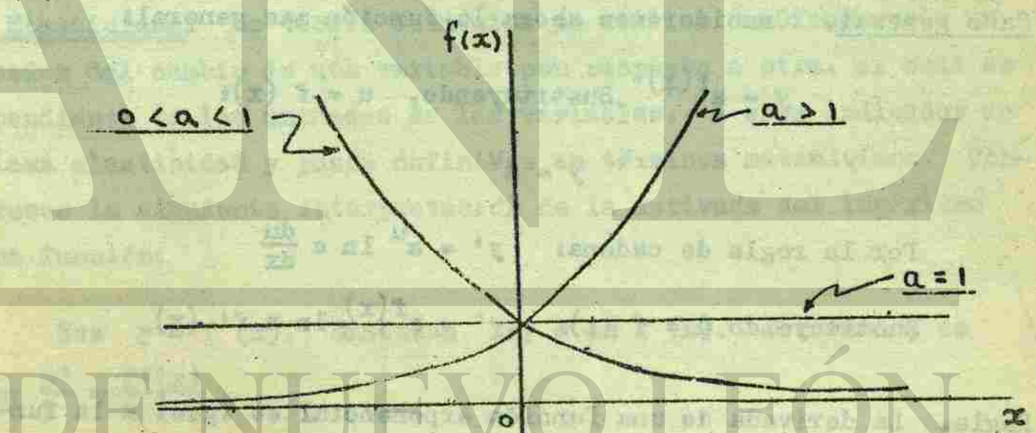


Fig. 4.2

Derivación de las funciones exponenciales. Consideremos primeramente la función: $f(x) = a^x$

Aplicando el método de derivación logarítmica:

$$\ln f(x) = x \ln a$$

Derivando: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$

Entonces: $f'(x) = f(x) \ln a = a^x \ln a.$

Hemos deducido la siguiente:

Regla: La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual a la función misma multiplicada por el logaritmo natural de la constante.

Ejemplo: Encontrar la derivada de $f(x) = 4^x$

Solución: $f'(x) = 4^x \ln 4$

Nota: Si la base de la función exponencial es el número e, entonces su derivada es la función misma. En símbolos: si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

Caso general. Consideremos ahora la función mas general:

$$y = a^{f(x)} \quad \text{Sustituyendo, } u = f(x):$$

$$y = a^u$$

Por la regla de cadena: $y' = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

Sustituyendo $u = f(x)$: $y' = a^{f(x)} \ln a\, f'(x)$

Regla. La derivada de una función exponencial es igual a la función misma por el logaritmo natural de la base por la derivada del exponente.

Corolario. Si $y = e^{f(x)}$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad (\text{porque } \ln e = 1).$$

Nota: En el caso de una función en la que tanto la base como el exponente son variables, se puede derivar por diferenciación logarítmica:

$$y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

Derivando: $y'/y = g(x) \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] + \left[\ln f(x)\right] \cdot g'(x)$

$$y' = y \left\{g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + \left[\ln f(x)\right] \cdot g'(x)\right\}$$

Sustituyendo: $y = f(x)^{g(x)}$

$$y' = g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \left[f(x)\right]^{g(x)} + \left[f(x)\right]^{g(x)} \left[\ln f(x)\right] g'(x)$$

$$\therefore y' = g(x) \cdot \left[f(x)\right]^{g(x)-1} f'(x) + \left[f(x)\right]^{g(x)} \ln f(x)\, g'(x)$$

Regla: La derivada de una función de x elevada a otra función de x es igual a la suma de las derivadas que se obtienen considerando primero el exponente constante y después como variable.

4.9 Elasticidad. En teoría económica se utiliza con frecuencia un indicador del cambio de una variable con respecto a otra, el cual es independiente de las unidades de las variables. A este indicador se le llama elasticidad y puede definirse en términos matemáticos. Consideremos la siguiente interpretación de la derivada del logaritmo de una función:

Sea $y = f(x)$. Entonces $\ln y = \ln f(x)$. Derivando, se tiene: $\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Puesto que y' es la razón de cambio de y con respecto a x, llamaremos a y'/y razón de cambio proporcional de y con respecto a x.

Def. Si y es una función de x, la elasticidad de y con respecto a x es igual al cociente de las razones de cambio proporcionales de y y x con respecto a x.

En términos matemáticos usaremos la siguiente:

Notación:

$$E_x(y) = \frac{\frac{d(\ln y)}{dx}}{\frac{d(\ln x)}{dx}}$$

Simplificando: $E_x(y) = \frac{y'/y}{1/x} = (x/y)y' = (x/y)\ dy/dx$

$$\boxed{E_x(y) = (x/y)\ dy/dx}$$

Esta es una fórmula conveniente para encontrar la elasticidad de y con respecto a x. Gráficamente puede obtenerse $E_x(y)$ dibujando la curva de ln y como función de lnx, es decir, utilizando escalas logarítmicas en lugar de escalas naturales para x y y (Puede utilizarse papel doble-logarítmico). La pendiente de esta curva es la elasticidad puesto que corresponde a la derivada de ln y con respecto a ln x y ésto es precisamente $E_x(y)$, por definición.

Observación. El uso de la fórmula $E_x(y) = (x/y)\ dy/dx$ implica encontrar la derivada de y con respecto a x para lo cual disponemos de una serie de reglas. De la definición de elasticidad y las reglas de diferenciación pueden deducirse reglas para la evaluación de elasticidades en funciones combinadas, como por ejemplo:

$$(1)\quad E_x(u+v) = \frac{uE_x(u) + v\,E_x(v)}{u+v}$$

$$(2)\quad E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$(3)\quad E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v)\ \text{etc.}$$

Sin embargo, la utilización de reglas como éstas en general no es ventajoso y en particular la regla (1) es obviamente conveniente.

4.10 Elasticidad de demanda. Consideremos la ley de demanda para un cierto artículo:

$P = f(x)$; P = Precio ; x = Cantidad demandada.

Por definición de elasticidad. $E_p(x) = (p/x)\ dx/dp$

Esto es la elasticidad de la cantidad demandada con respecto al precio y se llama simplemente elasticidad de demanda. Generalmente se representa por la letra griega eta (η) y para funciones "normales" de demanda es negativa, puesto que la curva "Normal" de demanda es decreciente hacia la derecha lo cual hace que dp/dx sea negativa y por lo tanto dx/dp es negativa, porque:

$$dx/dp = 1/(dp/dx)$$

$\eta = \frac{dx}{dp}\cdot\frac{p}{x}$

Tradicionalmente se ha expresado la ley de demanda considerando a P como una función explícita de x, pero ésto no es problema para el cálculo de η ya que se puede despejar x para encontrar dx/dP ó se encuentra dP/dx y se invierte para encontrar dx/dP. Otra forma de calcular η es utilizar la regla de la función inversa para elasticidades que en seguida demostraremos:

Regla de la función inversa. Si $y = f(x)$, la elasticidad de x con respecto a y es igual a uno sobre la elasticidad de y con respecto a x. $E_y(x) = \frac{1}{E_x(y)}$

Dem. Sea $y = f(x)$ Por definición: $E_x(y) = (x/y)\ dy/dx$

Consideremos la inversa de $E_x(y)$:

$$\frac{1}{E_x(y)} = \frac{1}{x/y\ dy/dx} = (y/x)\ 1/\frac{dy}{dx}$$

Ahora: $dx/dy = 1/\frac{dy}{dx}$ Sustituyendo: $\frac{1}{E_x(y)} = (y/x)\ dx/dy$

Por definición de elasticidad, el lado derecho es igual a la elasticidad de x con respecto a y.

$$E_y(x) = \frac{1}{E_x(y)}$$

L.C.D.D.

De acuerdo con esta regla, la elasticidad de demanda es la inversa de multiplicación de la elasticidad del precio.

Ejemplo. Encontrar la elasticidad de demanda en la siguiente ley de demanda cuando la cantidad demandada es 15:

$$P = \sqrt{100 - 5x}$$

$x =$ Cantidad demandada

$P =$ Precio.

Solución. Para no despejar x en función de P, encontremos la elasticidad del precio para aplicar la regla de la función inversa:

Elasticidad del precio: $E_x(P) = (x/P)\ dP/dx$

Derivando la función de demanda: $dP/dx = \dfrac{-5}{2\sqrt{100 - 5x}}$

Sustituyendo en la elasticidad del precio:

$$E_x(P) = (x/P)\ \frac{-5}{2\sqrt{100 - 5x}}$$

Sustituyendo $P = \sqrt{100 - 5x}$:

$$E_x(P) = \frac{-5x}{2\sqrt{100 - 5x}\ \sqrt{100 - 5x}} = \frac{-5x}{200 - 10x}$$

$$E_x(P) = \frac{-x}{40 - 2x}$$

Ahora, cuando la cantidad demandada $x = 15$:

$$E_x(P) = \frac{-15}{40 - 30} = -15/10 = -3/2$$

Entonces, la elasticidad de demanda es;

$$E_p(x) = \frac{1}{E_x(P)} = \frac{1}{-3/2}$$

$$\therefore\ E_p(x) = -2/3$$

Ejercicio 10.

Tema: Diferenciación de funciones algebraicas.

1. Encontrar la derivada de y con respecto a x:

1.1 $y = x^4$

1.2 $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

1.3 $y = (x^2 - 2)^4$

1.4 $y = \sqrt{1 - 2x^2}$

1.5 $y = (x^2-2x+1)(x^3+1)$

1.6 $y = (2x^2 - 4)\sqrt{1+2x}$

1.7 $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 4}$

1.8 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 4}$

1.9 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$

1.10 $y = x^2 (x^2 - 3x)^{3/2}$

1.11 $y = x^5 - 3x^2 + 6x$

1.12 $y = (2x^2 - 3x + 1)^4$

1.13 $y = (2x + 5)^{3/2}$

1.14 $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 4}$

1.15 $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 2}}$

1.16 $\left(\dfrac{3x - 7}{\sqrt{x + 4}}\right)^5 = y$

2. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

2.1 $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{2x^2}$

2.2 $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$

2.3 $f(x) = (x+33)^2 (x^2 - 1)$

2.4 $f(x) = \dfrac{(x + 2)^3}{x}$

2.5 $f(t) = t^2 + 2t + 1$

2.6 $f(s) = (5s + 4)^{-3}$

2.7 $f(x) = \dfrac{3}{(x^2 - 4x)^3}$

2.8 $f(x)\ \sqrt{(x^2 - 3)^{-4}}$

3. Hallar la derivada en el valor indicado de x:

3.1 $y = (x^2 - 1)^3$ en $x = 2$

3.2 $y = \sqrt{9 + 2x}$ en $x = 8$

3.3 $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}$ en $x = 1$ **Existe la derivada en $x = 2/3$?**

3.4 $f(x) = (x^2 - 4)(x + 2)^3$ en $x = 0$

3.5 $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 2x + 6$ en $x = 2$

Ejercicio 11.

Tema: Función inversa. Función de una función.

1. Encontrar la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$:

   1.1 $x = y^2 - 3y^3 + 2y - 4$

   1.2 $x = \dfrac{y - 3}{y^2 + 3y - 5}$

   1.3 $x = y^2 (1 - 2y)^3$

   1.4 $x = \sqrt{y^3 - 2y + 3}$

   1.5 $x = (y^2 - 4y)(2y + 1)^4$

2. Encontrar la pendiente de cada una de las siguientes curvas en el punto indicado:

   2.1 $x = y^2 - 4y + 3$; $P(3, 0)$

   2.2 $x = (y - 1)^5$; $P(0, 1)$

   $\frac{dy}{dx} = m$

   2.3 $x = \dfrac{y + 1}{y - 1}$; $P(3, 2)$

   2.4 $xy = 1$; $P(1, 1)$

   2.5 $x = \sqrt{2y + 1}$; $P(3, 4)$

3. Encontrar la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$ si:

   3.1 $y = u^3 - 2u + 1$; $u = \sqrt{2x + 3}$

   3.2 $y = u^2 - 2u + 3$; $u = \dfrac{2}{x^2}$

   3.3 $y = \dfrac{u - 1}{u + 1}$; $u = (2x - 1)^4$

   3.4 $y = (u^2 - 2)^3$; $u = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$

   3.5 $y = u - 5$; $u = \dfrac{\sqrt{3x + 4}}{2x - 5}$

   3.6 $y = u^4$; $u = 2 + \sqrt{x}$

   3.7 $y = \dfrac{2u + 1}{u - 4}$; $u = \dfrac{x}{x - 5}$

   3.8 $y = \sqrt{u(u^2 - 1)}$; $u = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

4. Un punto se mueve a lo largo de la curva: $y = x^3 - 4$ de tal manera que $x = \frac{1}{2}t + 4$, donde $\underline{t}$ es el tiempo. Cuando $t = 2$, encontrar:

   a) la velocidad de cambio de $\underline{x}$ con respecto a $\underline{t}$. (Proyección horizontal de velocidad del móvil.

   b) la velocidad de cambio de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{t}$. (Proyección vertical de la velocidad del móvil).

Ejercicio 12.

Tema. Derivadas de alto orden. Derivación implícita.

1. Encontrar las primeras 3 derivadas sucesivas de:

1.1 $f(x) = x^2 - 8x + 4$	1.6 $f(x) = (x - 4)^4$
1.2 $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6x - 1$	1.7 $f(x) = (x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$
1.3 $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x + 5}$	1.8 $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$
1.4 $f(x) = (x - 1)(x^3 + 8x - 3)$	1.9 $g(x) = (x^3 - 1)^6$
1.5 $f(x) = \sqrt{2x + 1}$	1.10 $g(x) = \dfrac{x}{x + 5}$

2. Encontrar todas las derivadas sucesivas de las siguientes funciones en el punto indicado:

   2.1 $f(x) = x^3 - 3x + 2$; Para $x = 1$

2.2 $f(x) = 3x^{7/4}$; para $x = 0$

2.3 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; para $x = 2$

2.4 $f(x) = x^4 - 3x + 8$; para $x = -1$

2.5 $g(x) = (x - 3)^3$; para $x = -2$

3. Encontrar la derivada de y con respecto a x en cada una de las siguientes expresiones:

3.1 $3x^2 - 4y^2 = 5$

3.2 $y^3 + 2x^2 y - 5 = 0$

3.3 $2x^2 + 3xy - y^2 = 4$

3.4 $x^3 + x^2 y^2 - 2xy + y^3 = 6$

3.5 $\dfrac{x^2 - 2y}{x + y^2} = 1$

4. Encontrar la primera y segunda derivada de y con respecto a x:

4.1 $x^2 + xy - 3y^2 = 10$

4.2 $xy + 2x = 5$

4.3 $2x + 3y = -6$

4.4 $\dfrac{xy}{x^2 - 3} = 5$

4.5 $x(y + 2x) = 3x + xy - x^2y^2$

5. Encontrar la pendiente de la curva de las siguientes funciones en el punto indicado:

5.1 $x^2 - 3xy + y^2 = 5$; $P(1, -1)$

5.2 $x^3 - 2y + y^4 = 7$; $P(2, 1)$

5.3 $\sqrt{x} - \sqrt{2y} = 0$; $P(4, 2)$

5.4 $(2x + 3y)^3 = 8$; $P(1, 0)$

5.5 $x - \sqrt{xy} + y = 3$; $P(1, 4)$

Ejercicio 13

Tema. Funciones logarítmicas. Derivación logarítmica.

1. Graficar la función : $f(x) = \log_a x$ para $a = 1$. Encontrar su dominio y co-dominio.

2. Graficar la función: $f(x) = \log_a x$:

2.1 Para $a = 2$

2.2 Para $a = 5$

2.3 Para $a = 10$

3. Encontrar la derivada de las siguientes funciones logarítmicas: Encontrar el valor de la derivada para $x = 2$ en cada caso:

3.1 $y = \ln(4x^2 - 3x + 2)$

3.2 $y = \log(3x - 2)^3$

3.3 $y = (\ln x^2)^3$

3.4 $y = \ln \sqrt{2 - x^2}$

3.5 $y = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}\right)$

3.6 $y = \ln\sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 - 3}}$

3.7 $f(x) = \ln(\ln 2x)$

3.8 $f(x) = \log_5(x^2 - 4)$

3.9 $f(x) = \ln(x^3 - 5)(x^2 + 2)$

3.10 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

3.11 $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{3x + 1}}\right)$

3.12 $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x + 1)}$

4. Derivar las siguientes funciones por el método de derivación logarítmica:

4.1 $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 2)(x - 3)^3}{x^2 - 3x + 2}$

4.2 $f(t) = \dfrac{\sqrt{2t + 5}}{(t^2 - 3)(t + 1)}$

4.3 $f(x) = x^2(2x - 5)^4(x - 1)^3$

4.4 $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x - 1)(x + 4)}{(x^2 + 1)(x - 5)}}$

4.5 $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(x - 2)(x + 3)^2}{(x^3 + 8)(x^2 - 9)}}$

5. Encontrar la pendiente de la tangente a la curva de la función: $f(x) = \ln (x-2)^5$ en el punto cuya abscisa es $x = 3$.

6. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la tangente a la curva de la función:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$ en el punto cuya abscisa es $x = 2$.

Ejercicio 14

Tema: Funciones exponenciales. Elasticidad.

1. Graficar las siguientes funciones:

1.1 $f(x) = 1^x$

1.2 $f(x) = 3^x$

1.3 $f(x) = 10^x$

1.4 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.5 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

1.6 $f(x) = 2^{-x}$

2. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

2.1 $y = e^{5x}$

2.2 $y = 3^{x^2 - 1}$

2.3 $y = e^{\sqrt{x-1}}$

2.4 $y = e^{\ln x}$

2.5 $y = e^{(x + 3)^3}$

2.6 $y = 2^x + 5$

2.9 $f(x) = x^2 e^x$

2.10 $f(x) = (x^2 - 1)\, e^{2x + 3}$

2.11 $f(x) = (2x + 1)^4\, e^{x^2}$

2.12 $g(x) = \ln e^{2x}$

2.13 $g(x) = \ln \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

2.14 $g(x) = x^3 e^{-x^2}$

2.7 $y = e^{\frac{x + 4}{x - 4}}$

2.8 $y = e^{\sqrt{(x + 1)^3}}$

2.15 $f(t) = e^{1/t}$

2.16 $y^5 = e^{2x} + \ln (x - 1)$

3. Encontrar el punto de la curva de la función $y = e^{2x}$ donde la pendiente es igual a 4.

4. Encontrar la pendiente de la curva de la función:

$f(x) = x^2 e^{3x} - \ln (x - 1)$ en el punto cuya abscisa es:

$$x = 0$$

5. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2, 1) y es perpendicular a la tangente a la curva de:

$f(x) = e^{-x^2} + 2x e^x$ en el punto cuya abscisa es $x = 0$

6. Encontrar la primera y segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:

6.1 $f(x) = e^x$

6.2 $f(x) = \ln x$

6.3 $f(x) = e^x \ln x$

6.4 $f(x) = e^{\ln x}$

6.5 $f(x) = \ln e^x$

6.6 $g(x) = e^x (x^2 - 3x + 2)$

6.7 $g(x) = e^{x^2} - x \ln x$

6.8 $g(x) = x + e^{-x}$

6.9 $g(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

6.10 $f(t) = t^2 \ln t + e^{2t}$

7. Encontrar la elasticidad de y con respecto a x en las siguientes funciones:

7.1 $y = xe^{2x}$

7.2 $y = x^2 e^{-3(x + 10)}$

7.3 $y = 2x + 4$

7.4 $y = x^2 - 3x + 2$

7.5 $y = x^2 \ln (2x + 3)$

8. Supongamos que la ley de demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = \frac{4\,0}{x + 2} \; ; \; P = \text{Precio}; \quad x = \text{Cantidad demandada.}$$

Graficar la ley de demanda y encontrar la elasticidad de la demanda cuando la cantidad demandada es 8.

CAPITULO 5

<u>APLICACIONES DE LA DERIVADA</u>

<u>5.1 Aplicación de la Derivada a Gráficas de Funciones.</u> Considerando la función $y = f(x)$, Hemos visto que, de acuerdo con la definición de derivada, la derivada de <u>y</u> con respecto a <u>x</u> es la pendiente de la tangente a la curva de la función en cualquier punto.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$

A la pendiente <u>m</u> de la tangente a la curva en cualquier punto, se le llama también pendiente de la curva y es una medida indicadora de la dirección de la curva en cualquier punto. Puesto que la pendiente es la tangente trigonométrica de la inclinación de la recta tangente a la curva, puede tomar cualquier valor real entre infinito y menos infinito. Analicemos las diferentes posibilidades para el valor de la pendiente y sus correspondientes implicaciones, respecto a la dirección de la curva:

a) Si $f'(x) = m > o$, entonces la tangente tiene una inclinación entre 0^o y 90^o, es decir, la curva de la función está ascendiendo de izquierda a derecha.

En este caso, cuando la derivada es positiva, se dice que la función es creciente.

b) Si $f'(x) = m < o$, entonces la tangente tiene una inclinación

8. Supongamos que la ley de demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = \frac{40}{x+2} \; ; \; P = \text{Precio}; \quad x = \text{Cantidad demandada.}$$

Graficar la ley de demanda y encontrar la elasticidad de la demanda cuando la cantidad demandada es 8.

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1 Aplicación de la Derivada a Gráficas de Funciones. Considerando la función $y = f(x)$, Hemos visto que, de acuerdo con la definición de derivada, la derivada de y con respecto a x es la pendiente de la tangente a la curva de la función en cualquier punto.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$

A la pendiente m de la tangente a la curva en cualquier punto, se le llama también pendiente de la curva y es una medida indicadora de la dirección de la curva en cualquier punto. Puesto que la pendiente es la tangente trigonométrica de la inclinación de la recta tangente a la curva, puede tomar cualquier valor real entre infinito y menos infinito. Analicemos las diferentes posibilidades para el valor de la pendiente y sus correspondientes implicaciones, respecto a la dirección de la curva:

a) Si $f'(x) = m > 0$, entonces la tangente tiene una inclinación entre 0° y 90°, es decir, la curva de la función está ascendiendo de izquierda a derecha.

En este caso, cuando la derivada es positiva, se dice que la función es creciente.

b) Si $f'(x) = m < 0$, entonces la tangente tiene una inclinación entre 90° y 180°, es decir, la curva de la función está descendiendo de izquierda a derecha. En este caso, cuando la derivada es negativa, se dice que la función es decreciente.

c) Si $f'(x) = m = 0$, entonces la tangente es horizontal, puesto que su inclinación es de 0°. Los puntos de la curva que satisfacen esta condición ($f'(x) = 0$) se llaman <u>puntos críticos de tangente horizontal</u>. Estos puntos son de especial importancia para la determinación de máximos y mínimos relativos y para la solución de problemas de optimización que serán estudiados después.

d) Si $f'(x) = m = \infty$ ó $-\infty$, entonces la tangente es vertical puesto que su inclinación es de 90°. Los puntos de la curva que satisfacen esta condición ($f'(x) = \infty$) se llaman <u>puntos críticos de tangente vertical</u> y son también importantes en la determinación de máximos y mínimos.

En resumen: Si la derivada es positiva, la curva es creciente de izquierda a derecha. Si la derivada es negativa, la curva es decreciente de izquierda a derecha. Si la derivada es igual a cero, la curva tiene un punto de tangente horizontal.

<u>Concavidad</u>. Los conceptos geométricos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo son intuitivamente triviales de la observación directa de una curva. Sin embargo, es conveniente formalizar sus definiciones para utilizar el cálculo diferencial en el análisis de sentido de concavidad de una curva.

<u>Def.</u> Un arco de curva es cóncavo hacia arriba si está sobre la tangente a la curva en cualquier punto del arco. Similarmente, el arco es cóncavo hacia abajo si está bajo la tangente a la curva en cualquier punto del arco.

Por medio del cálculo diferencial, podemos establecer el concepto de sentido de concavidad en un punto de la curva. De acuerdo con la definición de derivada, la segunda derivada es una

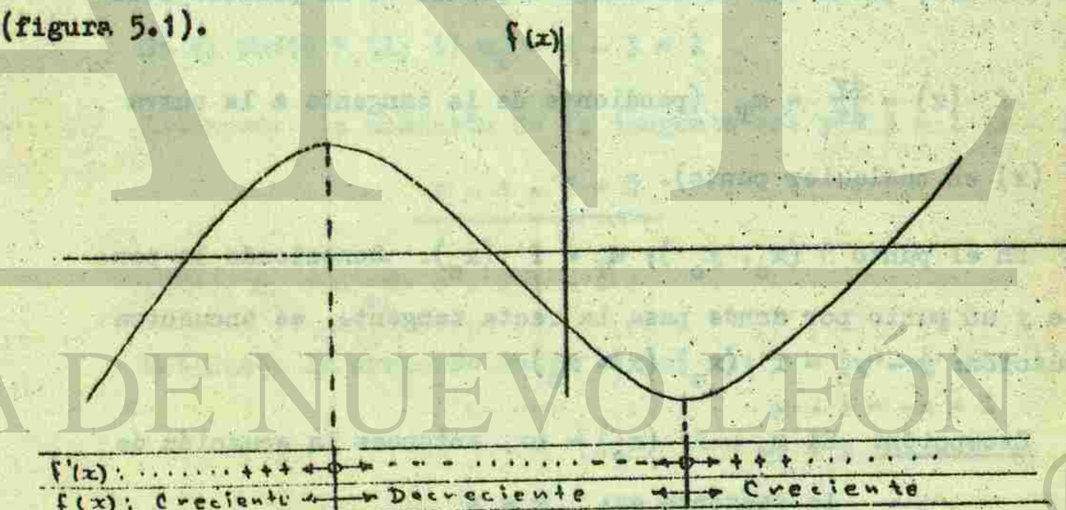
medida del cambio de la primera derivada con respecto a la variable independiente <u>x</u>. Puesto que la primera derivada es la pendiente de la curva, obtenemos las siguientes conclusiones:

a) Si la segunda derivada $f''(x)$ es positiva, quiere decir que la pendiente de la curva está aumentando y por lo tanto la curva es cóncava hacia arriba.

b) Si la segunda derivada es negativa ($f''(x) < 0$) quiere decir que la pendiente está disminuyendo y por lo tanto la curva es cóncava hacia abajo.

c) Si la segunda derivada es cero ($f''(x) = 0$) quiere decir que la pendiente permanece fija en el punto para cambiar el sentido de concavidad. Los puntos que satisfacen esta condición se llaman <u>puntos de inflexión</u>. (1)

Ilustremos con una gráfica la relación entre el crecimiento o decrecimiento de una función y el signo de la primera derivada: (figura 5.1).



<u>Fig. 5.1</u>

De la misma manera podemos ilustrar con una gráfica la relación entre el sentido de concavidad y el signo de la segunda derivada: (figura 5.2)

(1) Observación: Puede suceder que $f''(x) = 0$ y el punto no sea de inflexión, como en el punto $P(0,0)$ de la función $f(x) = x^4$

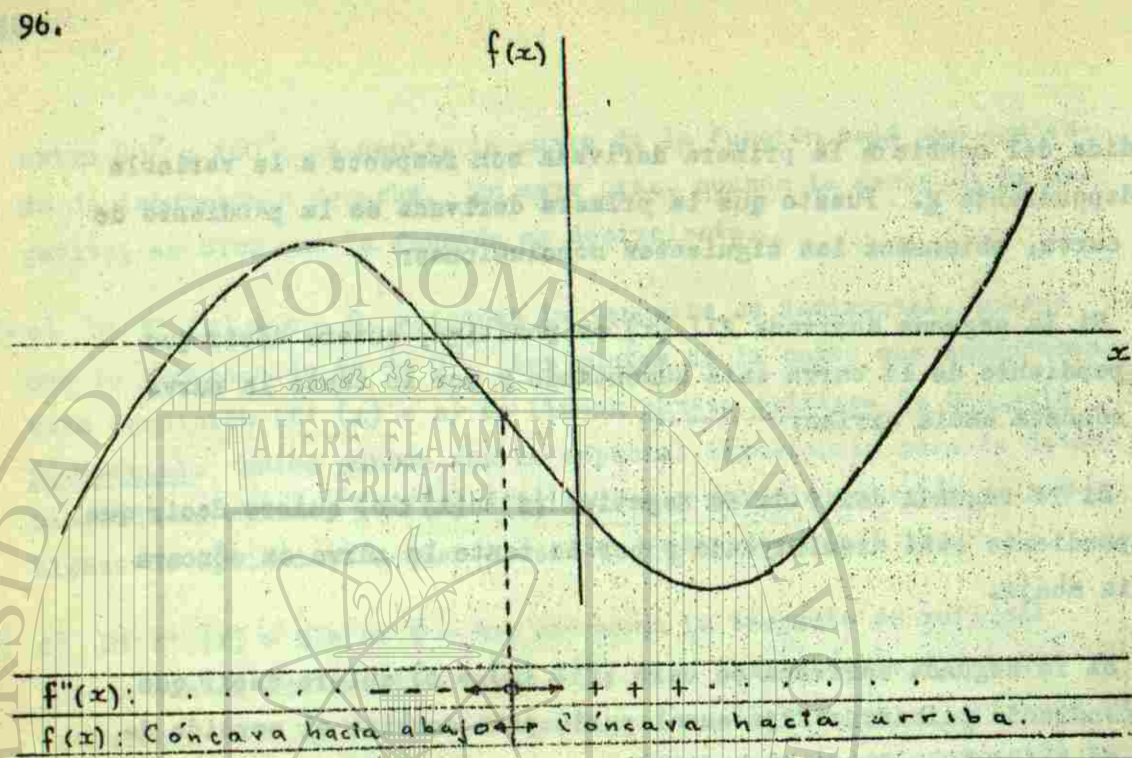


Fig. 5.2

5.2 Tangentes y Normales. La ecuación de la recta tangente a la curva de una función $y = f(x)$ en un punto cualquiera $P(x_o, y_o)$ de su dominio, puede ser determinada a partir de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = m_T$$ (pendiente de la tangente a la curva de $f'(x)$ en cualquier punto).

En el punto $P(x_o, y_o)$; $m_T = f'(x_o)$. Conociendo la pendiente y un punto por donde pasa la recta tangente, se encuentra su ecuación: $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

Excepción: Si $m_T = f'(x_o) = \infty$, entonces la ecuación de la tangente es: $x = x_o$

Similarmente, podemos encontrar la ecuación de la recta normal que se define de la siguiente manera:

Def. La recta normal a la curva de $f(x)$ en el punto $P(x_o, y_o)$ es la perpendicular a la tangente que pasa por el punto en cuestión.

Puesto que la pendiente de la tangente es $m_T = f'(x_o)$, entonces la pendiente de la normal será:

$$m_N = \frac{-1}{f'(x_o)}$$

Entonces, la ecuación de la recta normal que pasa por el punto $P(x_o, y_o)$ y cuya pendiente es $m_N = -\frac{1}{f'(x_o)}$ será:

$$y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$$

Las rectas tangente y normal son auxiliares en el análisis de la gráfica de una función.

Ejemplo: Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la gráfica de la siguiente función en el punto $P(1, 3)$

$$y = 2x^2 - 3x + 4$$

Solución: $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$ $\qquad m_T = 4x - 3$

En el punto $P(1, 3)$ $m_T = 4 - 3 = 1$

Entonces: la ecuación de la tangente es: $y - 3 = 1(x - 1)$

$$\underline{y - x - 2 = 0}$$

Ahora, $m_N = -\frac{1}{m_T} = -1/1 = -1$

Entonces, la ecuación de la normal es: $y - 3 = -1(x - 1)$

$$y - 3 = -x + 1$$

$$y + x - 4 = 0$$

5.3 Máximos y mínimos relativos de una función. Definamos primeramente lo que es un máximo o un mínimo relativo:

Def. Máximo relativo. Un punto $P(x_o, y_o)$, es un máximo relativo de $f(x)$, si $f(x_o) > f(x_1)$ donde x_1 son valores de x en una vecindad de x_o, es decir, valores inmediatamente a la izquierda y a la derecha de x_o.

<u>Def.</u> <u>Mínimo relativo</u>. Un punto Q (x_1, y_1) es un mínimo relativo de f (x) si f $(x_1) <$ f (x_j) donde x_j son valores de <u>x</u> inmediatamente a la izquierda y a la derecha de x_1.

De acuerdo con estas definiciones, se deduce que una condición necesaria para que un punto de la curva de una función sea un máximo o un mínimo relativo, es que la tangente en el punto sea horizontal, es decir, que la primera derivada sea igual a cero. Es conveniente observar que esta condición no es suficiente, es decir, si la derivada es cero en un punto, no se puede asegurar que el punto sea un máximo o un mínimo relativo, ya que puede tratarse de lo que se llama un punto estacionario como el que se indica en la figura 5.3.

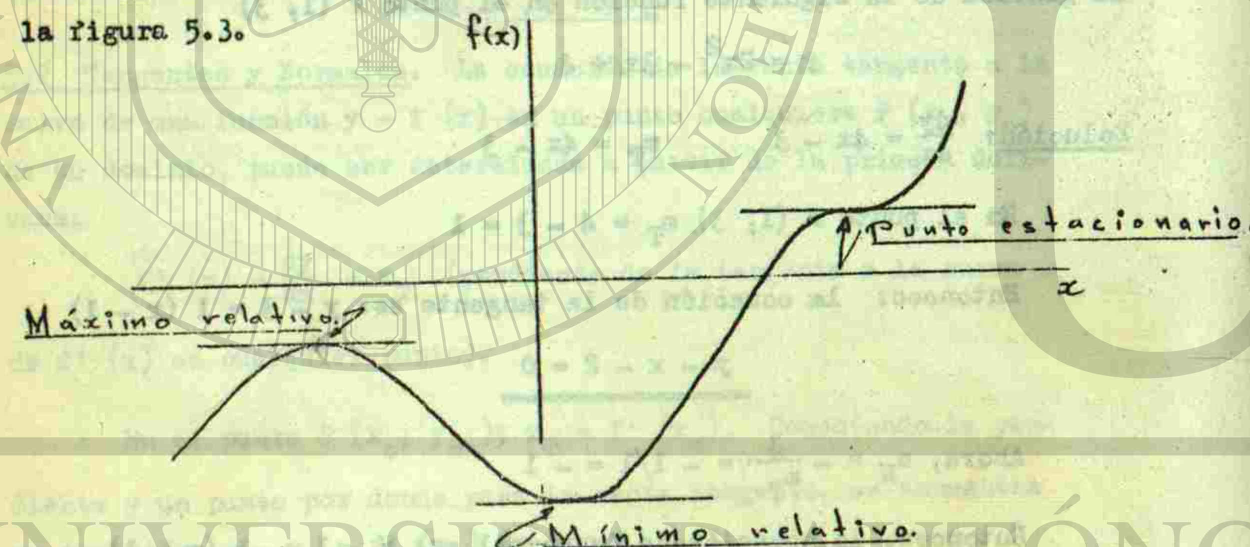


FIG. 5.3

De los conceptos y definiciones establecidas se deducen inmediatamente los procesos para la obtención de máximos y mínimos relativos de funciones de una variable utilizando la primera y segunda derivadas.

<u>I. Método de primera derivada</u>. En este primer método, se utiliza la primera derivada y consiste en lo siguiente:

1. Encontrar los puntos críticos de la función f (x). Para ésto, se encuentra la primera derivada f' (x) y se resuelven las ecuaciones:

a) f' (x) = o (tangente horizontal)
b) f' (x) = $\pm\infty$ (tangente vertical)

2. Se investiga el valor de la primera derivada para cada punto crítico de coordenadas finitas, dando a <u>x</u> valores a la izquierda y a la derecha del punto crítico en cuestión:

a) si f' (x) es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto crítico en cuestión, entonces éste es un máximo relativo de f (x).

b) Si f' (x) es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del punto crítico, entonces éste es un mínimo relativo de f (x).

c) Si f' (x) no cambia signo, el punto crítico no es máximo ni mínimo relativo de f (x).

La figura 5.4 ilustra el método de primera derivada. Los puntos P, Q y R, son los puntos críticos de tangente horizontal. No hay puntos críticos de tangente vertical.

P es un máximo relativo
Q es un mínimo relativo
R es un punto estacionario que no es máximo ni mínimo.

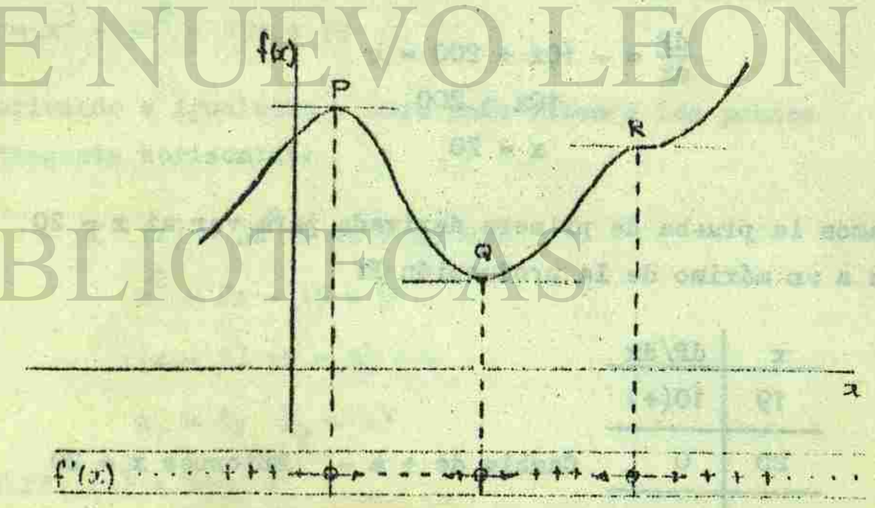


FIG. 5.4

Consideremos como ejemplo el siguiente:

Problema: Una huerta de manzanos tiene 40 árboles por hectárea y el promedio de producción es de 400 manzanas por árbol y por año. Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, determinar el número de árboles por hectárea que darán la máxima producción.

Solución. De acuerdo con el enunciado, la producción actual es (400) (40) = 16,000 manzanas por hectárea y por año. En general, Producción = (No. de árboles por hect.) (Produc. prom. anual de un árbol)

Sea: x = No. de árboles plantados, además de los 40, por hectárea.

Entonces:

Prod. Prom. anual de un árbol = $400 - 5x$. Entonces la producción total será:

$$P = (40 + x)\ (400 - 5x)$$

Derivando:

$$\frac{dP}{dx} = (40 + x)\ (-5) + (400 - 5x\ )\ (1) = -200 - 5x + 400 - 5x = -10x + 200$$

Ahora, igualando a cero para encontrar puntos críticos de tangente horizontal:

$$\frac{dP}{dx} = -10x + 200 = 0$$
$$10x = 200$$
$$x = 20$$

Hagamos la prueba de primera derivada para ver si $x = 20$ corresponde a un máximo de la producción P:

x	dP/dx	
19	10(+)	
20	0	Cambia de + a −. Entonces $x = 20$
21	−10(−)	corresponde a un máximo P.

Entonces, la respuesta es que deben plantarse 20 árboles más por hectárea para obtener la máxima producción

$$P = (40 + 20)\ (400 - 100)$$
$$P = 18{,}000 \text{ manzanas / Ha.}$$

II. Método de segunda derivada. Este método se basa en que la segunda derivada determina el sentido de concavidad de la curva de la función:

1. Se encuentran los puntos críticos de tangente horizontal resolviendo la ecuación: $f'(x) = 0$.

2. Se encuentra la segunda derivada $f''(x)$ y se investiga su signo en los puntos críticos de tangente horizontal.

a) Si la segunda derivada es negativa, el punto crítico en cuestión es un máximo relativo. (Concavidad hacia abajo).

b) Si la segunda derivada es positiva, el punto crítico en cuestión es un mínimo relativo. (Concavidad hacia arriba)

c) Si la segunda derivada es cero, entonces la prueba no implica algo definitivo y debe usarse otro método para determinar si el punto crítico en cuestión es un máximo o un mínimo relativo.

Ejemplo: Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 10$

Solución: Derivando e igualando a cero para obtener los puntos críticos de tangente horizontal:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 = 0$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$(x - 5)\ (x + 3) = 0$$
$$x_1 = 5;\quad x_2 = -3$$

Ahora: $f''(x) = 6x - 6$

Para $x_1 = 5$: $f''(5)\ 30 - 6 = 24\ (+)$

Entonces $x_1 = 5$ corresponde a un mínimo relativo de f (x):

$$f(5) = 125 - 75 - 225 + 10 = -165$$

El punto P (5, - 165) es un mínimo relativo en la gráfica de f (x).

Para $x_2 = -3$: $f''(x) = -18 - 6 = -24\ (-)$

Entonces $x_2 = -3$ corresponde a un máximo relativo de f (x):

$$f(-3) = -27 - 27 + 135 + 10 = 91$$

El punto Q (-3, 91) es un máximo relativo en la gráfica de f (x).

5.4 Aplicaciones de la derivada en teoría económica. Es común, en teoría económica, describir la variación de una variable con respecto a otra por medio de dos tipos de medida que son:

a) Promedios. Representan a la variable dependiente y en un intervalo de la variable independiente x. (Generalmente este intervalo tiene al cero como límite inferior, aunque esta condición no es necesaria.

Def. b) Conceptos marginales: Miden la variación de la variable dependiente y para variaciones pequeñas de la variable independiente x. (Generalmente esta variación pequeña es uno cuando x varía discretamente y tiende a cero cuando x varía continuamente.

De acuerdo con esta definición, los conceptos marginales pueden determinarse por medio del cálculo diferencial ya que la derivada es, por definición, la variación marginal en el caso continuo.

Consideremos la ley de demanda $p = f(x)$ cuya curva es decreciente. (Figura 5.5)

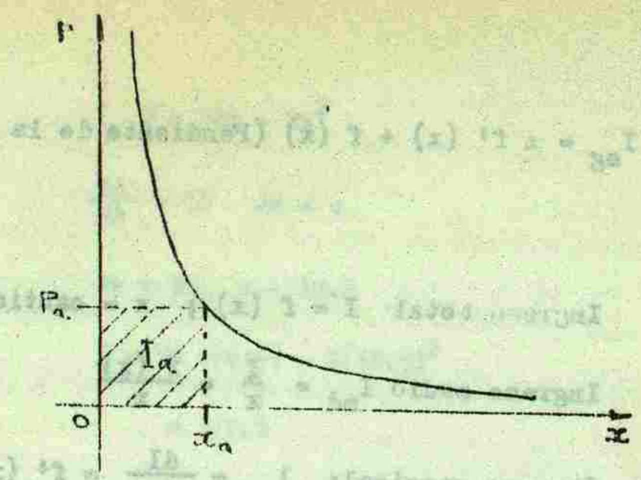


Fig. 5.5

Ingreso total al nivel de demanda x_a : $I_a = x_a\, P_a$

Ingreso medio al nivel de x_a:

$$I_a\ (\text{medio}) = \frac{x_a\, p_a}{x_a - 0}\ (\text{por definición}).$$

$$I_a\ (\text{medio}) = \frac{x_a\, p_a}{x_a} = p_a$$

Entonces el precio P equivale al Ingreso medio correspondiente a una cantidad demandada x para todo valor de x. Por lo tanto, la función de demanda es la misma función del Ingreso medio, es decir: $I_{md} = f(x)$

Entonces, la curva de demanda coincide con la del ingreso medio.

Para encontrar la función del ingreso marginal, consideremos la función del ingreso total:

Por definición, ingreso total es:

$$I = x\, f(x) \quad (\text{Cantidad demandada por el precio}).$$

Desde luego que, si f (x) es contínua, entonces I también es contínua. El ingreso marginal I_{mg} es entonces por definición:

$$I_{mg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{dI}{dx}$$

$I_{mg} = x f'(x) + f(x)$ (Pendiente de la gráfica de $I = x\, f(x)$)

Resumen:

Si: Ingreso total $I = f(x)$; x = cantidad demandada

Ingreso medio $I_{md} = \frac{I}{x} = \frac{f(x)}{x}$

Ingreso marginal: $I_{mg} = \frac{dI}{dx} = f'(x)$

Ejemplo 1. Supongamos que la demanda por un cierto artículo A en un determinado mercado M es dada por la siguiente ley:

$$p = 50 - 2x \text{ (lineal)}; \; x = \text{cantidad demandada.}$$

Determinar el ingreso total, ingreso medio e ingreso marginal como funciones de la cantidad demandada x. Graficar.

De las definiciones:

Ingreso total: I = (precio) (cantidad demandada)

$$I = (50 - 2x)\, x$$

$$\underline{\underline{I = 50x - 2x^2}}$$

Ingreso medio: $I_{md} = \frac{\text{Ingreso total}}{\text{Cant. demandada}}$

$$\underline{\underline{I_{md} = 50 - 2x}}$$

Ingreso marginal: $I_{mg} = \frac{dI}{dx}$

$$\underline{\underline{I_{mg} = 50 - 4x}}$$

Gráficas: La gráfica del ingreso total es una parábola abierta hacia abajo. Cuando $x = 0$; $I = 0$. El máximo ingreso total lo encontramos por cálculo. (Es un punto crítico de tangente horizontal, es decir $\frac{dI}{dx} = 0$).

$$I = 50x - 2x^2$$

$$\frac{dI}{dx} = 50 - 4x = 0$$

$$4x = 50; \; x = 12.5$$

$$I = 50\,(12.5) - 2(12.5)^2$$

$$= 312.5$$

La gráfica del ingreso medio es una recta:

Intersecciones:

x	0	25
I_{md}	50	0

La gráfica del ingreso marginal es también una línea recta:

Intersecciones:

x	0	12.5
I_{mg}	50	0

Las curvas de ingreso total, ingreso medio ó ingreso marginal pueden presentarse en el mismo sistema de referencia. (Figura 5.6)

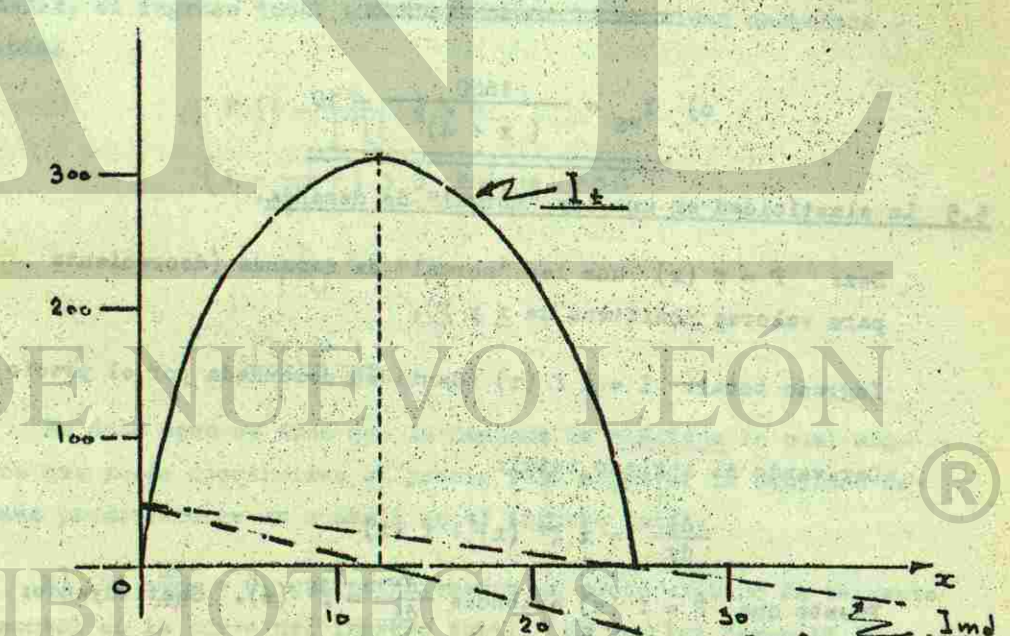


Fig. 5.6

Observaciones:

1. El ingreso total I es máximo cuando el ingreso marginal I_{mg} es cero. Esto es inmediato de la definición de ingreso marginal como la derivada del ingreso total con respecto a la cantidad demandada. (Cuando la derivada es cero, el ingreso total es máximo).

2. Cuando la demanda es lineal (como en este caso) la razón de cambio del ingreso marginal es el doble de la razón de cambio del ingreso medio.

$$\frac{d\, I_{mg}}{d\, x} = 2\, \frac{d\, I_{md}}{dx}$$

Ejemplo 2. Consideremos la siguiente ley de demanda: $P = \frac{400}{x + 4} - 10$

Determinar I, I_{md}, I_{mg}, como funciones de x.

a) $I = \frac{400\, x}{x + 4} - 10x$

b) $I_{md} = \frac{400}{x + 4} - 10$

c) $I_{mg} = \frac{1600}{(x + 4)^2} - 10$

5.5 La elasticidad en una ley "normal" de demanda.

Sea: $P = f(x)$ una ley "normal" de demanda (decreciente para valores positivos de x y P).

Ingreso total: $I = x\, f(x)$ (Cantidad demandada por el precio)

Derivando el ingreso total:

$$\frac{dI}{dx} = x\, f'(x) + f(x)$$

Puesto que $P = f(x)$ entonces $\frac{dP}{dx} = f'(x)$. Sustituyendo:

$$\frac{dI}{dx} = x\, \frac{dP}{dx} + P$$

Sacando a P de factor en el lado derecho:

$$\frac{dI}{dx} = P\left(\frac{x}{P}\, \frac{dP}{dx} + 1\right)$$

Ahora: $\frac{x}{P}\, \frac{dP}{dx}$ = Elasticidad del precio $= \frac{1}{\eta}$

$$\therefore \frac{dI}{dx} = P\,(1/\eta + 1) \qquad \begin{cases} \frac{dI}{dx} = \text{ingreso marginal} \\ P = \text{ingreso medio.} \end{cases}$$

Para una ley "normal" de demanda, η es negativo, así es que anteponiéndole un signo menos $(-\eta)$ consideraremos a η en valor absoluto $(|\eta|)$ lo cual es conveniente para la discusión que sigue:

$$\frac{dI}{dx} = P\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right); \quad |\eta| \geq 0$$

Consideremos las posibilidades para

$$\frac{dI}{dx} = \text{ingreso marginal:}$$

a) Si $\frac{dI}{dx} > 0$, entonces I es creciente hacia la derecha, es decir, el ingreso total aumenta, cuando la cantidad demandada aumenta.

$$P\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right) > 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{|\eta|}\right) > 0 \quad \text{Porque } P > 0$$

$$\frac{1}{|\eta|} < 1$$

$$\underline{|\eta| > 1}$$

En éste caso se dice que la demanda es elástica lo cual significa que puede disminuirse el precio para aumentar la cantidad demandada produciéndose un aumento en el ingreso total.

b) Si $\frac{dI}{dx} = 0$, entonces tenemos un punto crítico de tangente horizontal en la curva del ingreso total. En una ley "normal" de demanda, éste punto crítico es un máximo, es decir, el ingreso total disminuye cuando se aumenta ó disminuye la cantidad demandada:

En este caso $P\left(1-\frac{1}{|\eta|}\right)=0$

$$1-\frac{1}{|\eta|}=0$$

$$\frac{1}{|\eta|}=1$$

$$|\eta|=1$$

c) Si $\frac{dI}{dx}<0$, entonces la curva del Ingreso total es decreciente, es decir, I disminuye al aumentar $\underline{x}$:

$$P\left(1-\frac{1}{|\eta|}\right)<0$$

$$1-\frac{1}{|\eta|}<0 \qquad \text{Porque } P>0$$

$$\frac{1}{|\eta|}>1$$

$$|\eta|<1$$

En este caso se dice que la demanda es inelástica. La siguiente gráfica ilustra los resultados obtenidos cuando la ley de demanda es lineal, como en el ejemplo considerado antes. (Fig. 5.7)

Si $P = a - bx$, entonces $\frac{dP}{dx}=-b$. Ahora $=\frac{x}{p}\frac{dP}{dx}$. Sustituyendo: $\eta=\frac{-bx}{a-bx}$. Veamos para que valor de $\underline{x}$, $\eta=-1$:

$$\eta=\frac{-6x}{a-bx}=-1;\ -bx=-a+bx;\ 2bx=a;\ x=\frac{a}{2b}$$

Ahora el ingreso total es $I_t = p.x = (a-bx)x = ax - bx^2$. Derivando, se obtiene $I_{mg} = a - 2bx$. Para $x=\frac{a}{2b}$ se tiene $I_{mg} = a - 2b\frac{a}{2b} = 0$. Entonces $\eta=-1$, cuando el ingreso marginal es cero, es decir, cuando el ingreso total sea máximo.

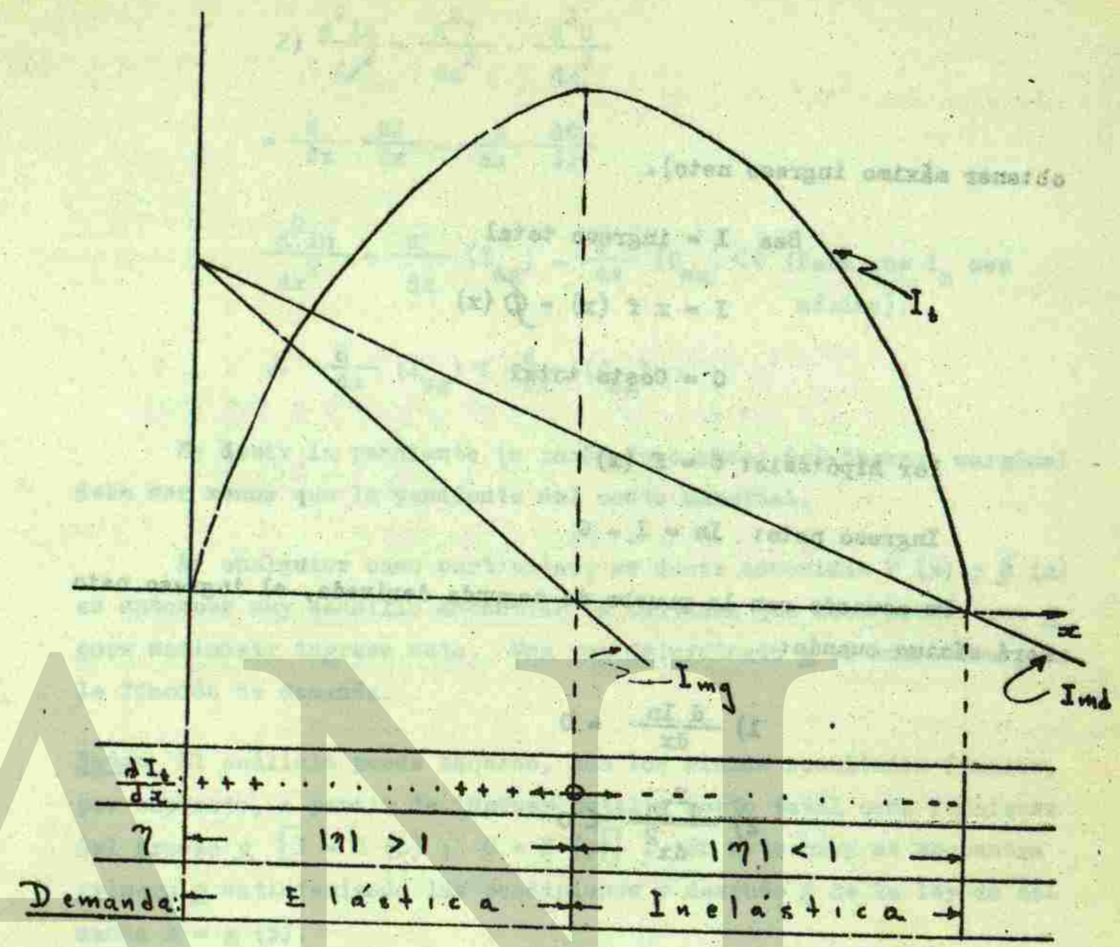


Fig. 5.7

5.6 Problema de monopolio. Supongamos que un monopolista produce un artículo A y sus costos totales a diferentes niveles de producción siguen la ley: $c = F(x)$; x = cant. producida. La demanda en el mercado ha sido también determinada y es la siguiente: $p = f(x)$; p = precio y x = cantidad demandada. El objetivo del monopolista es maximizar el ingreso neto dentro de los límites que se especifican en la función de demanda. Determinar las condiciones óptimas para el monopolista. (Precio del artículo y cantidad producida para obtener máximo ingreso neto).

Sea I = ingreso total

$$I = x\, f(x) = \phi(x)$$

C = Costo total

Por hipótesis: $C = F(x)$

Ingreso neto: $I_n = I - C$

De acuerdo con la prueba de segunda derivada, el ingreso neto será máximo cuando:

$$1)\quad \frac{d\,I_n}{dx} = 0$$

$$2)\quad \frac{d^2 I_n}{dx^2} < 0$$

Ahora:

$$1)\quad I_n = I - C$$

$$\frac{d\,I_n}{dx} = \frac{dI}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0 \therefore \frac{dI}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dI}{dx}\ \text{Ingreso marginal} = I_{mg}$$

$$\frac{dC}{dx} = \text{Costo marginal} = C_{mg}$$

Entonces la primera condición establece que el ingreso marginal sea igual al costo marginal. Gráficamente, las tangentes a las curvas de I y C, deben ser paralelas.

$$2)\quad \frac{d^2 I_n}{dx^2} = \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{d^2 C}{dx^2}$$

$$= \frac{d}{dx}\,\frac{dI}{dx} - \frac{d}{dx}\,\frac{dC}{dx}$$

$$\frac{d^2 I_n}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,(I_{mg}) - \frac{d}{dx}\,(C_{mg}) < 0 \quad \text{(Para que } I_n \text{ sea máximo).}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\,(I_{mg}) < \frac{d}{dx}\,(C_{mg})$$

Es decir la pendiente (o razón de cambio) del ingreso marginal debe ser menor que la pendiente del costo marginal.

En cualquier caso particular, es decir conocidas $F(x)$ y $\phi(x)$ es entonces muy sencillo encontrar la cantidad que debe producirse $\underline{x}$ para maximizar ingreso neto. Una vez determinado $\underline{x}$ se encuentra $\underline{p}$ de la función de demanda.

<u>Nota</u>: El análisis puede hacerse, con los mismos resultados finales, por supuesto, a partir de ingreso total y costo total como funciones del precio $\underline{p}$ $\left[I = G(p)\ ;\ C = H(p)\right]$. En este caso se encuentra primero $\underline{p}$ satisfaciendo las condiciones y después $\underline{x}$ de la ley de demanda $x = g(p)$.

Consideremos el siguiente ejemplo:

<u>Problema</u>: Un monopolista produce $\underline{x}$ unidades de un cierto artículo a un costo total de: $C_t = x^2 - 20x + 1500$. La demanda en el mercado es dada por la siguiente ley: $x = 500 - 5P$, donde $\underline{P}$ es el precio y $\underline{x}$ es la cantidad demandada. Determinar el precio del artículo y la cantidad que debe producirse para obtener el máximo ingreso neto.

<u>Solución</u>. El ingreso total es igual al precio por la cantidad demandada. Entonces, de la ley de demanda, se obtiene:

$$I_t = 500\,P - 5P^2$$

Sustituyendo $x = 500 - 5P$ en la función del costo total:

$$C_t = (500 - 5P)^2 - 20\,(500 - 5P) + 1500$$

$$C_t = 250,000 - 5000\ P + 25\ P^2 - 10,000 + 100\ P + 1500$$

$$C_t = 25\ P^2 - 4900\ P + 241,500$$

Ahora, el ingreso neto es igual al ingreso total menos el costo total. Es decir:

$$I = I_t - C_t$$

$$I = 500\ P - 5P^2 - (25\ P^2 - 4900\ P + 241,500)$$

$$I = 500\ P - 5P^2 - 25P^2 + 4900\ P - 241,500$$

$$I = -30\ P^2 + 5400\ P - 241,500$$

El objetivo del problema es maximizar el ingreso neto I. Aplicando el método de segunda derivada para obtener el valor de P que corresponda al máximo I:

$$\frac{dI}{dP} = -60\ P + 5400 = 0$$

$$60\ P = 5400$$

$$P = 90$$

Ahora:

$$\frac{d^2\ I}{d\ P^2} = -60$$

Entonces: $P = 90$ corresponde a un máximo Ingreso neto.

Ahora, de la ley de demanda:

$$x = 500 - 5P = 500 - 450$$

$$x = 50$$

Entonces, deberán producirse 50 unidades del artículo y venderse a un precio de 90, para obtener el máximo ingreso neto.

Sustituyendo P = 90 en la función del ingreso neto:

$$I = -30\ (8100) + 5400\ (90) - 241,500$$

$$I = -243,000 - 241,500 + 486,000$$

$$I = 1500$$

Ejercicio 15

Tema: Tangentes y normales. Puntos críticos y Puntos de inflexión.

1. Encontrar los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

/ 1.1 $f(x) = x^2 - 2x + 4$

1.2 $f(x) = (x - 1)^5\ (x + 4)^2$

* 1.3 $y^2 - 3y + 1 = 0$

* 1.4 $x = y^3 - 3y + 5$

/ 1.5 $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$

1.6 $g(x) = x^2 - 3x + 2$

/ 1.7 $f(x) = x\ e^x$

1.8 $f(x) = \ln\ (x + 1)$

/ 1.9 $g(x) = e^{x^2} - 4$

1.10 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 5x + 4}$

2. Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado:

/ 2.1	$f(x) = 3x^3 - 2x + 4$	en P (0, 4)
2.2	$y = (x - 3)\ (2x - 4)^5$	en P (2, 0)
/ 2.3	$x^3 - 3\ xy + 2y = 0$	en P (0, 0)
2.4	$f(x) = (x^3 + 3x - 2)^2$	en P (1, 4)
/ 2.5	$x = y^2 - 4y + 1$	en P (-2,3)
2.6	$f(x) = e^x$	en P (0, 1)
/ 2.7	$f(x) = \ln x$	en P (1, 0)
2.8	$g(x) = (x - 1)\ e^{2x}$	en P (0, -1)

/ 3. Determinar el sentido de concavidad en todo el dominio de la función:

$$f(x) = (x - 1)^2\ (x + 4)$$

4. Determinar el crecimiento ó decrecimiento y el sentido de conca-

vidad en todo el dominio de la función:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Ejercicio 16

Tema: Máximos y mínimos

1. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones: (Tangente horizontal y tangente vertical): Determinar si son puntos máximos, mínimos ó estacionarios.

1.1 $y = x - 3x^2$

1.2 $3y^2 - 6y - x = 0$

* 1.3 $x^2 + xy + 5y^2 = 9$

1.4 $y = (x^2 - 3)(x + 4)^3$

1.5 $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

1.6 $y = x^3 - 3x^2 + 6$

1.7 $f(x) = 5 + x^{2/3}$

1.8 $g(x) = (2x - 1)^{1/3}$

2. Encontrar los máximos y mínimos de las siguientes funciones, por el método de la primera derivada:

2.1 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2.2 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$

2.3 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

2.4 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

2.5 $f(x) = (x + 2)^2 (x - 1)^3$

2.6 $f(x) = (2 + x)^{1/3} (1 - x)^{2/3}$

2.7 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 4}$

2.8 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$

2.9 $f(x) = 2x^2 - 4x$

3. Encontrar máximos y mínimos por el método de la segunda derivada:

3.1 $f(x) = x(x^2 + x - 8)$

3.2 $f(x) = x^4 - 4x$

3.3 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

Ejercicio 17

Tema: Aplicaciones de máximos y mínimos.

1. Una empresa desea fabricar cajas de cartón (sin tapa) de piezas rectangulares de 20 cms. por 30 cms. cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando hacia arriba los lados. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de las cajas para obtener máximo volumen?

2. Una industria está situada fuera de una ciudad junto al paso de una vía de ferrocarril. El gerente pide una corrida especial de la ciudad a la industria para sus empleados. La empresa ferrocarrilera está de acuerdo en establecer la corrida especial siempre que viajen por lo menos 200 personas, entendiéndose que el pasaje les costará \$8.00 por persona si van 200 personas, y se disminuirá en un centavo por cada persona que sobrepase a las 200, (es decir: por ejemplo, si viajan 250 personas, el pasaje será de \$7.50 por persona). Qué número de pasajeros proporcionará la máxima utilidad al ferrocarril?

3. Un edificio tiene 80 oficinas. Cuando la renta es de \$60.00 mensuales por oficina, todas están ocupadas. Por cada \$2.00 de aumento mensual en la renta por oficina, se desocupa una. Si los gastos fijos (conservación, impuestos y limpieza) son \$6.00 por oficina, que renta producirá la máxima utilidad al propietario?

4. Una huerta de manzanos tiene 40 árboles por hectárea y el promedio de producción es de 300 manzanas por árbol por año.

Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, determinar el número de árboles por hectárea que darán la máxima producción.

5. Una empacadora desea fabricar latas en forma de cilindro circular con un volumen de 1570 cms.^{3} para uno de sus productos. Determinar el radio y la altura que proporcionan mínimo costo por lata, es decir mínima superficie total para el cilindro circular. (Superficie lateral mas las dos tapas).

Fórmulas:

1. Area de un círculo $= \pi r^2$
2. Area lateral del cilindro $= 2\pi rh$
3. Volumen del cilindro $= \pi r^2 h$

$\pi = 3.14$ (aproximado a 2 decimales).

6. Un granjero tiene 800 mts. de cerca con la que desea cercar un terreno rectangular. Cuáles deberán ser las dimensiones del terreno de manera que obtengan la máxima área posible, si uno de los lados no necesita cerca por ser el margen de un río?

Ejercicio 18

Tema: Aplicaciones de la derivada a teoría económica.

1. Supongamos que la demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = \frac{60}{x + 10}; \quad p = \text{precio}, \quad x = \text{cantidad demandada.}$$

1.1 Graficar la ley de demanda y verificar por medio de cálculo diferencial que la curva de demanda es decreciente y cóncava hacia arriba.

1.2 Encontrar el ingreso total como una función de la cantidad demandada, hacer su gráfica y determinar su punto máximo.

1.3 Encontrar el ingreso marginal como una función de la cantidad demandada, hacer su gráfica y verificar que el ingreso total es máximo cuando el ingreso marginal es cero.

2. La demanda en un mercado monopolizado sigue la ley: $p = 100 - 3x$ y el monopolista produce x unidades a un costo total de: $C = \frac{1}{2} x^2 - 3x + 1500$. Determinar las condiciones óptimas para el monopolista (Precio del artículo y cantidad que debe producirse para obtener máximo ingreso neto).

* 3. El costo total de plantar de árboles madereros una región es de \$10,000. El valor de la madera después de t años es $100\ e^t$. Si la razón de interés es 5% compuesto anualmente, entonces el valor actual de la madera es dado por:

$y = (100\ e^t - 10{,}000)\ e^{-5t}$. Determinar el máximo valor actual de la madera aplicando el método de diferenciación logarítmica.

4. La demanda por un artículo en determinado mercado es dada por la siguiente ley:

$$P = 800 - 2x^2$$

x = cantidad demandada

P = precio por unidad

4.1 Graficar la ley de demanda y verificar, por medio del cálculo, que la curva de demanda es decreciente y cóncava hacia abajo para todo x mayor ó igual que cero.

4.2 Encontrar el ingreso total y el ingreso marginal como funciones de la cantidad demandada.

4.3 Encontrar la elasticidad de la demanda y la elasticidad del precio cuando la cantidad demandada es igual a 10.

CAPITULO 6

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.1 Introducción. Si una variable w está relacionada con otras variables x, y, z, ..., de manera que para cada conjunto de valores x_0, y_0, z_0, ..., asignados a las variables x, y, z, ..., de sus respectivos dominios de definición, corresponde uno o más valores a la variable w, entonces se dice que w es una función de x, y, z, ...

Observaciones.

a) Si w = f (x, y, z,..), entonces decimos que w es una función explícita de x, y, z, ...

b) Si f (w, x, y, z, ..) = 0, entonces decimos que w es una función implícita de x, y, z, ...

Ejemplos: a) $w = 3x^2 - 2xy + 4z$. w es una función explícita de x, y, z.

b) $3w^2 - 2xzw + y^2 z^2 = 15$. w es una función implícita de x, y, z.

Los conceptos y definiciones establecidos para funciones de una variable, así como sus propiedades, teoremas, reglas de diferenciación, etc., serán extendidas en forma similar para funciones de varias variables. Para tratar de simplificar y observar el significado geométrico de los conceptos dedicaremos especial atención a las funciones de 2 variables, pues para funciones de más

de dos variables la interpretación geométrica en espacios enedimensionales, es abstracta.

Límite. Definiremos el límite para una función de dos variables. Para funciones de más de dos variables el concepto de límite es inmediato.

Def. Sea w = f (x, y). El límite de w cuando x tiende a x_0 y y tiende a y_0 es igual a A si w puede acercarse todo lo que se quiera a A, acercando suficiente y simultáneamente x a x_0 y y a y_0.

En lenguaje matemático:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \text{ si para todo } \varepsilon > o,$$

Existen δ y γ tales que:

$$|F(x, y) - A| < \varepsilon \text{ para todo } x,\ y, \text{ tales que:}$$

$$\begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \gamma \end{cases}$$

Continuidad. Sea w = f (x, y). w es contínua en P (x_0, y_0) si se cumplen las condiciones siguientes:

1) $f(x_0, y_0)$ está definida,

2) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ existe,

3) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \ , y) = f(x_0, y_0)$

Obsérvese que esta definición de continuidad, como en el caso de funciones de una variable corresponde al significado intuitivo o natural de continuidad. La gráfica de una función de 2 variables es, en general, una superficie en el espacio tri-dimensional como se ha estudiado en la geometría analítica del espacio.

6.2 Derivadas parciales. Para el análisis de funciones de varias variables es de utilidad investigar el comportamiento de la función en la dirección de una de las variables, es decir, permitiendo a una de las variables tomar diferentes valores y manteniendo a las demás constantes. Este artificio matemático, que puede efectuarse en sucesión con las diferentes variables de la función motiva la definición de las derivadas parciales.

Def. Sea $w = f(x, y, z, \dots)$. La derivada parcial de w con respecto a x es la derivada de w con respecto a x considerando las demás variables como constantes. (Esto equivale a considerar a w como una función de x únicamente).

Usaremos la letra griega δ para indicar derivada parcial y distinguirla de la derivada ordinaria:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\Delta x}$$

Escogimos la variable x para la definición. Para las demás variables la derivada parcial es semejante.

Consideremos el caso particular de una función de 2 variables para observar el significado geométrico de las derivadas parciales:

Sea $w = f(x, y)$

De acuerdo con la definición:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Puesto que $\frac{\delta w}{\delta x}$ es la derivada de w con respecto a x manteniendo a y constante, podemos aprovechar las reglas de diferenciación ordinaria que tenemos para encontrar $\frac{\delta w}{\delta x}$.

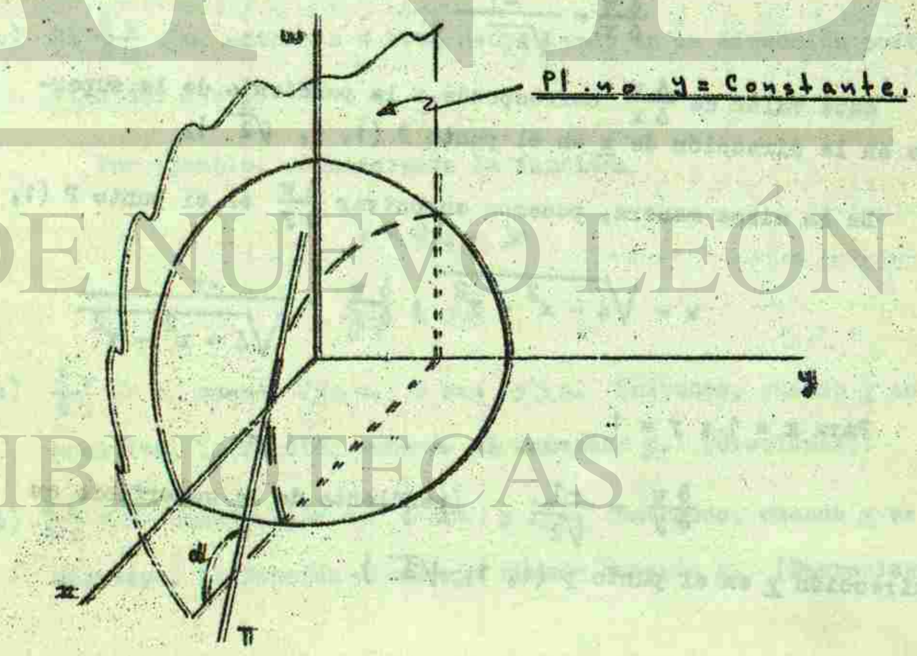
Geométricamente, el mantener a y constante corresponde a considerar una sección paralela al plano $x - w$. De acuerdo con la definición, $\frac{\delta w}{\delta x}$ es la pendiente de la curva de intersección de la superficie $w = f(x, y)$ y el plano $y =$ constante. De la misma manera, $\frac{\delta w}{\delta y}$ es la pendiente de la curva de intersección de la superficie con el plano $x =$ constante.

Por ejemplo, consideremos la siguiente superficie: $w = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Trazas: (Intersecciones con los planos coordenados).

Si $w = o$ obtenemos la curva de intersección de la superficie con el plano $x - y$. En este caso es el círculo: $x^2 + y^2 = 4$ que tiene centro en $c\,(o, o)$ y radio $r = 2$.

Similarmente para $x = o$ y $y = o$ encontramos que las trazas en los plano $y - w$ y $x - w$ son círculos con centro en el origen y radio $r = 2$, como indica la figura 6.1.



Encontremos la derivada parcial de w con respecto a x:

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

La derivada parcial de w con respecto a x corresponde a la tangente del ángulo α, es decir, a la pendiente de la tangente T a la curva de intersección de la superficie con el plano y = constante.

Puesto que $\frac{\delta w}{\delta x}$ es una función de x y y podemos encontrar su valor a cualquier nivel del dominio de definición de y y para cualquier valor del correspondiente dominio de definición de x. Por ejemplo, si y = 1 :

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{-x}{\sqrt{3 - x^2}}$$

Ahora, para cualquier valor de x del dominio de definición de esta función de x porejemplo, para x = 1 :

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Este valor de $\frac{\delta w}{\delta x}$ corresponde a la pendiente de la superficie en la dirección de x en el punto P (1, 1, $\sqrt{2}$).

De la misma manera, podemos encontrar $\frac{\delta w}{\delta y}$ en el punto P (1, 1, $\sqrt{2}$).

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \; ; \; \frac{\delta w}{\delta y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Para x = 1 ; y = 1

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$ (pendiente de la superficie en la dirección y en el punto p (1, 1, $\sqrt{2}$).

Estos conceptos geométricos se extienden abstractamente a funciones de más de dos variables cuyas gráficas son conceptos abstractos llamados hiper-superficies en espacios abstractos ene-dimensionales. Así, por ejemplo, w = f (x, y, z, ...), la derivada parcial de w con respecto a z $\left(\frac{\delta w}{\delta z}\right)$ es la pendiente de la hiper-superficie: w = f (x, y, z, ...) en la dirección positiva del eje z.

6.3 Crecimiento o decrecimiento de una función de varias variables.

El valor de la derivada parcial de una función de varias variables w = f (x, y, z, ...) con respecto a una de ellas, proporciona un indicador del comportamiento de la función en la dirección de la variable independiente considerada. Lo siguiente es una consecuencia inmediata de la interpretación geométrica de las derivadas parciales:

a) Si $\frac{\delta w}{\delta x} > 0$, entonces w = f (x, y, z,...) está creciendo en la dirección positiva del eje x.

b) Si $\frac{\delta w}{\delta x} = 0$, entonces w está en un punto crítico de tangente horizontal en la dirección x (Posiblemente un máximo o mínimo relativo de la función).

c) Si $\frac{\delta w}{\delta x} < 0$, entonces w está decreciendo en la dirección positiva del eje x.

Por ejemplo, consideremos la función:

$$w = 2xy - 3z$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = 2y$$

a) $\frac{\delta w}{\delta x} > 0$ cuando $2y > 0$, ó sea $y > 0$. Entonces, cuando y es positiva, la función aumenta al aumentar x. (Creciente).

b) $\frac{\delta w}{\delta x} < 0$ cuando $2y < 0$, ó sea $y < 0$. Entonces, cuando y es negativa, la función disminuye cuando aumenta x. (Decreciente).

De la misma manera podemos considerar:

$\frac{\delta w}{\delta y} = 2x$ (los resultados son semejantes).

Por último: $\frac{\delta w}{\delta z} = -3 < 0$. Esta derivada parcial es constante y negativa, lo cual significa que la función w disminuye al aumentar z independientemente de x y y. (Decreciente en la dirección z).

En este ejemplo sencillo hemos obtenido resultados que podían haberse deducido lógicamente de la función original sin necesidad de las derivadas parciales. Sin embargo, el uso de las derivadas parciales para éste tipo de análisis, proporciona un proceso sistemático que puede aplicarse a funciones de cualquier número de variables, por complicadas que sean, con la condición de que sus derivadas parciales existan.

6.4 Derivadas parciales de alto orden

De la misma manera que hemos definido las derivadas ordinarias de alto orden, podemos definir las derivadas parciales de alto orden efectuando el proceso de derivación parcial sucesivamente. La única diferencia en el caso de derivadas parciales es que podemos cambiar la variable independiente durante la derivación sucesiva por lo que resultan tantas derivadas parciales de un orden determinado como permutaciones, permitiendo repeticiones, pueden hacerse con las variables independientes.

Por ejemplo, consideremos la función general de n variables $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Las segundas derivadas parciales son:

$$f_{x_1x_1} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1^2} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_1}\right)$$

$$f_{x_2x_2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_2^2} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta w}{\delta x_2}\right)$$

$$f_{x_nx_n} = \frac{\delta^2 w}{\delta x^2_n} = \frac{\delta}{x_n}\left(\frac{\delta w}{\delta x_n}\right)$$

$$f_{x_1x_2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_2} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_2}\right)$$

$$f_{x_1x_3} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_3} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_3}\right)$$

$$\vdots$$

$$f_{x_{n-1}x_n} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_{n-1}\,\delta x_n} = \frac{\delta}{\delta x_{n-1}}\left(\frac{\delta w}{\delta x_n}\right)$$

$$\vdots$$

$$f_{x_1x_n} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_n} = \frac{\delta}{\delta x_1}\left(\frac{\delta w}{\delta x_n}\right)$$

El número total de segundas derivadas parciales es igual a n^2.(no. de permutaciones permitiendo repeticiones de n variables tomadas de dos en dos).

La derivación parcial puede efectuarse cualquier número de veces que permita la función. En general, el número de derivadas parciales de orden m puede llegar a un máximo de n^m ó sea el número de órdenes, permitiendo repeticiones, en que pueden ser arregladas las n variables tomadas de m en m.

El siguiente teorema será establecido sin demostración:

Teorema. Sea w una función elemental (algebraica, trigonométrica, logarítmica ó exponencial). Si w y sus derivadas parciales son continuas en sus dominios de definición, entonces el orden de diferenciación parcial no afecta el resultado.

De acuerdo con éste teorema podemos encontrar las derivadas de alto orden de diferentes maneras. Por ejemplo:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x_1\,\delta x_2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x_2\,\delta x_1}\ ;\quad \frac{\delta^3 w}{\delta x_1^2\,\delta x_2} = \frac{\delta^3 w}{\delta x_2\,\delta x_1^2} = \frac{\delta^3 w}{\delta x_1\delta x_2\delta x_1}\ ;$$

etcétera. Además permite encontrar una derivada parcial de alto orden siguiendo el orden que mejor convenga tomando en cuenta lo complicado de la función con respecto a las diferentes variables independientes.

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Sea $w = f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + x^2y^2 + 2xz^2$

Encontrar: a). $f_{xxy} = \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta w}{\delta y}\right)\right)$

b). $f_{zz} = \dfrac{\delta^2 w}{\delta z^2}$

Solución:

a) Derivando primeramente con respecto a y:

$$\frac{\delta w}{\delta y} = -3xz + 2x^2 y$$

Ahora, derivando con respecto a x:

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right) = -3z + 4xy$$

Derivando nuevamente con respecto a x:

$$\frac{\delta}{\delta x}\,\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right) = 4y$$

$$\therefore\ \underline{\underline{f_{xxy} = 4y}}$$

b) Derivando con respecto a z:

$$\frac{\delta w}{\delta z} = -3xy + 4xz$$

Volviendo a derivar con respecto a z:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta z^2} = 4x$$

$$\therefore\ \underline{\underline{f_{zz} = 4x}}$$

Ejemplo 2

Sea $w = f(x, y) = \sqrt{x^3 - 3} + 3xy - \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

Encontrar $f_{yx} = \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta w}{\delta x}\right)$

Solución:

a) Derivando primeramente con respecto a x:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 3}} + 3y - \frac{2(x^2 - 1) - (2x)\,2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ahora, derivando con respecto a y:

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right) = 3$$

Es decir, $\underline{\underline{f_{yx} = 3}}$

b) $f_{yx} = f_{xy}$, es decir, podemos alterar el orden de la derivación parcial. En este caso es obviamente conveniente derivar primeramente con respecto a y y después derivar con respecto a x:

$$\frac{\delta w}{\delta y} = 3x;$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\,\frac{\delta w}{\delta y} = 3$$

$$\underline{\underline{f_{xy} = f_{yx} = 3}}$$

6.5 Interpretación geométrica de las segundas derivadas parciales.

Consideremos la función siguiente: $w = f(x, y)$. Su gráfica es una superficie en el espacio tridimensional. La derivada parcial de w con respecto a x mide la rapidez de cambio de la superficie en la dirección x. Por otra parte, $\dfrac{\delta w}{\delta x}$ es igual a la pendiente de la tangente a la superficie en la dirección x. Entonces la segunda derivada parcial de w con respecto a x mide la rapidez de cambio de la pendiente en la dirección x.

Entonces, se tienen los siguientes resultados semejantes a los obtenidos para la segunda derivada ordinaria en funciones de una variable:

a) Si $\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} > 0$, la superficie es cóncava hacia arriba en la dirección x porque la pendiente de la tangente en la dirección x está aumentando.

b) Si $\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} < 0$, la superficie es cóncava hacia abajo en la dirección x porque la pendiente está disminuyendo en la dirección x.

Para la dirección y, se obtienen resultados semejantes siguiendo el mismo razonamiento.

Si w es una función de mas de 2 variables, entonces estos conceptos geométricos se extienden, en forma abstracta, a espacios n-dimensionales dónde $n > 3$. El crecimiento ó decrecimiento y el sentido de concavidad de la hiper-superficie en determinada dirección puede encontrarse de la misma manera que para el caso de una función de 2 variables.

Volviendo a la función de 2 variables $w = f(x, y)$, la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y con respecto a y mide la rapidez de cambio en la dirección y, de la pendiente en la dirección x. Ahora, puesto que $\frac{\delta^2 w}{\delta y\, \delta x} = \frac{\delta^2 w}{\delta x\, \delta y}$, entonces también mide la rapidez de cambio en la dirección x de la pendiente en la dirección y de la superficie en cuestión.

6.6 Diferenciales. Entre las notaciones que hemos utilizado para la derivada de una función de una variable, tenemos la siguiente:

Si $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La expresión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para denotar la primera derivada de y con respecto a x. Ahora definiremos lo que se llama los diferenciales de x y y de manera que el cociente del diferencial de y entre el diferencial de x sea la derivada de y con respecto a x:

Def. 1. Diferencial de x. El diferencial de la variable independiente x es igual al incremento de la variable.

Notación: Diferencial de $x = dx = \Delta x$.

Def. 2. Diferencial de y. El diferencial de la variable dependiente y es igual a su derivada con respecto a x por el diferencial de x.

En símbolos:

Diferencial de $y = dy = f'(x)\, dx$

Interpretación geométrica. Consideremos la función $y = f(x)$. Si aplicamos un incremento Δx a la variable independiente x, obtenemos un correspondiente incremento en la variable dependiente Δy. Si partimos del punto $P(x, y)$, después del incremento estaremos en el punto: $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, como se indica en la figura 6.2.

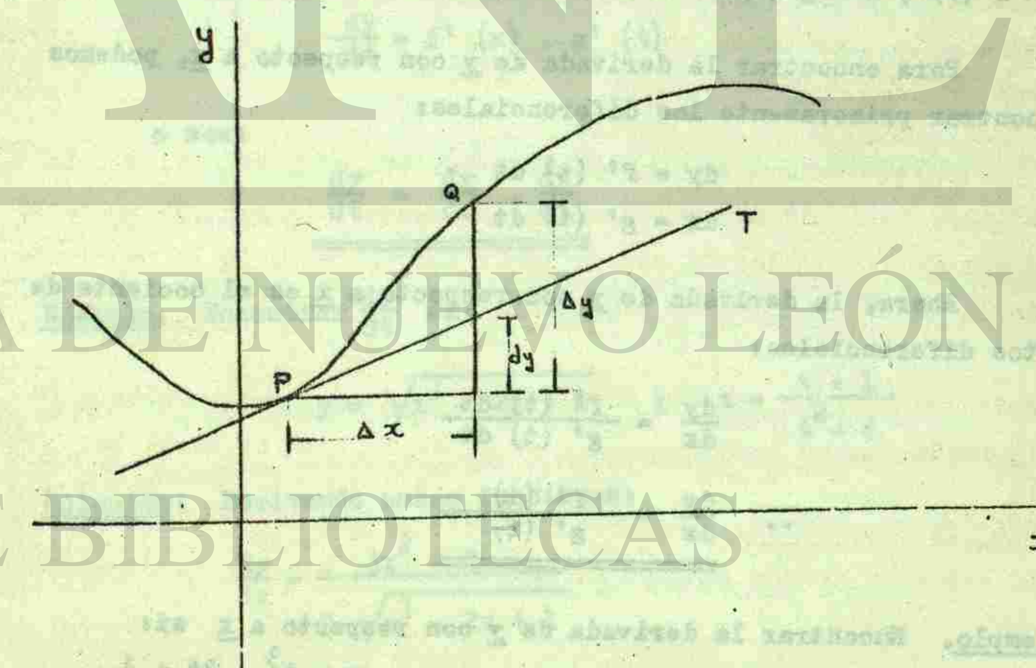


FIG. 6.2

Por definición de los diferenciales:

$$dx = \Delta x$$

$$dy = f'(x)\, dx = f'(x)\, \Delta x = \text{pendiente de la tangente en } \underline{p} \text{ por el incremento de } \underline{x}.$$

De la figura 6.2 se deduce que $dy \neq \Delta y$, excepto cuando la gráfica de $y = f(x)$ es una recta. Sin embargo el diferencial de y se considera una buena aproximación del incremento de y, cuando el incremento de x es pequeño comparado con el valor de la variable independiente x.

Aplicaciones. De acuerdo con la definición, los diferenciales pueden ser manejados como cantidades algebraicas y la derivada de y con respecto a x es igual al cociente de los diferenciales de y y x. Ahora utilizaremos los diferenciales para el cálculo de derivadas y más adelante serán utilizados en el Cálculo Integral.

1. Supongamos que x y y son funciones de un parámetro t. Es decir: $y = f(t)$; $x = g(t)$.

Para encontrar la derivada de y con respecto a x, podemos encontrar primeramente los diferenciales:

$$dy = f'(t)\, dt$$
$$dx = g'(t)\, dt$$

Ahora, la derivada de y con respecto a x es el cociente de estos diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)\, dt}{g'(t)\, dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Ejemplo. Encontrar la derivada de y con respecto a x si:

$$y = t^3 - 2t + 4$$
$$x = 2t^2 - 3$$

Solución: Derivando y y x con respecto a t:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t$$

Entonces:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2 - 2}{4t}$$

2. La regla de cadena para derivar una función, puede ser demostrada por medio de diferenciales. Supongamos que: $y = f(x)$; $x = g(t)$.

Por definición de los diferenciales; se tiene:

$$dy = f'(x)\, dx \; ; \; dx = g'(t)\, dt$$

Sustituyendo $dx = g'(t)\, dt$ en la expresión para el diferencial de y:

$$dy = f'(x) \; g'(t)\, dt$$

Ahora, puesto que t es la variable independiente, $dt = \Delta t$. Dividiendo ambos lados por dt, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot g'(t)$$

o sea:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ejemplo. Encontrar $\frac{dy}{dt}$ si:

$$y = \sqrt{x^3 - 2x + 1} \quad ; \quad x = \frac{t + 1}{t^2 - 4}$$

Solución: Derivando ambas funciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 4 - (t + 1)(2t)}{(t^2 - 4)^2} = \frac{-t^2 - 2t - 4}{(t^2 - 4)^2}$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}} \cdot \frac{-t^2 - 2t - 4}{(t^2 - 4)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(3x^2 - 2)(-t^2 - 2t - 4)}{2(t^2 - 4)^2 \sqrt{x^3 - 2x + 1}}$$

6.7 Diferenciales de funciones de varias variables. Hemos definido antes los diferenciales para una función de una variable $y = f(x)$ de la siguiente manera:

$$dx = \Delta x \; ; \quad dy = f'(x)\, dx = \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

Al establecer estas definiciones demostramos gráficamente que dy es una buena aproximación del incremento de y, cuando Δx es pequeño. Otra utilidad importante que obtuvimos de los diferenciales fué la solución al problema de encontrar la derivada de una función y de una variable x que a su vez es función de otra variable t. Específicamente establecimos lo siguiente:

Si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot g'(t) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Este resultado es el más importante para nuestros propósitos, por lo que será extendido a funciones de varias variables.

Supongamos primeramente que z es una función de dos variables:

$$z = f(x, y)$$

Definamos ahora $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$.

Al derivar parcialmente con respecto a x, la otra variable independiente y permanece constante, es decir, z se considera como una función de una sola variable x. Entonces, definiremos los diferenciales parciales de z con respecto a x y y de la misma manera

que el diferencial de una función de una variable pero con derivadas parciales:

$$d_x z = \frac{\delta z}{\delta x} dx = f_x \, dx$$

$$d_y z = \frac{\delta z}{\delta y} dy = f_y \, dy$$

Y la diferencial total de z se define de la siguiente manera:

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$$

Obsérvese que el diferencial parcial de z con respecto a x es una buena aproximación del incremento parcial de z en la dirección x cuando Δx es pequeño. El diferencial parcial de z con respecto a y es también una buena aproximación del incremento parcial de z en la dirección y cuando Δy es pequeño. Entonces, el diferencial total de z, que ha sido definido como la suma de los diferenciales parciales de z con respecto a x y y, es una buena aproximación del incremento total de z cuando Δx y Δy son pequeños. Geométricamente, el diferencial total de z es igual al incremento del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$, en el punto en cuestión, debido a los incrementos $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$. Inmediatamente se deduce, que éste incremento del plano tangente (dz) se aproxima al incremento total de z (Δz) cuando Δx y Δy son tomados cada vez más pequeños.

En general, si $u = f(x, y, z, \ldots, w)$, entonces el concepto de diferencial total de u se define de la siguiente manera:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz + \ldots + \frac{\delta u}{\delta w} dw$$

Ejemplo: Encontrar el diferencial de u si : $u = x^3 y - 3x^2 + 2y$

Solución: Por definición del diferencial de una función de varias variables, se tiene:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}\, dx + \frac{\delta u}{\delta y}\, dy$$

Ahora: $\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 y - 6x$; $\frac{\delta u}{\delta y} = x^3 + 2$

Sustituyendo:

$$du = (3x^2 y - 6x)\, dx + (x^3 + 2)\, dy$$

6.8 Derivadas totales. Consideremos una función de 2 variables que a su vez son funciones de una variable independiente:

$$z = f(x, y) \; ; \; x = g(t) \; ; \; y = h(t)$$

Para encontrar la derivada de z con respecto a t, podemos sustituir $x = g(t)$ y $y = h(t)$ en la expresión $z = f(x, y)$ obteniendo de esta manera a z como una función explícita de t. Sin embargo podemos encontrar la derivada de z con respecto a t sin necesidad de hacer la sustitución mencionada que puede dar por resultado una expresión muy complicada. Para ésto, utilizaremos la fórmula que vamos a deducir en seguida:

Si $z = f(x, y)$, entonces $dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$

Ahora, puesto que $x = g(t)$ y $y = h(t)$, entonces:

$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt \quad y \quad dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$$

Sustituyendo estas expresiones en dz :

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} \frac{dx}{dt} \cdot dt + \frac{\delta z}{\delta y} \frac{dy}{dt}\, dt$$

Ahora, puesto que t es la variable independiente, $dt = \Delta t$ y podemos dividir entre dt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de z con respecto a t si:

$$z = \ln (x, + y) \; ; \; x = e^t \; ; \; y = e^{2t}$$

Solución:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{x + y}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{x + y}$$

Ahora: $\frac{dx}{dt} = e^t$; $\frac{dy}{dt} = 2e^{2t}$

Ahora: $\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt}$

Sustituyendo: $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t}{x + y} + \frac{2e^{2t}}{x + y}$

$$\therefore \; \frac{dz}{dt} = \frac{e^t + 2e^{2t}}{x + y}$$

Generalización de la derivada total. Supongamos que u es una función de más de dos variables que a la vez, son funciones de otra variable t. Entonces la derivada de u con respecto a t se deduce de la misma manera que en el caso anterior y el resultado es:

Si $u = f(x, y, z, \ldots, w)$

$$x = g(t) \; ; \; y = h(t) \; ; \ldots\ldots, \; w = j(t)$$

Entonces: $\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\delta u}{\delta w} \cdot \frac{dw}{dt}$

En el caso más general, se tiene una función de varias variables que a la vez son funciones también de varias variables. Es decir, se tienen:

$$u = g(x, y, z, \ldots, w)$$
$$x = g(r, s, \ldots, t); \; y = h(r, s, \ldots, t;)$$
$$\ldots\ldots ; \; w = (r, s, \ldots, t).$$

En este caso, la derivada ~~total~~ parcial de u con respecto a t es:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t} + \ldots\ldots + \frac{\delta u}{\delta w} \cdot \frac{\delta w}{\delta t}$$

Volviendo a la función de 2 variables:

$$z = f(x, y) \quad x = g(t) \quad ; \; y = h(t)$$

Observamos que z en realidad es una función de t únicamente por lo que fue posible encontrar la derivada total de z con respecto a t. Ahora, puesto que x es una función de t, podemos suponer que t es una función de x (la función inversa de $x = g(t)$ y por lo tanto se obtiene y como una función de x al sustituir t en $y = h(t)$. Entonces resulta que z puede ser considerada como una función de x únicamente. Un razonamiento semejante nos indica que también podemos considerar a z como una función de y únicamente. Para encontrar la derivada total de z con respecto a x tenemos:

$$z = f(x, y) \quad ; \; x = x \quad ; \; y = G(x)$$

$$\text{Ahora: } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

De la misma manera, al considerar x como función de y y por lo tanto z como función de y únicamente:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ejemplo: Encontrar $\frac{dz}{dx}$ si:

$$z = x^2 + x e^y$$

$$x = 3t^2 - 1 \quad ; \; y = 2t$$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + e^y \quad ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = x e^y$$

$$\text{Ahora: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{6t}$$

$$\text{Sustituyendo: } \frac{dz}{dx} = (2x + e^y) + \frac{2x e^y}{6t}$$

6.9 Derivación parcial implícita.

Los métodos empleados para encontrar la derivada ordinaria de una función implícita de una variable pueden aplicarse para derivar parcialmente una función implícita de varias variables con respecto a una de ellas. La razón de ésto es que la definición de la derivada parcial permite considerarla como una derivada ordinaria con respecto a una de las variables independientes manteniendo a las demás variables como constantes durante el proceso de diferenciación.

Ejemplos:

1. Encontrar $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ en la siguiente ecuación:

$$w - xy + 3wx = 15$$

En este ejemplo es fácil despejar w antes de derivar:

$$w(1 + 3x) = 15 + xy$$

$$w = \frac{15 + xy}{1 + 3x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(1 + 3x)\, y - (15 + y)\, 3}{(1 + 3x)^2}$$

$$= \frac{y + 3xy - 45 - 3xy}{(1 + 3x)^2}$$

$$= \frac{y - 45}{(1 + 3x)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{1 + 3x}$$

2. Lo mismo que en el ejemplo anterior para:

$$w^3 x - 2x^2 y + 3wx = 4$$

En este caso no es fácil despejar w por lo que aplicamos el método que consiste en derivar término a término considerando a $\underline{w}$ como una función de la variable con respecto a la cual se efectúa la derivación parcial.

a) $\frac{\delta w}{\delta x}$:

$$3w^2 x \frac{\delta w}{\delta x} + w^3 - 4xy + 3x \frac{\delta w}{\delta x} + 3w = 0$$

$$\frac{\delta w}{\delta x}(3w^2 x + 3x) = 4xy - 3w - w^3$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{4xy - 3w - w^3}{3w^2 x + 3x}$$

b) $\frac{\delta w}{\delta y}$:

$$3w^2 x \frac{\delta w}{\delta y} - 2x^2 + 3x \frac{\delta w}{\delta y} = 0$$

$$\frac{\delta w}{\delta y}(3w^2 x + 3x) = 2x^2$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{2x^2}{3w^2 x + 3x}$$

__Aplicación de las derivadas parciales a la derivación implícita.__

Consideremos la ecuación $f(x, y) = 0$ que define a $\underline{y}$ como una función implícita de $\underline{x}$. Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ (pendiente de la tangente a la gráfica de la ecuación) hemos visto 2 procedimientos: 1) despejar $\underline{y}$, cuando ésto sea posible, y derivar la función explícita resultante. 2) derivar término a término con respecto a $\underline{x}$ y después despejar $\frac{dy}{dx}$.

Ahora, utilizaremos las derivadas parciales para encontrar $\frac{dy}{dx}$. Introducimos una nueva variable auxiliar $\underline{u}$ tal que:

$$u = f(x, y)$$

Puesto que $\underline{y}$ es una función implícita de $\underline{x}$, podemos obtener

$\frac{du}{dx}$ aplicando la fórmula obtenida anteriormente.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}\frac{dy}{dx}$$

Ahora, $u = f(x, y)$ es igual a cero en nuestro problema original. Entonces $du = 0$ y por lo tanto:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta y}}$$

Esta fórmula nos proporciona una tercera alternativa para encontrar $\frac{dy}{dx}$ que generalmente es ventajosa sobre los 2 métodos anteriores.

Ejemplo: Encontrar la derivada de $\underline{y}$ con respecto a $\underline{x}$ en la siguiente función:

$$3y^2 - 2xy + x^2 - 15 = 0$$

Consideremos:

$$u = 3y^2 - 2xy + x^2 - 15$$

Entonces:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = -2y + 2x = +2(x - y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 6y - 2x = 2(3y - x)$$

Ahora:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta y}}$$

Sustituyendo: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{2}(x - y)}{\cancel{2}(3y - x)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{y - 3y}$$

Generalización. El artificio empleado para la fórmula anterior puede ser aprovechado para encontrar fórmulas que nos proporcionen las derivadas parciales de una función implícita de varias variables. En el caso general, la ecuación:

$$g\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w) = 0$$

Define a w como una función implícita de x, y, z, ... haciendo:

$$u = g\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w)$$

Puede demostrarse que:

$$\frac{\delta w}{\delta x} = -\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta w}}$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = -\frac{\frac{\delta u}{\delta y}}{\frac{\delta u}{\delta w}}$$

etcétera.

De nuevo, estas fórmulas proporcionan un procedimiento en general ventajoso sobre los métodos discutidos anteriormente para la derivación parcial implícita.

6.10 Funciones homogéneas. La selección de la forma funcional que va a ser ajustada a un conjunto de datos empíricos es el primer problema que se presenta cuando se desea obtener una expresión matemática que relacione un conjunto de variables para determinados dominios de definición de las mismas. Cuando el número de variables que relaciona la función es tal que no es posible hacer objetiva gráficamente la forma de la función, es preciso determinar propiedades de tipo general con la ayuda de derivadas parciales que nos permitan hacer una selección de la forma funcional mas conveniente. En teoría económica merecen especial

atención las funciones homogéneas porque sus propiedades corresponden a condiciones "normales" en algunos modelos económicos.

Definición. $u = f\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w)$ es una función homogénea de grado m si al multiplicar todas las variables independientes por un número real c, la función resulta multiplicada por c elevada a la m.

Es decir:

$$f\ (cx,\ cy,\ cz,\ \ldots,\ cw) = c^m\ f\ (x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w)$$

En particular cuando la función es homogénea de grado uno se dice que es lineal homogénea y de acuerdo con la definición:......

$$f\ (cx,\ cy,\ \ldots,\ cw) = cf\ (x,\ y,\ \ldots,\ w)$$

Ejemplos:

1. $f\ (x,\ y) = x - 2y$

Sustituyendo x por cx y y por cy :

$$f\ (cx,\ cy) = cx - 2cy = c\ (x - 2y) = cf\ (x,\ y)$$

Entonces, la función es lineal homogénea.

2. $f\ (x,\ y) = 3x^{1/4}\ y^{3/4}$

Sustituyendo x = cx y y = cy:

$$f\ (cx,\ cy) = 3\ (cx)^{1/4}\ (cy)^{3/4}$$
$$= 3c^{1/4}\ x^{1/4}\ c^{3/4}\ y^{3/4}$$
$$= c\ (3x^{1/4}\ y^{1/4}) = cf\ (x,\ y)$$

∴ la función es lineal homogénea.

3. $f\ (x,\ y,\ z) = x^2 - 3xy + z^2$

Sustituyendo x = cx ; y = cy ; z = cz;

$$f\ (cx,\ cy,\ cz) = (cx)^2 - 3cx\ cy + (cz)^2$$

$$= c^2x^2 - 3c^2\,xy + c^2z^2$$

$$= c^2\,(x^2 - 3xy + z^2)$$

$$= c^2 f\,(x,\,y,\,z)$$

$\therefore$ la función es homogénea de grado 2.

Propiedades fundamentales de las funciones homogéneas. Consideremos una función de 2 variables $z = f\,(x,\,y)$ homogénea de grado m.

Propiedad (1). $\quad z = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$

Demostración: Por hipótesis, $z = f\,(x,\,y)$ es una función homogénea de grado m. Entonces:

$$f\,(cx,\,cy) = c^m\, f\,(x,\,y)$$

Multiplicando las variables por $\frac{1}{x}$, es decir para $c = \frac{1}{x}$,

$$f\,\left(1,\,\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m\, f\,(x,\,y) = \frac{f\,(x,\,y)}{x^m}$$

Despejando $f\,(x,\,y)$:

$$f\,(x,\,y) = x^m\, f\,\left(1,\,\frac{y}{x}\right)$$

Ahora $f\,\left(1,\,\frac{y}{x}\right)$ es una función de $\left(\frac{y}{x}\right)$ solamente.

$$\therefore f\,(x,\,y) = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Propiedad (2). Las derivadas parciales de primer orden son homogéneas de grado $(m - 1)$. Es decir $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son homogéneas de grado $m - 1$.

Demostración: De la propiedad (1) tenemos $z = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = f_x\,(x,\,y) = m\,x^{m-1}\, g\left(\frac{y}{x}\right) + x^m\, g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= m\,x^{m-1}\, g\left(\frac{y}{x}\right) - x^m\left(\frac{y}{x^2}\right)\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= m\,x^{m-1}\, g\left(\frac{y}{x}\right) - x^{m-1}\left(\frac{y}{x}\right)\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^{m-1}\left[m g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

Ahora la parte de la expresión entre paréntesis rectangular es una función de $\frac{y}{x}$.

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = x^{m-1}\, h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Entonces por la propiedad (1), $\frac{\partial z}{\partial x}$ es una función homogénea de grado $(m - 1)$. La demostración para $\frac{\partial z}{\partial y}$ es semejante.

Propiedad (3). Teorema de Euler:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = mz$$

Demostración.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x x^{m-1}\left[m g\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right) g'\left(\frac{y}{x}\right)\right] + y\,x^{m-1}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Porque de (1) $z = x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right)$

Simplificando:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = m\,x^m\, g\left(\frac{y}{x}\right) - y\,x^{m-1}\, g'\left(\frac{y}{x}\right) + y\,x^{m-1}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ahora: $x^m g\left(\frac{y}{x}\right) = z$ de (1)

$$\therefore \; x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$$

Propiedad (4). $x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = m(m-1)z$

Demostración. De la propiedad (3)

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$$

Derivando parcialmente con respecto a x

$$x\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} = m\frac{\delta z}{\delta x}$$

(a) $$x\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + y\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} = m\frac{\delta z}{\delta x} - \frac{\delta z}{\delta x} = (m-1)\frac{\delta z}{\delta x}$$

Ahora derivando parcialmente con respecto a y:

(b) $$x\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = (m-1)\frac{\delta z}{\delta y}$$

Multiplicando (a) por x y (b) por y y sumando:

$$x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = (m-1)\,x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y}$$

$$\therefore \; x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = m(m-1)z$$

Porque $x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = mz$ de prop. (3)

Estas propiedades se pueden extender con las modificaciones propias a funciones de más de 2 variables. El caso particular de la función lineal homogénea es especialmente importante en teoría económica. Para una función lineal homogénea de 2 variables, las propiedades (1) a (4) se transforman en las siguientes:

(1) $z = x\,g\left(\frac{y}{x}\right)$

(2) $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$ son homogéneas de grado cero. Por lo tanto, aplicando (1), $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$ son funciones de $\left(\frac{y}{x}\right)$.

(3) Teorema de Euler: $x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = z$

(4) $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -y/x\,\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}$ y $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -\frac{x}{y}\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}$

(4) se obtiene de (3) al derivar parcialmente con respecto a x y y y despejar respectivamente $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$ y $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$.

Ejemplo: Demostrar que la siguiente función es lineal homogénea y verificar el teorema de Euler:

$$z = f(x, y) = 18\,x^{1/3}\,y^{2/3}$$

Demostración:

a) Sustituyendo x por cx y y por cy:

$$\begin{aligned} f(cx, cy) &= 18\,(cx)^{1/3}\,(cy)^{2/3} \\ &= 18\,c^{1/3}\,x^{1/3}\,c^{2/3}\,y^{2/3} \\ &= 18\,(c^{1/3}\,c^{2/3})\,x^{1/3}\,y^{2/3} \\ &= c\,(18\,x^{1/3}\,y^{2/3}) \\ &= c\,f(x, y) \end{aligned}$$

Entonces, $z = f(x, y)$ es una función lineal homogénea.

b) Encontremos las primeras derivadas parciales de z con respecto a x y y para verificar el teorema de Euler:

$$z = 18\,x^{1/3}\,y^{2/3}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 18\,(1/3)\,x^{-2/3}\,y^{2/3} = 6x^{-2/3}\,y^{2/3}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 18\ (2/3)\ x^{1/3}\ y^{-1/3} = 12\ x^{1/3}\ y^{-1/3}$$

$$\text{Ahora}\quad x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = x\ (6x^{-2/3}\ y^{2/3}) + y\ (12x^{1/3}\ y^{-1/3})$$

$$\therefore x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = 6x^{1/3}\ y^{2/3} + 12\ x^{1/3}\ y^{2/3}$$

$$= 18\ x^{1/3}\ y^{2/3}$$

$$= z$$

L.C.D.D.

<u>Ejercicio 19.</u>

<u>Tema:</u> <u>Funciones de varias variables.</u> <u>Derivadas parciales.</u>

1. Encontrar las derivadas parciales de <u>w</u> con respecto a cada una de las variables independientes:

1.1 $w = 3x^2 + 2xy - y^2$ 1.6 $w = x^2 - xz + z^2y - 3z^3$

1.2 $w = \dfrac{x^2 - 2xy}{x + y}$ 1.7 $w = \dfrac{x + z}{y^2 - z\,y}$

1.3 $w = (2xy - 3)^5$ 1.8 $w = (xyz - 3)^4$

1.4 $w = 3e^{2x^2y}$ 1.9 $w = e^{x^2y} - 3e^z$

1.5 $w = \ln\,(x^2 + 2xy - 3y)$ 1.10 $w = \ln\,(xz - 2y^2 + z^2)$

2. Encontrar las derivadas parciales de <u>w</u> con respecto a cada una de las variables independientes, en el punto indicado.

2.1 $w = x^2y - 3y^2 + 6x$; P (1, 1, 4)

2.2 $w = x^2 + y^2 - 4$; P (2, 1, 1)

2.3 $w = e^{x^2 - y^2}$; P (1, 1, 1)

2.4 $w = \ln xy$; P (1, 1, 0)

3. Encontrar las pendientes ~~ecuaciones~~ de las tangentes en las direcciones <u>x</u> y <u>y</u> de las siguientes superficies en el punto indicado:

3.1 $w = x^2 + y^2$; P (1, 1, 2)

3.2 $w = x^2 - xy + 1$; P (2, 1, 3)

3.3 $w = e^{xy - 1}$; P (1, 1, 1)

3.4 $w = e^{2x - y}$; P (1, 2, 1)

3.5 $w = \ln\,(x^2y + y^3)$; P (0, 1, 0)

<u>Ejercicio 20.</u>

<u>Tema:</u> <u>Derivadas parciales de alto orden.</u> <u>Interpretación geométrica.</u>

1. Encontrar todas las derivadas parciales de primero y segundo orden de las siguientes funciones:

1.1 $u = x^2 + y^2$ 1.5 $f\,(x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$

1.2 $u = (x + y)^2 - 3xy^3$

1.3 $u = e^x\,(3x + 2y^2)^3$

1.4 $u = 5xz^2 + 2xy - y^2$ 1.6 $w = \ln e^{\frac{x + 2y}{x^2 - y^2}}$

2. Determinar el crecimiento o decrecimiento y el sentido de concavidad en las direcciones <u>x</u> y <u>y</u> de las siguientes superficies en el punto indicado:

2.1 $u = xy - x^2 + 5$; P (1, 1, 5)

2.2 $u = \ln\,(2x^2 - 3y)$; P (1, 1/3, 0)

2.3 $u = (x + 7y)e^{x^2 - y^2}$; P (-1, 1, 6)

2.4 $w = e^{-x} - e^{-y}$; P (1, 1, 0)

2.5 $w = \dfrac{xy}{2x + y^2}$; P (1, 2, 1/3)

2.6 $w = (xy - 3x + 2y)^4$; P (2, 2, 16)

3. Verificar que $f_{xy} = f_{yx}$ en la siguiente función. Comparar los dos caminos seguidos para encontrar la segunda derivada parcial cruzada y decidir cual es el mas conveniente en este caso:

$$f(x, y) = y^2 - 2xy - \frac{3x}{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

4. Verificar que la superficie $u = \ln xy$ es creciente y cóncava hacia abajo en las direcciones x y y cuando x y y son positivas. Verificar también que la superficie es decreciente y cóncava hacia abajo en las direcciones x y y cuando éstas variables toman valores negativos. (Observación: Esto es un análisis geométrico completo para las direcciones x y y puesto que se incluyen todos los valores de los dominios de definición de las variables x y y).

Ejercicio 21.

Tema: Diferenciales y derivadas.

1. Encontrar el diferencial de y y el incremento de y para un incremento de x = 1 a x = 1.2. Comparar los resultados y graficar:

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

2. Encontrar la derivada de y con respecto a x en cada una de las siguientes:

2.1 $x = t^2 - 1$, $y = 2t + 4$

2.2 $x = t + 2$, $y = 2t^2 - 1$

2.3 $x = t^3 - 2t + 1$, $y = e^{2t} - 1$

2.4 $x = \ln(2t + 1)$, $y = \dfrac{t + 2}{t^2 - 3t + 1}$

3. Encontrar el diferencial total de w en las siguientes funciones:

3.1 $w = x^2y + 3xy^3 - 4x + 15$

3.2 $w = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

3.3 $w = e^{2x} + e^y$

3.4 $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

4. Encontrar la derivada total de u con respecto a t en cada uno de los siguientes problemas:

4.1 $u = x^2 + 3xy - y^2$; $x = t^2 - 1$; $y = 2t + 5$

4.2 $u = \sqrt{xy} + 2y - 3x + 4$; $x = t^2$; $y = t^2 + 3t - 1$

4.3 $u = e^{2x} + e^{3y}$; $x = 2t$; $y = t^2 - 10$

4.4 $u = \ln xy^2 - e^{-y}$; $x = 3t$; $y = \sqrt{2t}$

4.5 $u = x^2 + 2yz - y^2$; $x = 2t$; $y = t - 3$; $z = t^2$

4.6 $u = xy + 2yz$; $x = 3t$; $y = e^t$; $z = e^{-t}$

5.a Encontrar las derivadas totales de u con respecto a x, y y t en las siguientes funciones:

5.1 $u = xy + 3y^2$; $x = 4t - 1$; $y = t$

5.2 $u = 3x^2 e^y$; $x = \sqrt{t}$; $3t^2 - 2t + 1 = y$

6. Encontrar el valor númerico de $\frac{du}{dt}$; $\frac{du}{dx}$ y $\frac{du}{dy}$ cuando $t = 1$ para la siguiente función:

$$u = x^2 - 4xy$$

$$x = \sqrt{t + 4} \;;\; y = \frac{1}{t + 1}$$

Ejercicio 22.

Tema: Aplicación de las derivadas parciales a la derivación implícita.

1. Encontrar las derivadas parciales de z con respecto a x y y considerando a z como una función implícita de x y y.

1.1 $z^2 - xy + 2y^2 = 15$

1.2 $x(z^2 - 2y) + y^2(z + x) = 6$

1.3 $\dfrac{x + y}{2zx + y^2} - 3z^2 = 5$

1.4 $e^{xz} - y^2 = 10$

$(x + y)(2z + y)$

$2zx + 2zy + xy$

2. Encontrar las derivadas parciales de z con respecto a x y y en el punto indicado:

2.1 $3xy - 2z + 6xz = 11$; P (1, 1, 2)

2.2 $e^{xyz} = 1$; P (1, 1, 0)

2.3 $x + y + z = 3x^2y^2z - 2$; P (1, -1, 1)

3. Encontrar la derivada de y con respecto a x en las siguientes ecuaciones:

3.1 $x^3 - 3x^2y + 2y^4 = 0$ 3.4 $\ln x - 3\ln y = 10$

3.2 $y^2 - 2xy + 3y^3 = 1$ 3.5 $\ln \sqrt{x^2 - 2xy} = 1$

3.3 $e^{2x} + 3e^y = 5$

4. Encontrar las derivadas parciales de z con respecto a x y y en las siguientes ecuaciones: (utilizar las fórmulas en términos de derivadas parciales).

4.1 $z^3 - 3zx^2 + 2zy^3 = 0$

4.2 $3x^2y - 2zx + y^2 = 8$

4.3 $\ln x^2yz^2 - e^{2x} = 0$

5. Encontrar la derivada de y con respecto a x en el punto indicado:

5.1 $x^3 - y^3 + 4xy = 0$; P (2, -2)

5.2 $3x - 2y + 4e^{xy} = 4$; P (0, 0)

5.3 $2x - \sqrt{2xy} + y = 4$; P (2, 4)

6. Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la gráfica de la ecuación:

$\ln x - 2e^y = -2$ en el punto P (1, 0)

Ejercicio 23.

Tema: Funciones homogéneas.

1. Verificar que las siguientes funciones son lineales homogéneas:

1.1 $f(x, y) = 2x + 3y$

1.2 $f(x, y) = 10\, x^{1/3}\, y^{2/3}$

1.3 $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 3y^2}$

1.4 $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 2x^2y - y^3}{x^2 + 2y^2}$

1.5 $f(x, y, z) = 5x - 2\sqrt{yz}$

2. Verificar que las siguientes funciones son lineales homogéneas. Encontrar las derivadas parciales y verificar el teorema de Euler.

* 2.1 $f(x, y) = (x - 2y)^{1/4}(2x + y)^{1/4}(5x + 2y)^{1/2}$

2.2 $f(x, y) = 3x^{1/2}y^{1/2} + 2x^{1/5}y^{4/5}$

3. En las siguientes funciones homogéneas, determinar el grado de homogeneidad. Verificar que las derivadas parciales son homogéneas de grado m - 1, donde m es el grado de homogeneidad de la función. Verificar también el teorema de Euler:

3.1 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

* 3.2 $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

3.3 $f(x, y) = x^2y + 2y^3 - 3y^2x$

3.4 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy$

4. Aplicando el teorema de Euler, demostrar que si $z = f(x, y)$ es homogénea de grado cero, entonces:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-x}{y}\,\frac{\delta z}{\delta x}$$

5. Comprobar que las siguientes funciones son homogéneas de grado cero y que satisfacen la condición establecida en el problema 4.

5.1 $z = \ln \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

5.2 $z = \dfrac{x + y}{x - y} + \sqrt{xy^{-1}}$

CAPITULO 7

APLICACIONES DE LA DERIVADA PARCIAL.

7.1 Máximos y mínimos de funciones de dos variables. Consideremos la función general de dos variables cuya gráfica es una superficie en el espacio: $z = f(x, y)$. Definiremos los máximos y mínimos relativos de la siguiente manera:

Def. Un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es un máximo relativo de la superficie $z = f(x, y)$, si $z_0 \geq f(x, y)$ para todo punto, en una vecindad alrededor del punto P. De la misma manera, $P(x_0, y_0, z_0)$ es un mínimo relativo si $z_0 \leq f(x, y)$ para todo punto en una vecindad del punto P.

De acuerdo con esta definición, para que un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sea un máximo relativo es necesario que sea un máximo relativo en todas direcciones. En particular debe ser un máximo relativo en las direcciones x y y, es decir debe satisfacer las siguientes:

Condiciones necesarias.

a) para que sea máximo relativo en la dirección x :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0$$

b) para que sea máximo relativo en la dirección y :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} < 0$$

5. Comprobar que las siguientes funciones son homogéneas de grado cero y que satisfacen la condición establecida en el problema 4.

5.1 $z = \ln \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

5.2 $z = \dfrac{x + y}{x - y} + \sqrt{xy^{-1}}$

CAPITULO 7

APLICACIONES DE LA DERIVADA PARCIAL.

7.1 Máximos y mínimos de funciones de dos variables. Consideremos la función general de dos variables cuya gráfica es una superficie en el espacio: $z = f(x, y)$. Definiremos los máximos y mínimos relativos de la siguiente manera:

Def. Un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ es un máximo relativo de la superficie $z = f(x, y)$, si $z_o \geqslant f(x, y)$ para todo punto, en una vecindad alrededor del punto P. De la misma manera, $P(x_o, y_o, z_o)$ es un mínimo relativo si $z_o \leqslant f(x, y)$ para todo punto en una vecindad del punto P.

De acuerdo con esta definición, para que un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ sea un máximo relativo es necesario que sea un máximo relativo en todas direcciones. En particular debe ser un máximo relativo en las direcciones x y y, es decir debe satisfacer las siguientes:

Condiciones necesarias.

a) para que sea máximo relativo en la dirección x :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0$$

b) para que sea máximo relativo en la dirección y :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} < 0$$

Consideremos las condiciones necesarias en términos de diferenciales:

El diferencial de z mide el incremento total del plano tangente, (determinado por las tangentes en las direcciones x y y), correspondiente a los incrementos arbitrarios Δx y Δy. Ahora, si $P(x_o, y_o, z_o)$ es un máximo relativo, el plano tangente debe ser horizontal, es decir, paralelo al plano x - y y por lo tanto el incremento total debe ser cero cuando aplicamos incrementos arbitrarios Δx y Δy en las direcciones x y y.

Entonces:

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy = 0$$

Ahora, puesto que dx y dy son iguales a los incrementos Δx y Δy, entonces pueden tomar cualquier valor y por lo tanto para que dz sea igual a cero es necesario que: $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$ y $\frac{\delta z}{\delta y} = 0$.

Condiciones suficientes. Hemos establecido como condiciones necesarias para que $P(x_o, y_o, z_o)$ sea un máximo relativo, que las primeras derivadas parciales de z con respecto a x y y sean cero. Además de estas condiciones, la superficie $z = f(x, y)$ debe ser cóncava hacia abajo para que el Punto $P(x_o, y_o, z_o)$, sea un máximo relativo. El segundo diferencial de z mide el incremento del incremento del plano tangente. Entonces, la superficie será cóncava hacia abajo si el segundo diferencial de z es negativo. Ahora, el diferencial de z es una función de x y y, es decir: $dz = g(x, y)$. Entonces, aplicando la definición del diferencial de una función de dos variables y denotando el segundo diferencial de z por d^2z, se tiene:

$$d^2z = d\left(\frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy\right)$$

$$= \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy\right) dx + \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy\right) dy$$

$$= \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}(dx)^2 + 2\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} dx\, dy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}(dy)^2$$

Ahora, d^2z debe ser negativo para que $P(x_o, y_o, z_o)$ sea un máximo relativo. Es decir:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}(dx)^2 + 2\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} dx\, dy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}(dy)^2 < 0$$

Hagamos las siguientes sustituciones para facilitar la conclusión:

$$A = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\;;\quad B = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\;;\quad C = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\;;\; dx = r\;;\; dy = s$$

Entonces:

$$A r^2 + 2 B r s + C s^2 < 0$$

$$A\left(r^2 + 2\frac{B}{A} r s\right) + C s^2 < 0$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto en la expresión entre paréntesis:

$$A\left(r^2 + 2\frac{B}{a} r s + \frac{B^2}{A^2} s^2\right) + C s^2 - \frac{B^2}{A} s^2 < 0$$

$$A\left(r + \frac{B}{A} s\right)^2 + \frac{A C - B^2}{A} s^2 < 0$$

$$A\left[\left(r + \frac{B}{A} s\right)^2 + (A C - B^2)\left(\frac{s}{A}\right)^2\right] < 0$$

Ahora, la expresión entre paréntesis rectangular es positiva cuando: $A C - B^2 > 0$. En este caso, el otro factor A debe ser negativo, es decir $A < 0$.

Devolviendo la sustitución, las condiciones suficientes para P sea un máximo relativo son:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0 \\ \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0 \end{cases}$$

De la misma manera, para que un punto sea un mínimo relativo debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta z}{\delta x} = 0 \;; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} > 0 \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = 0 \;; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

Resumen. Hemos deducido el siguiente proceso para determinar los máximos y mínimos relativos de una función de 2 variables: $z = f(x, y)$:

(a) Se encuentran los puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta z}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = 0 \end{cases}$$

(b) Se encuentran los valores de las segundas derivadas parciales en los puntos obtenidos en el inciso (a):

1. Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} < 0 \;; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0$,

   entonces el punto en cuestión es un máximo relativo.

2. Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} > 0 \;; \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 > 0$,

   entonces el punto en cuestión es un mínimo relativo.

3. Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 < 0$, entonces el punto en cuestión no es máximo ni mínimo relativo. En este caso, el punto en cuestión es máximo en una dirección y mínimo en la otra.

Observación: Si $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 = 0$, entonces la prueba no sirve para nuestros propósitos porque no podemos asegurar que el punto en cuestión sea o no, un máximo o mínimo relativo.

Ejemplo: Encontrar los máximos y mínimos relativos de:

$$z = x^2 + y^3 - 12y$$

Solución:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 2x$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 3y^2 - 12$$

Encontremos los puntos de tangente horizontal en las direcciones fundamentales x y y:

$$2x = 0$$

$$3y^2 - 12 = 0$$

$$x = 0$$

$$3y^2 = 12$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

Entonces, los puntos en el plano $x - y$ que posiblemente corresponden a máximos o mínimos relativos son:

$$A(0, 2) \;\; y \;\; B(0, -2)$$

Hagamos ahora la prueba de las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 6y$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = 0$$

En el punto A (0, 2) ; $x = 0$; $y = 2$. Sustituyendo:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 = 2\,(6y) - 0 = 24 > 0$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 2 > 0$$

Entonces, A (0, 2) corresponde a un mínimo relativo de z.

Para $x = 0$; $y = 2$, se tiene:

$$z = x^2 + y^3 - 12\,y = 0 + 8 - 24 = -16$$

Entonces, P (0, 2, -16) es un mínimo relativo.

En el punto B (0, -2) ; $x = 0$; $y = -2$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2 = 2\,(-12) - 0 = -24 < 0$$

Entonces, el punto B (0, -2) no corresponde a máximo o mínimo relativo.

7.2 Problema de monopolio múltiple. Supongamos que en un determinado mercado, 2 artículos están relacionados por sus leyes de demanda y son monopolizados por un solo monopolista. Entonces se presenta el problema de determinar las cantidades que deben producirse y los precios que deben aplicarse a los artículos para obtener el máximo ingreso neto. Consideramos el siguiente caso específico:

Problema. Un monopolista produce 2 artículos A_1 y A_2 a costos medios constantes, de manera que el costo total de producción es dado por: $C = 3x_1 + 5x_2$. Los artículos están relacionados en el mercado por las siguientes leyes de demanda:

$$x_1 = 80 - 2\,P_1 - P_2$$
$$x_2 = 100 - 2\,P_1 - 3\,P_2$$

Donde x_i = Cantidad demandada por el artículo A_i

P_i = Precio del artículo A_i

Determinar las condiciones óptimas para el monopolista, es decir, los precios de monopolio para obtener el máximo ingreso neto.

Solución. El ingreso total I_t es igual a las cantidades demandadas por sus respectivos precios:

$$I_t = x_1 P_1 + x_2 P_2$$

Ahora, el costo total de producción es:

$$C = 3x_1 + 5x_2$$

Entonces, el ingreso neto I_n es:

$$I_n = I_t - C$$

$$I_n = x_1 P_1 + x_2 P_2 - 3x_1 - 5x_2 = x_1\,(p_1 - 3) + x_2\,(p_2 - 5)$$

Sustituyendo:

$$x_1 = 80 - 2p_1 - p_2$$

$$x_2 = 100 - 2p_1 - 3p_2$$

$$I_n = (80 - 2p_1 - p_2)\,(p_1 - 3) + (100 - 2p_1 - 3p_2)\,(p_2 - 5)$$

$$\frac{\delta I_n}{\delta p_1} = (80 - 2p_1 - p_2) + (p_1 - 3)\,(-2) + (p_2 - 5)\,(-2)$$

$$= 80 - 2p_1 - p_2 - 2p_1 + 6 - 2p_2 + 10$$

$$= -4p_1 - 3p_2 + 96$$

$$\frac{\delta I_n}{\delta p_2} = (P_1 - 3)\,(-1) + (100 - 2P_1 - 3P_2) + (P_2 - 5)\,(-3)$$

$$= -P_1 + 3 + 100 - 2P_1 - 3P_2 - 3P_2 + 15$$

$$= 3P_1 - 6P_2 + 118 = 0$$

Puntos de tangente horizontal en las direcciones P_1 y P_2:

$$\begin{cases} -4P_1 - 3P_2 + 96 = 0 \\ -3P_1 - 6P_2 + 118 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4P_1 + 3P_2 = 96 \\ 3P_1 + 6P_2 = 118 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -2:

$$\begin{cases} -8P_1 - 6P_2 = -192 \\ 3P_1 + 6P_2 = 118 \end{cases}$$

$$-5P_1 = -74$$

$$P_1 = \frac{-74}{5}$$

$$P_1 = 14.80$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$4(14.80) + 3P_2 = 96$$

$$3P_2 = 96 - 59.20 = 36.80$$

$$P_2 = 12.27 \text{ (aproximado a 2 decimales)}$$

Prueba de las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1^2} = -4$$

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_2^2} = -6$$

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1 \delta P_2} = -3$$

Entonces:

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1^2} \cdot \frac{\delta^2 I_n}{\delta P_2^2} - \left(\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1 \delta P_2}\right)^2 = 24 - 9 = 15 > 0$$

Además:

$$\frac{\delta^2 I_n}{\delta P_1^2} = -4 < 0$$

Entonces: $P_1 = 14.80$ y $P_2 = 12.27$, corresponden a un máximo ingreso neto.

7.3 Máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales.

Consideremos una función de 2 variables $z = f(x, y)$ sujeta a la condición lateral $g(x, y) = 0$. En este caso, podemos considerar a y como una función implícita de x y por lo tanto, z resulta ser una función de x únicamente. Para determinar los máximos y mínimos relativos de z, podemos despejar y de la condición lateral, cuando esto sea posible, y sustituírla en $f(x, y)$ para obtener a z como una función de x y aplicar los métodos establecidos. Aun cuando no sea posible despejar y de la condición lateral, el problema se puede resolver considerando a z como una función de x únicamente y a y como una función implícita de x. Lagrange ideó un procedimiento para el problema de determinar máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales. Este método se conoce como método de los multiplicadores de Lagrange. Antes de establecer el método para el caso general, consideremos la función de 2 variables sujetas a una condición lateral:

$$z = f(x, y) \quad ; \quad g(x, y) = 0$$

Para determinar los posibles máximos y mínimos relativos, hagamos $w = g(x, y)$. Las condiciones necesarias para máximos o mínimos relativos en términos de diferenciales son dadas por:

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy = 0 \qquad (1)$$

Además, es necesario que $w = g(x, y) = 0$. Puesto que w debe ser cero para todo x y y, el diferencial de w debe ser cero:

$$dw = g_x\,dx + g_y\,dy = 0 \qquad (2)$$

De las parejas (x, y) que satisfagan la condición (1), deben seleccionarse las que satisfagan la condición (2). Lagrange redujo las dos condiciones a una, introduciendo el multiplicador λ tal que:

$$dz - \lambda\,dw = 0$$

Sustituyendo: $f_x\,dx + f_y\,dy - \lambda(g_x\,dx + g_y\,dy) = 0$

$$(f_x - \lambda g_x)\,dx + (f_y - \lambda g_y)\,dy = 0$$

Ahora, los diferenciales de x y y pueden tomar cualquier valor. Entonces, para que la última expresión se satisfaga, es necesario que los coeficientes de dx y dy sean cero:

$$f_x - \lambda g_x = 0$$
$$f_y - \lambda g_y = 0$$

Agregando la condición lateral $g(x, y) = 0$, se tiene un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas x, y, λ.

$$\text{I} \quad \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema nos proporciona los puntos (x, y) que posiblemente correspondan a máximos o mínimos relativos de z. De los puntos que satisfagan el sistema (1), aquellos que cumplan las siguientes condiciones, serán máximos relativos:

$$d^2 z < 0$$
$$d\,w = 0$$

De la misma manera, serán mínimos relativos si:

$$d^2 z > 0$$
$$d\,w = 0$$

La expresión de las condiciones suficientes en términos de derivadas parciales resultan complicadas y su verificació cada vez más laboriosa, a medida que aumenta el número de variables.

Entonces, nos limitaremos a determinar los puntos donde el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ sea paralelo al plano $x - y$ y que satisfagan la condición lateral $g(x, y) = 0$. (puntos donde el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es horizontal y cuya proyección en el plano $x - y$ está sobre la curva $g(x, y) = 0$). En algunos casos, la naturaleza del problema permite decidir si un punto que satisface las condiciones necesarias establecidas por el sistema (I) es máximo o mínimo. Por ejemplo, consideremos el siguiente:

Problema. Encontrar el cilindro circular de máximo volumen que puede obtenerse de una esfera de radio $\sqrt{3}$.

Solución. De acuerdo con la figura 7.1, el problema es el siguiente:

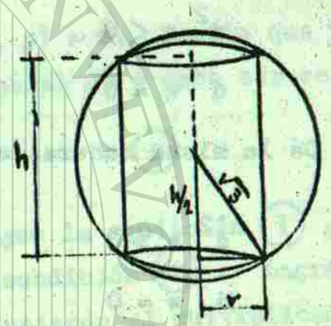
Maximizar : $V = \pi r^2 h$

Sujeta a : $r^2 + h^2/4 = 3$

Para aplicar el método de Lagrange, hagamos: $w = r^2 + h^2/4 - 3 = 0$

Las condiciones necesarias para posibles máximos y mínimos son:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta v}{\delta r} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta r} = 0 \\ \dfrac{\delta v}{\delta h} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta h} = 0 \\ r^2 + \dfrac{h^2}{4} - 3 = 0 \end{cases}$$



F.I.G. 7.1

Ahora:

$$\frac{\delta v}{\delta r} = 2\pi r h \quad ; \quad \frac{\delta v}{\delta h} = \pi r^2$$

$$\frac{\delta w}{\delta r} = 2r \quad ; \quad \frac{\delta w}{\delta h} = \frac{1}{2} h$$

Sustituyendo:

$$2\pi r h - 2r\lambda = 0$$

$$\pi r^2 - 1/2\, h \lambda = 0$$

$$r^2 + \frac{1}{4} h^2 = 3$$

Dividiendo entre 2 $\underline{r}$ la primera ecuación:

$$\pi h - \lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = \pi h$$

Sustituyendo $\lambda = \pi h$ en la segunda ecuación:

$$\pi r^2 - \frac{1}{2} \pi h^2 = 0$$

$$r^2 - \frac{1}{2} h^2 = 0$$

$$\therefore r^2 = \frac{1}{2} h^2$$

Sustituyendo en la tercera ecuación:

$$\frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{4} h^2 = 3$$

$$\frac{3}{4} h^2 = 3$$

$$h^2 = 4$$

$\therefore \underline{\underline{h = 2}}$ (h = -2 no se considera por las condiciones del problema).

Ahora:

$$r^2 = \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{2}(4) = 2$$

$$\underline{\underline{r = \sqrt{2}}}$$

Estos valores de $\underline{r}$ y $\underline{h}$ son los únicos que pueden corresponder a un máximo V y por la naturaleza del problema, debe haber un cilindro de máximo volumen inscrito en la esfera. Entonces, $r = \sqrt{2}$ y $h = 2$ corresponden al cilindro de máximo volumen:

$$V = \pi r^2 h = \pi (2)(2)$$

$$\underline{\underline{V = 4\pi}}$$

<u>Observación</u>: Este problema ha ilustrado el método de Lagrange para el caso más simple de una función de 2 variables, sujetas a una condición lateral. El problema puede resolverse considerando a $\underline{r}$ como función de $\underline{h}$ de la siguiente manera:

Maximizar: $v = \pi r^2 h$

Sujeta a : $r^2 + \frac{1}{2} h^2 = 3$

De la condición lateral:

$$r^2 = 3 - \frac{1}{4} h^2$$

Sustituyendo en la función a maximizar:

$$V = \pi h\left(3 - \frac{1}{4}h^2\right)$$

$$V = 3\pi h - \frac{1}{4}\pi h^3$$

Entonces, hemos reducido el problema a maximizar una función de una variable $\underline{h}$:

$$\frac{dV}{dh} = 3\pi - \frac{3}{4}\pi h^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}h^2 = 3$$

$$h^2 = 4$$

$$\underline{\underline{h = 2}}$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{2}\pi h$$

Para $h = 2$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{2}(2\pi) = -3\pi < 0$$

Entonces, $h = 2$ corresponde a un máximo V.

Generalización del método de Lagrange. El problema de determinar los posibles máximos y mínimos de una función de $\underline{n}$ variables, sujetas a $\underline{m}$ condiciones laterales, puede ser resuelto por el método de Lagrange siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior. Consideremos el problema general:

Maximizar : $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Sujeta a : $g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$

$g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$

$\vdots$

$g_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$

Solución: Los diferenciales de $\underline{z}$, g_1, g_2, ..., g_m, deben ser cero. Ligando estas condiciones con los multiplicadores de Lagrange:

$$dz - \lambda_1\, dg_1 - \lambda_2\, dg_2 - \ldots\ldots - \lambda_m\, dg_m = 0$$

Sustituyendo los diferenciales en términos de las derivadas parciales y simplificando:

$$\frac{\delta z}{\delta x_1} - \lambda_1 \frac{\delta g_1}{\delta x_1} - \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_1} - \ldots\ldots - \lambda_m \frac{\delta g_m}{\delta x_1} = 0$$

$$\frac{\delta z}{\delta x_2} - \lambda_1 \frac{\delta g_1}{\delta x_2} - \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_2} - \ldots\ldots - \lambda_m \frac{\delta g_m}{\delta x_2} = 0$$

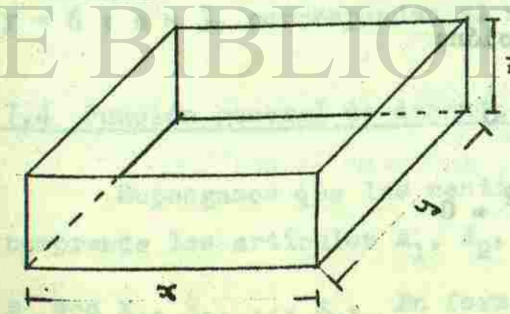
$$\vdots$$

$$\frac{\delta z}{\delta x_n} - \lambda_1 \frac{\delta g_1}{\delta x_n} - \lambda_2 \frac{\delta g_2}{\delta x_n} - \ldots\ldots - \lambda_m \frac{\delta g_m}{\delta x_n} = 0$$

Agregando las $\underline{m}$ condiciones laterales para las variables, se tiene un sistema de $\underline{n + m}$ ecuaciones con $\underline{n + m}$ incógnitas correspondientes a las $\underline{n}$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y los $\underline{m}$ multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

Ejemplo: Encontrar las dimensiones de la caja rectangular, sin tapa, de máximo volumen que puede obtenerse de manera que su área sea igual a 108 centímetros cuadrados.

Solución. De acuerdo con la figura, el problema es:



Maximizar: $V = x\,y\,z$

Sujeta a: $xy + 2xz + 2yz = 108$

Fig. 7.2

Hagamos: $w = xy + 2xz + 2yz - 108 = 0$

Las condiciones necesarias para posibles máximos y mínimos son:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta V}{\delta x} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\delta V}{\delta y} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\delta V}{\delta z} - \lambda \dfrac{\delta w}{\delta z} = 0 \\[2mm] xy + 2xz + 2yz - 108 = 0 \end{cases}$$

Ahora:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = yz \;;\; \frac{\delta V}{\delta y} = xz \;;\; \frac{\delta V}{\delta z} = xy$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = y + 2z \;;\; \frac{\delta w}{\delta y} = x + 2z \;;\; \frac{\delta w}{\delta z} = 2x + 2y$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} yz - (y + 2z)\lambda = 0 \\ xz - (x + 2z)\lambda = 0 \\ xy - (2x + 2y)\lambda = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 108 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$\lambda = \frac{yz}{y + 2z}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$xz - (x + 2z) \cdot \frac{yz}{y + 2z} = 0$$

$$\cancel{xyz} + 2xz^2 - \cancel{xyz} - 2yz^2 = 0$$

Dividiendo entre $2z^2$: $(z \neq 0)$

$$x - y = 0$$

$$\therefore x = y$$

Ahora, sustituyendo λ en la tercer ecuación:

$$xy - (2x + 2y) \cdot \frac{yz}{y + 2z} = 0 \qquad y \neq -2z$$

$$xy^2 + \cancel{2xyz} - \cancel{2xyz} - 2y^2 z = 0$$

Dividiendo entre y^2: $(y \neq 0)$

$$x - 2z = 0$$

$$x = 2z$$

$$\therefore y = 2z$$

Sustituyendo $\underline{x}$ y $\underline{y}$ en la última ecuación:

$$(2z)(2z) + 2(2z)z + 2(2z)z = 108$$

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 108$$

$$12z^2 = 108$$

$$z^2 = 9$$

$$z = 3$$

$$\therefore y = 6$$

$$x = 6$$

Ahora, por la naturaleza del problema, sabemos que debe haber un máximo volumen para el área dada. Entonces, $x = 6$; $y = 6$; $z = 3$, corresponden al máximo volumen $V = (6)(6)(3) = 108$ cms.^{3}

7.4 Función general de demanda.

Supongamos que las cantidades demandadas en un mercado que comprende los artículos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a los precios $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son $x_1, x_2, \ldots x_n$. En forma tabular tenemos:

Artículos: A_i	A_1	A_2	. . .	A_n
Precios : P_i	P_1	P_2	. . .	P_n
Cant.Dem: x_i	x_1	x_2	. . .	x_n

$$\left.\begin{matrix} x_i \\ P_i \end{matrix}\right\} \text{Variables.} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, \quad n.$$

Además, supongamos que las cantidades demandadas $\underline{x_i}$ son funciones de los precios $\underline{P_i}$:

$$x_1 = f_1 (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$x_2 = f_2 (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = f_n (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Es decir, cada una de las leyes de demanda para los diferentes artículos, es una función de $\underline{n}$ variables.

Consideremos un artículo cualquiera $\underline{Ar}$ y analicemos su ley de demanda:

$$X_r = f_r (P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots, P_r, \ldots\ldots P_n)$$

La derivada parcial de $\underline{x_r}$ con respecto a $\underline{P_r}\left(\frac{\delta X_r}{\delta P_r}\right)$ mide la rapidez de cambio de la cantidad demandada del artículo $\underline{Ar}$ al aumentar su precio $\underline{P_r}$ dejando los demás precios constantes.

La elasticidad parcial de $\underline{Xr}$ con respecto a $\underline{Pr}$ es por definición:

$$E_{P_r} (X_r) = \frac{P_r}{X_r} \frac{\delta X_r}{\delta P_r}$$

Esta elasticidad parcial mide el cambio de la cantidad demandada proporcional al nivel de demanda con respecto al cambio en el precio proporcional al nivel de precio considerado. Obsérvese

que la elasticidad parcial que estamos considerando corresponde a la <u>elasticidad de demanda</u> por el artículo $\underline{Ar}$ que habíamos definido en la Ley simple de demanda $X_r = f (P_r)$ puesto que al derivar parcialmente con respecto a $\underline{P_r}$, las demás variables permanecen constantes.

<u>7.5 Elasticidades cruzadas.</u> La derivación parcial con respecto a otro precio que no sea el del artículo Ar, nos proporciona lo que se llama <u>elasticidad cruzada</u> de la cantidad demandada por el artículo $\underline{X_r}$ con respecto al precio de otro artículo P_s :

$$E_{P_s} (X_r) = \frac{P_s}{X_r} \frac{\delta X_r}{\delta P_s}$$

Esta elasticidad mide el cambio de la cantidad demandada de Ar, proporcional al nivel de demanda con respecto a un cambio en el precio de As proporcional al nivel de precio considerado.

Las elasticidades cruzadas son de especial importancia en teoría económica porque son la base de la siguiente clasificación de los artículos comprendidos por un mercado:

Artículos que intervienen en un mercado

$$M : A_1, A_2, \ . \ . \ . \ ., A_n$$

<u>Clasificación:</u>

<u>1. Artículos sustitutos</u> Si: $E_{P_s} (X_r) > 0$ y $E_{P_r} (X_s) > 0$

Entonces los artículos Ar y As son <u>sustitutos</u>, porque las condiciones establecidas indican que el cambio de la cantidad demandada (proporcional) de uno de los artículos con respecto al cambio proporcional del precio del otro es positivo. En otras palabras, la cantidad demandada de uno de los artículos aumenta cuando se aumenta el precio del otro. Entonces el consumidor sustituye un artículo por el otro según los precios establecidos. (Por ejemplo automóviles nuevos y automóviles usados son art. sustit.)

2. Artículos complementarios. Si $E_{P_s}(x_r) < o$ y $E_{P_r}(X_s) < 0$ (ambos negativas), entonces los artículos Ar y As son complementarios. De nuevo el nombre es justificado porque las condiciones indican que el cambio en la cantidad demandada (proporcional) de uno de los artículos con respecto al cambio en el precio (proporcional) del otro es negativo. Es decir, la cantidad demandada de uno de los artículos disminuye al aumentar el precio del otro. (Por ejemplo, café y azúcar en un mercado normal son complementarios).

3. Artículos independientes. Si $E_{P_s}(X_r) = 0$ y $E_{P_r}(X_s) = 0$, entonces los artículos Ar y As son independientes, La cantidad demandada por uno de los artículos no cambia al aumentar el precio del otro. En éste caso, la cantidad demandada por el artículo Ar no es función del precio del artículo As al nivel considerado y viceversa.

Observación: Las condiciones establecidas pueden simplificarse a las derivadas parciales que son las que determinan el signo de las elasticidades.

Ejemplos:

1. Supongamos que las leyes de demanda por 3 artículos A_1, A_2 y A_3 son las siguientes:

$$1.\ X_1 = 30 - 3P_1 + 2P_2 + 4P_3$$

$$2.\ x_2 = 50 + P_1 - 5P_2 - 3P_3$$

$$3.\ X_3 = 100 + 2P_1 - 3P_2 - 6P_3$$

Encontrar las elasticidades parciales de demanda directas y cruzadas. Además determinar la relación entre los artículos de acuerdo con la clasificación establecida.

a) Elasticidades directas:

Artículo A_1 : $E_{P_1}(X_1) = \frac{P_1}{X_1}\frac{\delta X_1}{\delta P_1}$

De la ecuación 1 : $\frac{\delta X_1}{\delta P_1} = -3$

Sustituyendo:

$E_{P_1}(X_1) = \frac{-3P_1}{x_1}$ (Negativa para cualquier nivel de la cantidad demandada X_1).

Artículo A_2 $E_{P_2}(X_2) = \frac{P_2}{X_2}\frac{\delta X_2}{\delta P_2}$

de la ecuación 2 : $\frac{\delta X_2}{\delta P_2} = -5$

Sustituyendo:

$E_{P_2}(X_2) = 1\frac{-5P_2}{X_2}$ (negativa para todo nivel de X_2).

Artículo A_3 $E_{P_3}(X_3) = \frac{P_3}{X_3}\frac{\delta X_3}{\delta P_3}$

de la ecuación 3 : $\frac{\delta X_3}{\delta P_3} = -6$

Sustituyendo: $E_{P_3}(X_3) = \frac{-6P_3}{X_3}$ (negativa para todo nivel de X_3)

b) Elasticidades cruzadas

Artículo A_1 $E_{P_2}(X_1) = \frac{P_2}{X_1}\frac{\delta X_1}{\delta P_2}$ $E_{P_3}(X_1) = \frac{P_3}{X_1}\frac{\delta X_1}{\delta P_3}$

de la ecuación 1 :

$\frac{\delta X_1}{\delta P_2} = 2$; $\frac{\delta X_1}{\delta P_3} = 4$

Sustituyendo:

$E_{P_2}(X_1) = \frac{2P_2}{X_1} > o$; $E_{P_3}(X_1) = \frac{4P_3}{X_1} > o.$

Artículo A_2 $E_{P_1}(X_2) = \frac{P_1}{X_2}\frac{\delta X_2}{\delta P_1}$; $E_{P_3}(X_2) = \frac{P_3}{X_2}\frac{\delta X_2}{\delta P_3}$

de la ecuación 2 : $\frac{\delta X_2}{\delta P_1} = 1$; $\frac{\delta X_2}{\delta P_3} = -3$

Sustituyendo:

$$E_{P_1}(X_2) = \frac{P_1}{X_2} > 0 \quad ; \quad E_{P_3}(X_2) = \frac{-3P_3}{x_2} < 0$$

Artículo A_3 $\quad E_{P_1}(X_3) = \frac{P_1}{X_3}\,\frac{\delta X_3}{\delta P_1} \quad ; \quad E_{P_2}(X_3) = \frac{P_2}{X_3} - \frac{\delta X_3}{\delta P_2}$

De la ecuación 3 ; $\frac{\delta X_3}{\delta P_1} = 2$; $\frac{\delta X_3}{\delta P_2} = -3$

Sustituyendo:

$$E_{P_1}(X_3) = \frac{2P_1}{x_3} > 0 \quad ; \quad E_{P_2}(X_3) = -\frac{3P_2}{X_3} < 0$$

c) Relación entre los artículos:

Los artículos A_1 y A_2 son <u>sustitutos</u> porque $E_{P_2}(X_1) > 0$ y $E_{P_1}(X_2) > 0$, es decir, la cantidad demandada de uno de ellos aumenta al aumentar el precio del otro.

Los artículos A_1 y A_3 son también <u>sustitutos</u> porque $E_{P_1}(X_3) > 0$ y $E_{P_3}(X_1) > 0$.

Los artículos A_2 y A_3 son complementarios por $E_{P_2}(X_3) < 0$ y $E_{P_3}(X_2) < 0$, es decir, la cantidad demandada de uno de ellos disminuye al aumentar el precio del otro.

7.6 La función de producción.

Una de las aplicaciones importantes de las matemáticas a teoría económica es el análisis de la <u>función de producción</u>. Esta función relaciona los factores productivos proporcionando una expresión matemática para obtener la cantidad producida, de acuerdo con las cantidades de los factores productivos que sean empleados en la producción. La función de producción es una herramienta notablemente útil en el análisis económico de una empresa, de una industria ó del ingreso nacional de un país.

En términos matemáticos, el problema es el siguiente. La cantidad producida (de un artículo en una empresa, por ejemplo) depende de las cantidades de los factores variables empleados, sean:

z = Cantidad producida del artículo

x_i = Cantidad del factor variable x_i empleado en la producción, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Entonces la función de producción es una expresión de la forma:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Se supone que las variables x_i son continuamente divisibles y z es una función contínua en su dominio.

<u>Condiciones "normales" de la función de producción.</u>

Para decidir que tipo de función ha de ajustarse a la producción, es necesario establecer características propias de la función de producción que son resultado de observaciones empíricas y deducciones lógicas:

Consideremos primeramente un sólo factor productivo variable. En éste caso la función de producción tiene la forma:

$z = f(x)$ $\quad$ z = Cantidad productida.

x = Cantidad del factor productivo variable empleado en la producción.

La forma "normal" de la gráfica de la función es la siguiente : (figura 7.3).

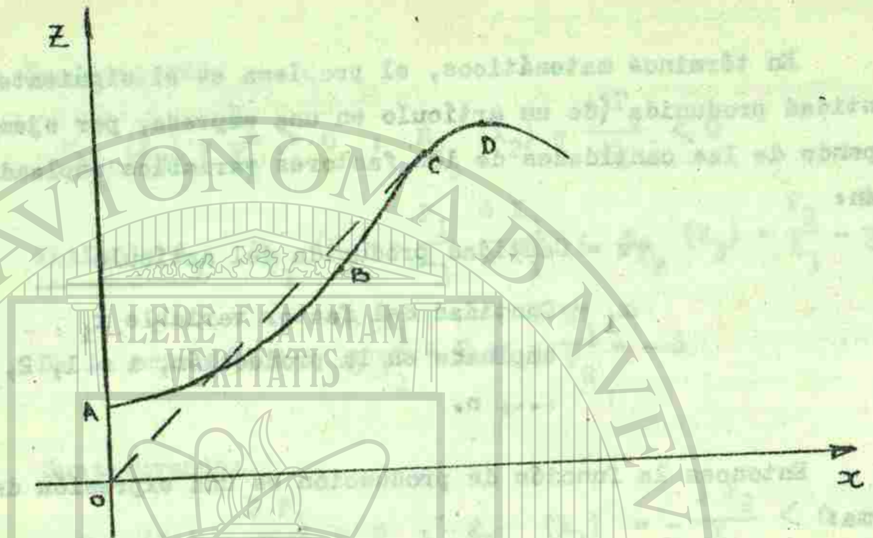


Fig. 7.3

El punto A corresponde al nivel de producción cuando no se utiliza el factor productivo variable ($x = 0$). Cuando el factor productivo variable es esencial en la producción, A coincide con el origen de coordenadas O.

El punto B es un punto de inflexión donde cambia el sentido de concavidad de la curva, de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.

$\frac{d^2 z}{d x^2} = 0$. A partir de este punto empieza a operar la Ley de rendimientos marginales de crecientes, es decir, $\frac{d^2 z}{d x^2}$ es negativa lo cual indica que el producto marginal de x, $\left(\frac{d z}{d x}\right)$, está disminuyendo de B hacia la derecha.

El punto C corresponde al máximo producto medio. Este es un punto de particular importancia porque a partir de C a la derecha empieza a operar la Ley de rendimientos medios decrecientes aún cuando la producción sigue aumentando al aumentar el factor productivo variable. La zona económicamente importante empieza entonces, a partir del punto C.

El punto D es el máximo nivel de producción que puede obtenerse, a partir del cual la producción empieza a disminuir al aumentar el factor productivo variable x.

Ejemplo. Supongamos que en una determinada zona agrícola se cultiva maíz y se analiza la producción variando únicamente la cantidad de horas hombre empleadas. Entonces se tiene:

Tierra, equipo, etc.: Constantes.

Cientos de hrs.- hombre por año = x

no. de toneladas de maíz por año = z

$$z = f(x)$$

Consideremos ahora 2 factores productivos variables. Entonces la función de producción toma la forma:

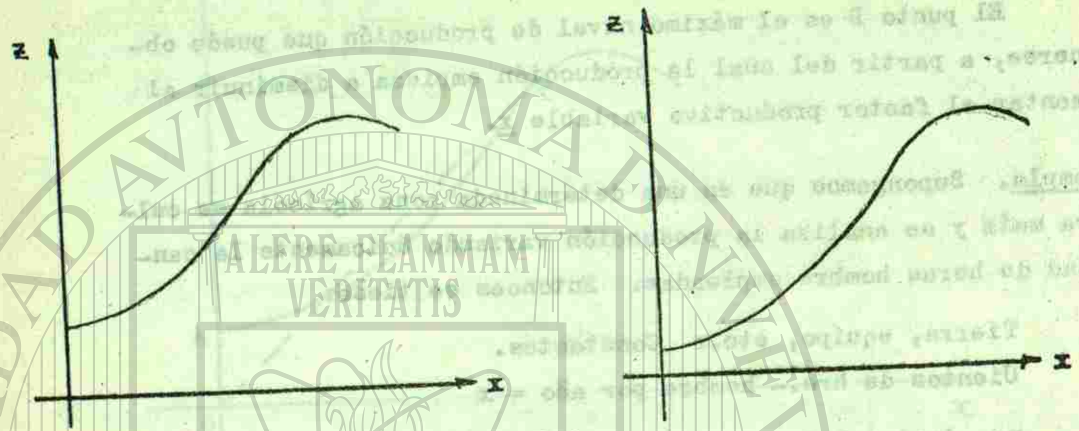
$$z = f(x, y)$$

z = Cantidad producida

(x, y) = Cantidades de los factores productivos variables.

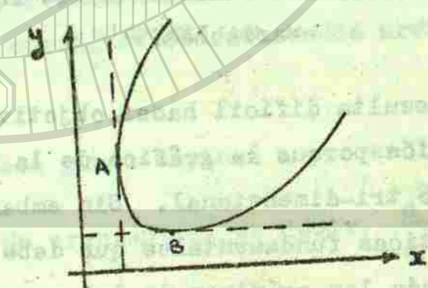
En este caso resulta difícil hacer objetivas las condiciones "normales" de la función porque la gráfica de la misma es una superficie en el espacio tri-dimensional. Sin embargo podemos establecer las características fundamentales que debe poseer la función de producción analizando las gráficas de las secciones a la superficie, paralelas a los planos principales:

a) Secciones verticales. Cortes paralelos al plano $z - x$ y al plano $z - y$. Estas secciones corresponden a mantener uno de los factores productivos fijo (constante) y su gráfica es por lo tanto de las mismas características que la de la función de producción con un sólo factor variable. (figura 7.4).



F i g. 7.4

b) Secciones horizontales. Cortes paralelos al plano x - y. Esta sección corresponde a considerar la cantidad producida z como constante. Entonces los puntos de la gráfica de una sección de este tipo corresponden a las diferentes combinaciones de los factores productivos que se requieren para un nivel constante de la cantidad producida $z = c$. La forma " normal " de la gráfica de esta sección horizontal llamada también curva de nivel C es la siguiente:



F i g. 7.5

La parte AB de la curva es la económicamente importante. El punto A es un punto en que la tangente es vertical. A partir de éste punto al aumentar la cantidad del factor productivo x, disminuye la cantidad del factor productivo y. El punto B es un punto de tangente horizontal. A la derecha de B al aumentar x aumenta y también lo cual es lógicamente inconveniente desde el punto de vista económico. Exactamente lo mismo sucede hacia arriba del punto A, es decir al aumentar y aumenta también x para mantener el nivel de producción constante.

En términos matemáticos, las características fundamentales de la función de producción en las zonas económicamente importantes son las siguientes:

a) Sección Vertical : y = Constante

1. Creciente de C a D. $\frac{dz}{dx} > 0$

2. Punto máximo en D. $\frac{dz}{dx}$ 0

3. Decreciente a la derecha de D:

$$\frac{dz}{dx} < 0$$

4. Cóncava hacia abajo $\frac{d^2 z}{d x^2}$ 0

b) Sección horizontal : z = Constante

1. Decreciente de A a B $\frac{dy}{dx} < 0$

2. Punto crítico de tangente vertical en A : $\frac{dy}{dx} = \infty$

3. Mínimo en B $\frac{dy}{dx} = 0$

4. Cóncava hacia arriba: $\frac{d^2 y}{d x^2} > 0$

Ejemplo: Una función de producción de tipo "normal" que ha sido utilizada en muchos casos con resultados más o menos satisfactorios es la de Cobb-Douglas:

$$z = a x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

z = Cantidad producida

x, y = Factores productivos variables.

a, α = Constantes. $0 < \alpha < 1$

Verifiquemos las condiciones "normales" para $\alpha = 2/3$ y $a = 60$.

1. <u>Sección vertical</u> (x = constante) sea $x = 64$

$$z = 60\,(x)^{2/3}\,y^{1/3} = 60\,(64)^{2/3}\,(y)^{1/3} = 960\,(y)^{1/3}$$

$$z = 960\,(y)^{1/3}$$

y	z
0	0
1	960
8	1920
27	2880

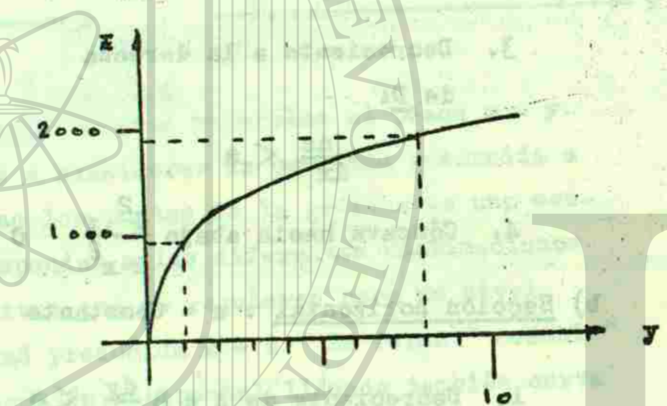


FIG. 7.6

La curva satisface las condiciones "normales" en la zona <u>económicamente importante</u>. Es decir, es creciente ($\frac{dz}{dy} > 0$) y cóncava hacia abajo $\frac{d^2 z}{d\,y^2} < 0$. (figura 7.6).

2. <u>Sección horizontal</u> (z = constante) sea

$$z = 1{,}200$$

$$1{,}200 = 60x^{2/3}\,y^{1/3}$$

$$x^{2/3}\,y^{1/3} = 20$$

$\underline{y}$ es una función implícita de x. Utilizando derivados parciales para encontrar $\frac{dy}{dx}$: Si $w = x^{2/3}\,y^{1/3} - 20$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta w}{\delta x}}{\frac{\delta w}{\delta y}} = -\frac{2/3\,(x)^{-1/3}\,(y)^{1/3}}{\frac{1}{3}\,x^{2/3}\qquad y^{-2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,y}{x} < 0 \qquad \text{para } \underline{x},\ \underline{y} \text{ positivos}$$

Entonces, la curva es decreciente hacia la derecha.

Ahora:

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{-2x\,\frac{dy}{dx} + 2y}{x^2} = \frac{(-2x)\left(\frac{-2y}{x}\right) + 2y}{x^2}$$

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{6y}{x^2} > 0 \quad \text{para todo } \underline{x},\ \underline{y} \text{ positivos.}$$

Entonces la curva es cóncava hacia arriba. Es decir se satisfacen las condiciones "normales" de la función de producción en la zona económicamente importante.

7.7 Sustituibilidad de los factores de producción

Para una función de producción en la que intervienen 2 factores productivos variables, una curva de nivel de producción constante corresponde a una relación entre los factores productivos variables de la forma:

$$f\,(x, y) = c$$

La <u>tasa marginal de sustitución</u> es un indicador de la cantidad que debe aumentarse del factor $\underline{y}$ al disminuir $\underline{x}$ para mantener el nivel de producción $\underline{c}$.

<u>Def</u>. Tasa marginal de sustitución de $\underline{y}$ por $\underline{x}$ = $r = -\frac{dy}{dx}$

Considerando a $\underline{y}$ como una función implícita de $\underline{x}$ en $f\,(x, y) = c$ y aplicando derivados parciales:

$$\text{Sea} \quad z = f\,(x, y) = c$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{\delta\,z}{\delta\,x}}{\frac{\delta\,z}{\delta\,y}}$$

Ahora: $\frac{\delta\,z}{\delta\,x} = f_x$ = Producto marginal de $\underline{x}$.

$\frac{\delta\,z}{\delta\,y} = f_y$ = Producto marginal de $\underline{y}$.

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{f\,x}{f\,y}$$ (pendiente de la tangente a la curva $f\,(x, y) = c$).

Entonces la tasa marginal de sustitución resulta: $r = \frac{-fx}{fy}$.

En el caso "normal" y en la zona económicamente importante, la curva f (x, y) = c es decreciente, es decir $\frac{dy}{dx} < 0$. Entonces $r > 0$.

F I G. 7.7

Ahora, la curva es cóncava hacia arriba, $\frac{d^2 y}{d x^2} > 0$, es decir, $\frac{dy}{dx}$ es creciente hacia la derecha y por lo tanto r es decreciente, es decir, cuando nos movemos hacia la derecha, cada vez hay que disminuir menos la cantidad de y para incrementos iguales de x.

Para propósitos de análisis de la sustituibilidad de los factores productivos, la tasa marginal de sustitución es un indicador conveniente. Definiremos ahora la <u>elasticidad de sustitución</u> de la siguiente manera:

<u>Def.</u> La elasticidad de sustitución de y por x es la elasticidad de $\frac{y}{x}$ con respecto a r. Es decir:

$$\sigma = \frac{r}{y/x} \frac{d(y/x)}{dr} = \frac{d \ln (y/x)}{d \ln r}$$

De acuerdo con esta definición abstracta, la elasticidad de sustitución mide el cambio en la proporción de los factores productivos (y/x) proporcional al nivel de dicha proporción, con respecto a un cambio en la tasa marginal de sustitución (r) proporcional al nivel correspondiente de r, para mantener el nivel dado de producción C. En otras palabras, la elasticidad de sustitución es un indicador del cambio en la proporción de los factores produtivos correspondientes a un aumento en la tasa marginal de sustitución.

Para calcular el valor numérico de la elasticidad de sustitución dada una pareja de valores para los factores productivos x y y es conveniente transformar la fórmula establecida por la definición para obtener σ como una función de x y y y derivadas parciales de z = f (x, y). Sustituyendo los diferenciales de (y/x) y de r primero y después r y sus derivadas parciales, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{fxfy\ (xf_x + y\ fy)}{xy\ (-\ fxx\ fy^2 + 2fxy\ fx\ fy - fyy\ fx^2)}$$

Este resultado indica que la elasticidad de sustitución es una función simétrica de x y y porque si se cambia x por y, la expresión para σ no se altera. Entonces se puede hablar simplemente de la elasticidad de sustitución entre b y a porque la elasticidad de sustitución de b por a es la misma que la elasticidad de sustitución de a por b.

La segunda derivada de y con respecto a x mide la curvatura de la curva z = constante. Ahora, calculando la expresión para $\frac{d^2 y}{d x^2}$, se encuentra que σ es un múltiplo positivo de $\frac{1}{d^2 y/dx^2}$.

Entonces, si la curva es una recta, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ y por lo tanto $\sigma = \infty$; en este caso, se dice que x y y son perfectos sustitutos. Cuando $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty$, entonces $\sigma = 0$ y se dice que x y y son incapaces de sustitución.

Observaciones:

1. Si $z = f(x, y)$ es una función lineal homogénea, entonces aplicando las propiedades de las funciones lineales homogéneas, la elasticidad de sustitución se reduce a:

$$\sigma = \frac{f_x f_y}{z\, f_{xy}}$$

2. Si $z = f(x, y)$ es una función de producción homogénea de grado m, entonces la tasa marginal de sustitución es una función homogénea de grado cero.

Dem. Si $z = f(x, y)$ es homogénea de grado m, entonces f_x y f_y son homogénea se grado $m - 1$ por la propiedad 2 de las funciones homogéneas. Es decir: $f_x = g(x, y)$ y $f_y = h(x, y)$ son tales que:

$$g(cx, cy) = c^{m-1}\, g(x, y)$$

$$h(cx, cy) = c^{m-1}\, h(x, y)$$

Ahora, $r = \frac{f_x}{f_y} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = F(x, y)$

Entonces: $F(cx, cy) = \frac{g(cx, cy)}{h(cx, cy)} = \frac{c^{m-1}\, g(x, y)}{c^{m-1}\, h(x, y)}$

$$= \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = F(x, y)$$

Es decir, la tasa marginal de sustitución es homogénea de grado cero.

L.C.D.D.

7.8 Demanda por factores de producción. Consideremos la función de producción $z = f(x_1, x_2)$, donde x_i = cantidad del factor productivo x_i para producir z unidades del artículo A. Supongamos que se desea obtener un determinado nivel de producción z_o de

manera que el costo sea mínimo. El costo de la producción z_o es:

$C = x_1 P_1 + x_2 P_2$, donde P_i = Precio del factor productivo x_i.

Consideremos que P_1 y P_2 varían al variar el nivel de producción, pero permanecen constantes para un nivel de producción determinado z_o. Entonces, el problema es determinar las cantidades de los factores productivos x_1 y x_2 para producir una cantidad z_o al mínimo costo posible C. Es decir:

Minimizar: $C = x_1 P_1 + x_2 P_2$

Sujeta a: $z_o = f(x_1, x_2)$

Hagamos $w = f(x_1, x_2) - z_o$. Entonces las condiciones necesarias para minimizar el costo C son:

$$\begin{cases} \frac{\delta c}{\delta x_1} - \lambda \frac{\delta w}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta c}{\delta x_2} - \lambda \frac{\delta w}{\delta x_2} = 0 \\ f(x_1, x_2) - z_o = 0 \end{cases}$$

Ahora:

$$\frac{\delta c}{\delta x_1} = P_1 ; \quad \frac{\delta c}{\delta x_2} = P_2$$

$$\frac{\delta w}{\delta x_1} = f_{x_1} ; \quad \frac{\delta w}{\delta x_2} = f_{x_2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} P_1 - \lambda f_{x_1} = 0 \\ P_2 - \lambda f_{x_2} = 0 \\ f(x_1, x_2) - z_o = 0 \end{cases}$$

Despejando λ en las 2 primeras ecuaciones e igualando los resultados se obtiene:

$$\lambda = \frac{P_1}{f_{x_1}} \; ; \; \lambda = \frac{P_2}{f_{x_2}}$$

$$\therefore \frac{P_1}{f_{x_1}} = \frac{P_2}{f_{x_2}}$$

Invirtiendo ambos lados de la ecuación:

$$\frac{f_{x_1}}{P_1} = \frac{f_{x_2}}{P_2}$$

Este resultado establece que una condición necesaria para minimizar el costo es que los productos marginales sean proporcionales a los precios correspondientes de los factores productivos.

Ahora, definiendo: $\frac{f_{x_i}}{P_i}$ = productividad marginal del factor productivo x_i, se obtiene la ley de productividad marginales iguales para la minimización del costo de producción.

Ejercicio 24.

Tema: Máximos y mínimos en funciones de varias variables.

1. Encontrar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

1.1 $z = x^2 + 2x + y^2$

1.2 $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$

1.3 $z = 2x^2 + 4x - y^2 - 6y + 4xy + 46$

2. Un monopolista produce 2 artículos A_1 y A_2. Sean:

P_1 = precio del artículo A_1

P_2 = precio del artículo A_2

x_1 = cantidad producida de A_1

x_2 = cantidad producida de A_2

C = Costo total de producción

Supongamos que los artículos están relacionados por las siguientes funciones de demanda:

$$x_1 = 200 - 4P_1 - 2P_2$$

$$x_2 = 300 - 2P_1 - 5P_2$$

Supongamos además que los costos medios de producción son constantes de manera que la función del costo total es de la simple forma:

$$C = 4x_1 + 3x_2$$

Determinar las condiciones óptimas para el monopolista, (precios de monopolio y cantidades que debe producir para obtener el máximo ingreso neto).

3. Encontrar los posibles máximos y mínimos de las siguientes funciones de varias variables sujetas a las condiciones laterales indicadas:

3.1 $z = x^2 - xy + 3y$
$2x + y = 6$

3.2 $z = x^3 - y^3 + 2xy - 8$
$y - x = 1$

3.3 $u = x^2 + (y - 2)^2 + (z-1)^2$
$4x + y + 4z = 39$

3.4 $z = e^{x^2 + y^2}$
$x - y + 2 = 0$

4. Un fabricante desea producir cajas metálicas con tapa cuadrada y con una capacidad de 50 litros. Determinar las dimensiones de la caja que proporcionan mínimo costo si el material empleado cuesta un peso por decímetro cuadrado. (Un litro es igual a un decímetro cúbico).

Ejercicio 25.

Tema: Elasticidades parciales, elasticidades directas y cruzadas.

1. Encontrar las elasticidades parciales de <u>u</u> con respecto a <u>x</u> y <u>y</u> en las siguientes funciones:

1.1 $u = 10x^3 y^2$

1.2 $u = e^{2x + 3y}$

1.3 $u = \ln (x^2 - xy + y^2)$

2. Supongamos que las funciones de demanda para 4 artículos A_1, A_2, A_3, A_4, de un mercado son las siguientes:

$$x_1 = 30 - 2P_1 + 3P_2 + 5P_3 - 4P_4$$

$$x_2 = 60 + 2P_1 - 4P_2 - 3P_3 + 2P_4$$

$$x_3 = 100 + 3P_1 - 2P_2 - 5P_3 + 3P_4$$

$$x_4 = 150 - 8P_1 + 3P_2 + 5P_3 - 6P_4$$

x_i = Cantidad demandada por el artículo A_i

P_i = Precio del artículo A_i

x_i y P_i variables $i = 1, 2, 3, 4.$

Encontrar las elasticidades parciales de demanda directas y cruzadas. Además determinar la relación entre los artículos de acuerdo con la clasificación establecida. (Sustitutos, complementarios o independientes).

3. Supongamos que las funciones de demanda para 2 artículos A_1 y A_2 son las siguientes:

$$x_1 = 30\, P_1^{-2}\, P_2^{3}$$

$$x_2 = 50\, P_1^{2}\, P_2^{-1}$$

x_i y P_i representan lo mismo que en el problema 1. Encontrar las elasticidades parciales directas y cruzadas por derivación logarítmica y determinar si los artículos son sustitutos o complementarios.

<u>Ejercicio 26.</u>

<u>Tema</u>: <u>Funciones de producción. Aplicación de derivadas parciales.</u>

1. La producción de trigo en una zona agrícola es dada por la siguiente ley:

$$z = 19.4\, xy - 4x^2 - 3y^2$$

z = No. de bultos de trigo (de 35 decímetros cúbicos).

x = Cientos de horas-hombre

y = No. de hectáreas

Para y = 20, encontrar el producto medio y el producto marginal con respecto a <u>x</u> y graficarlos sobre un mismo sistema de coordenadas. (eje horizontal para la variable <u>x</u>)

Verificar que el producto medio es máximo cuando es igual al producto marginal.

* 2. Hacer lo mismo que en el ejercicio 1, para la siguiente función de producción lineal homogénea para y = 100.

$$z = \frac{40}{x + y}\,(12\, xy - 5x^2 - 4y^2)$$

3. La función de producción para un artículo es la siguiente:

$$z = A\, x^{\alpha}\, y^{1-\alpha}$$

z = No. de unidades producidas.

x = No. de unidades del primer factor productivo variable

y = No. de unidades del segundo factor productivo variable

a) Encontrar las constantes <u>A</u> y <u>α</u> si:

z = 1500 para x = 10,000; y = 100

z = 2120 para x = 20,000; y = 100

b) Graficar el producto total <u>z</u> para y = 100

c) Encontrar el producto medio y marginal con respecto a x para y = 100 y graficarlos.

d) Verificar que el producto total z es igual a x por el producto marginal con respecto a x mas y por el producto marginal con respecto a y (Teorema de Euler).

4. Para la siguiente función de producción de Cobb-Douglas (lineal y homogénea):

$$z = 100\, x^{1/3}\, y^{2/3}$$

a) Demostrar que el producto total es igual a x por el producto marginal con respecto a x mas y por el producto marginal con respecto a y (Teorema de Euler para la función lineal homogénea).

b) Demostrar que las secciones horizontales de la superficie correspondiente a la gráfica de la función son decrecientes y cóncavas hacia arriba.

Verificar ésto para z = 1000 (constante).

5. Supongamos que la función de producción por un cierto artículo A es la siguiente:

$$z = 100 \sqrt{xy}$$

x = cantidad del factor productivo x empleada

y = cantidad del factor productivo y empleada

z = cantidad producida del artículo A

Si para el nivel de producción z = 1000, los precios de los factores productivos son:

$P_x = 1$ (precio del factor x)

$P_y = 4$ (precio del factor y)

a) Determinar las cantidades de los factores productivos x y y que deberán emplearse para minimizar el costo.

b) Comprobar que la función de producción es lineal homogénea y verificar que cuando el costo es mínimo, el costo marginal es igual al costo medio de los factores productivos.

Ejercicio 27.

Temas: Tasa marginal de sustitución y Elasticidad de sustitución.

1. Comprobar que las siguientes funciones de producción son lineales homogéneas. Calcular la tasa marginal de sustitución y verificar que es una función homogénea de grado cero.

1.1 $z = \sqrt{6xy - 3x^2 - 5y^2}$

1.2 $z = \dfrac{100xy - 10x^2 - 4y^2}{3x + 2y}$

2. Determinar el grado de homogeneidad de las siguientes funciones. Calcular la tasa marginal de sustitución y comprobar que es una función homogénea de grado cero.

2.1 $z = 40\, xy - 6x^2 - 5y^2$

2.2 $z = 100\, x^{1/3}\, y^{2/3}$

2.3 $z = 5x^2\, y^3$

3. Encontrar la tasa marginal de sustitución y la elasticidad de sustitución para las siguientes funciones de producción lineales homogéneas:

3.1 $z = \sqrt{10\, xy - x^2 - y^2}$

3.2 $z = 100\, x^{1/3}\, y^{2/3}$

3.3 $z = 500\, x^{4/5}\, y^{1/5}$

*3.4 $z = \dfrac{20xy - 5x^2 - 2y^2}{x + y}$

4. Si la función de utilidad para dos bienes es $u = \ln (x + 10)^2 (y + 15)^3$. Encontrar la tasa marginal de sustitución y la elasticidad de sustitución entre los bienes x y y para x = 10 ; y = 15.

5. Demostrar que para una función de producción de la forma: $z = A\, x^{\alpha} y^{\beta}$, la elasticidad de sustitución es igual a uno para cualquier valores de x y y.

CAPITULO 8

CALCULO INTEGRAL.

8.1 Integración de funciones de una variable. Hemos definido el diferencial de una función de una variable de la siguiente manera:

Si $y = f(x)$:
$dy = f'(x)\, dx$

El cálculo integral trata con el estudio de reglas y métodos para obtener una función determinada f (x) cuando conocemos su expresión diferencial f'(x) dx. Es decir, integrar es el proceso inverso de diferenciar. De acuerdo con la definición del diferencial de una función de una variable, el problema de integrar una expresión diferencial puede considerarse como la determinación de la anti-derivada de la función que está multiplicada por d x en la expresión diferencial.

A la función obtenida al integrar una expresión diferencial se le llama una integral de la expresión diferencial y al proceso seguido para obtener una integral se le llama integración. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\int f'(x)\, dx = F(x)$$

Se lee: Integral de f' (x) dx igual a F (x).

Consideremos los siguientes ejemplos:

1. $\int 2x\, dx = x^2$ porque $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
2. $\int e^x\, dx = e^x$ porque $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
3. $\int 2x\, dx = x^2 + 15$ porque $\frac{d}{dx}(x^2 + 15) = 2x$

La integral de una expresión diferencial no es única. Comparando los ejemplos 1 y 3 se deduce que la integral de la misma expresión diferencial puede ser igual a funciones que difieran por una constante porque la derivada de una constante es cero. Esto da lugar al siguiente:

Teorema. Si dos funciones difieren por una constante, entonces tienen la misma expresión diferencial.

Demostración: Sean:

$F(x) = f(x) + c$
$G(x) = f(x) + d \qquad c \neq d.$

Entonces:

$dF(x) = F'(x)\,dx = f'(x)\,dx$
$dG(x) = G'(x)\,dx = f'(x)\,dx$

Porque la derivada de una constante es cero

$\therefore dF(x) = dG(x)$

L.C.D.D.

De acuerdo con este teorema, la integral de una expresión diferencial debe ser igual a la función que se obtiene al aplicar el proceso inverso de diferenciación más una constante que por ahora consideraremos como indefinida y por lo tanto a la integral la llamaremos integral indefinida.

Definición. La integral indefinida de una expresión diferencial f' (x) dx es igual a f (x) + c. En símbolos: $\int f'(x)\, dx = f(x) + c$.

Entonces, la integral indefinida es una familia de funciones que difieren por una constante. Gráficamente, la integral indefinida es una familia de curvas paralelas que se obtienen dando diferentes valores a la constante <u>c</u>. Las curvas son paralelas porque para cualquier valor de <u>x</u> en el dominio de las funciones que constituyen la familia, la derivada es la misma y por lo tanto, las curvas tienen la misma pendiente.

<u>Ejemplo</u>. Graficar la familia de curvas correspondientes a la siguiente integral:

$$\int 2x\, dx = x^2 + c$$

Hagamos $y = x^2 + c$ para tabular y graficar:

	x	0	1	2	-1	-2
y	Para c = 0	0	1	4	1	4
	Para c = 2	2	3	6	3	6
	Para c = 4	4	5	8	5	8
	Para c = -2	-2	-1	2	-1	2

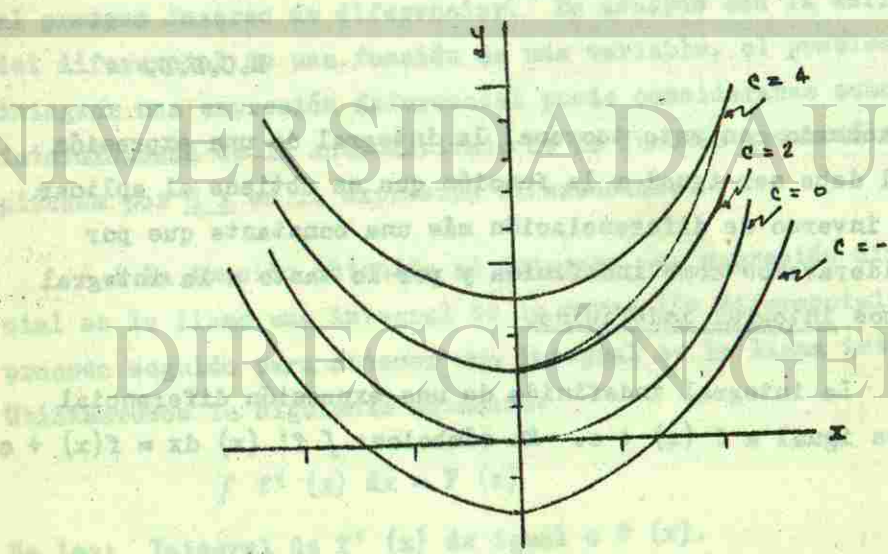


Fig. 8.1

Más adelante se discutirá la posibilidad de determinar la constante de integración al considerar las aplicaciones de la integral indefinida.

<u>8.2 Reglas de integración</u>. De acuerdo con la definición de integral, podemos deducir reglas de integración directa, de las correspondientes reglas de derivación:

<u>Regla 1</u>. La integral de una suma de expresiones diferenciales es igual a la suma de las integrales de las expresiones diferenciales.

$$\int (f'(x) + g'(x)\ )\, dx = \int f'(x)\, dx + \int g'(x)\, dx$$

$$= f(x) + g(x) + c$$

<u>Regla 2</u>. La integral de una constante por una expresión diferencial es igual a la constante por la integral de la expresión diferencial.

$$\int a\, f'(x)\, dx = a \int f'(x)\, dx = af(x) + c$$

<u>Regla 3</u>. La integral de <u>d x</u> es x + c

$$\int dx = x + c$$

<u>Regla 4</u>. La integral de una potencia de una función por el diferencial de la función es igual a uno sobre el exponente más uno multiplicado por la función elevada al exponente más uno, más la constante de integración, excepto cuando el exponente es menos uno:

$$\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1} + c;\ n \neq -1$$

<u>Corolario</u>. En particular cuando $f(x) = x$:

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + c\ ;\ n \neq -1$$

Regla 5. La integral de $[f(x)]^{-1}\ f'(x)\,dx$ es igual al logaritmo natural de f (x), más la constante de integración.

$$\int [f(x)]^{-1}\ f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

Con la ayuda de estas reglas, podemos integrar algunas expresiones algebraicas. Consideremos los siguientes ejemplos:

a) $\int x^6\,dx = \frac{1}{7}x^7 + c$ (por el corolario de la regla 4).

b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{3/2}\ x^{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

(por el corolario de la regla 4)

c) $\int 3x^5\,dx = 3\int x^5\,dx = \frac{3}{6}x^6 + c = \frac{1}{2}x^6 + c$

(por la regla 2 y el corolario de la regla 4)

d) $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx = \frac{1}{2}\ x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}\ x^2 + 4x + c$

(por aplicación sucesiva de las reglas, 1, 2 y 4 y simplificando).

e) $\int (1 - x^{1/2})^3\,dx = \int (1 - 3x^{1/2} + 3x - x^{3/2})\,dx$

$= x - 2x^{3/2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2} + c$

(desarrollando y procediendo después como en el ejemplo 4)

f) $\int (2 + x^2)^{1/2}\ x\,dx = \frac{1}{2}\int (2 + x^2)^{1/2}\ 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} / \frac{3}{2}\ (2 + x^2)^{3/2} + c$

$= \frac{1}{3}\ (2 + x^2)^{3/2} + c$

(Aplicando reglas 2 y 4)

g) $\int \frac{x^3\,dx}{x+1} = \int (x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1})\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x + 1) + c$

(dividiendo primero y aplicando después reglas 4 y 5).

__Integración de funciones exponenciales.__ De las reglas de derivación de funciones exponenciales, se deducen las siguientes reglas de integración. Sean $u = f(x)$; a = constante:

Regla 6. $\int a^u\,du = \int a^{f(x)}\ f'(x)\,dx$

$$= \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

Regla 7. $\int e^u\,du = \int e^{f(x)}\ f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

Ejemplos:

a) $\int 3^{x^2}\ x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}\ 2x\,dx = \frac{1}{2}\ \frac{3^{x^2}}{\ln 3} + c$

(por las reglas 2 y 6).

b) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\ 3dx = \frac{1}{3}\ e^{3x} + c$

(por las reglas 2 y 7)

Las reglas __1__ a __7__ pueden ser demostradas directamente de la definición de integral y de las correspondientes reglas de derivación. Las siguientes 5 reglas se obtienen por medio de artificios matemáticos como cambio de variables y sustitución trigonométrica que no serán discutidos.

Sean: a = constante: $u = f(x)$

Regla 8. $\int \frac{d\,u}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

Regla 9. $\int \frac{d\,u}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c \qquad u^2 < a^2$

Regla 10. $\int \frac{d\,u}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$

Regla 11. $\int \frac{d\,u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)\right| + c;\ u^2 > a^2$

Regla 12. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\; du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} \ln \left|\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right)\right| + c$

Ejemplos.

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ Aplicando la regla 8

con $u = x$; $a = 1$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Aplicando la regla 10

con $u = x$; $a = 1$;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + c$$

Nota. Estas fórmulas de integración y muchas otras pueden encontrarse en los libros de tablas matemáticas bajo el título de Tablas de integrales.

Métodos de integración. Hemos deducido, de la definición de integral y de las reglas de derivación, una serie de fórmulas de integración para encontrar la integral de una expresión diferencial directamente o mediante una transformación, de acuerdo con las propiedades del integral, que permite aplicar una de las fórmulas establecidas.

Consideremos ahora algunos métodos especiales de integración que son de gran importancia en Cálculo Integral.

8.3 Integración por partes. Es un método de integración en el que se considera a la expresión diferencial que se va a

integrar, como un producto de una función de la variable independiente por el diferencial de otra función de la variable independiente.

En símbolos, si el problema es $\int f(x)\, dx$, entonces se supone:

$$f(x)\, dx = u\, d\, v$$

donde u y v son funciones de x.

Ahora, el diferencial del producto $u\, v$ es el siguiente:

$$d(u\,v) = \left[\frac{d}{dx}(u\,v)\right] dx \quad \text{(por definición)}$$

$$d(u\,v) = \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}\right) dx$$

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du$$

Despejando $u\,dv$:

$$u\,dv = d(u\,v) - v\,du$$

Integrando: $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

o sea : $\int f(x)\,dx = u\,v - \int v\,du$

Esto nos proporciona una ecuación conocida como fórmula de integración por partes. La ventaja de este método es que la integración, utilizando el lado derecho depende de las integrales de dv para encontrar v y de $\int v\,du$ para el último término. Estas integrales resultan muy sencillas en muchos casos en los que $\int f(x)\,dx = \int u\,dv$ es difícil o imposible de obtener directamente.

Ejemplos:

1. Encontrar $\int 2x\, e^x\, dx$

consideremos: $u = 2x \quad dv = e^x\, dx$

$\therefore\ du = 2dx \quad v = e^x$

$\therefore \int 2x\, e^x\, dx = 2x\, e^x - \int 2\, e^x\, dx$

$$= 2x\,e^{x} - 2\,e^{x} + c$$

2. $\int x\,(1 + x)^{14}\,d\,x$

Sea: $u = x \quad d\,v = (1 + x)^{14}\,d\,x$

$\therefore\ d\,u = d\,x \quad v = \frac{1}{15}\,(1 + x)^{15}$

$\therefore\ \int x\,(1 + x)^{14}\,dx = \frac{x}{15}\,(1 + x)^{15} - \int \frac{1}{15}\,(1 + x)^{15}\,d\,x$

$\therefore\ \int x\,(1 + x)^{14}\,d\,x = \frac{x}{15}\,(1 + x)^{15} - \frac{1}{240}\,(1 + x)^{16} + c$

De éstos ejemplos se deducen inmediatamente las siguientes reglas prácticas para la integración por partes:

1. $d\,v$ debe ser fácilmente integrable, pero si hay varias posibilidades para escoger $d\,v$ debe escogerse la expresión más complicada, siempre que sea integrable directa.

2. La integración por partes no siempre es un método conveniente. En general $\int v\,d\,u$ puede ser complicado y no debe seguirse adelante cuando éste integral sea más complicado que el integral del problema original.

3. La integración por partes es especialmente útil para integrar expresiones diferenciales que contienen productos incluyendo funciones logarítmicas y exponenciales.

8.4. Integración por fracciones parciales.

Es un método para la integración de fracciones algebraicas racionales, es decir, fracciones en las que numerador y denominador son polinomios racionales, $P(x) = a_0 + a_1\,x + \ldots\ldots + a_n\,x^n$. Consiste en separar la fracción en parte entera (cuando el numerador es de grado mayor que el grado del denominador) y una suma de fracciones con denominadores lineales o cuadráticos. El problema de separar una fracción en una suma de fracciones es el proceso inverso de sumar fracciones, es decir, se trata de

encontrar las llamadas fracciones parciales, tales que al reducirlas a una sola fracción, el resultado sea la fracción original.

Recordemos los principios algebraicos fundamentales para la descomposición de una fracción en fracciones parciales.

1. Cualquier polinomio con coeficientes reales puede ser expresado (por lo menos teóricamente) como un producto de factores lineales de la forma $ax + b$ y factores cuadráticos de la forma $a\,x^2 + b\,x + c$.

2. Si dos funciones polinomiales del mismo grado son iguales para todos los valores que pueda tomar la variable, entonces los coeficientes de las potencias iguales en ambos polinomios son iguales.

En símbolos, si $a_0 + a_1 x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n = b_0 + b_1 x + b_2\,x^2 + \ldots + b_n\,x^n$ para todos los valores de x, entonces $a_i = b_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

El método de descomposición de una fracción en fracciones parciales, apoyando en éstos dos principios fundamentales, distingue cuatro casos que se refieren a la descomposición en factores del denominador de una fracción racional propia.

I. Factores lineales diferentes. A cada factor lineal diferente $a\ x + b$ que aparece una sola vez en la factorización del denominador, corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{a\,x + b}$, donde A es una constante que va a ser determinada.

II. Factores lineales repetidos. A cada factor lineal $a\,x + b$ que aparece m veces en la factorización del denominador, corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{a\,x+b} + \frac{A_2}{(a\,x+b)^2} + \dots\dots + \frac{A_m}{(a\,x+b)^m} \quad \text{donde}$$

$A_1, A_2, \dots, A_m$ son constantes que van a ser determinados.

III. Factores cuadráticos diferentes. A cada factor cuadrático diferente $ax^2 + bx + c$ que aparece una sola vez en la factorización del denominador, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{A\,x + B}{ax^2 + bx + c}\text{, donde } A \text{ y } B \text{ son constantes que van}$$

a ser determinados.

IV. Factores cuadráticos repetidos. A cada factor cuadrático a $x^2 + bx + c$ que aparece m veces en la factorización del denominador, le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1\,x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2\,x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots\dots\dots + \frac{A_m\,x + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Consideremos unos ejemplos para detallar el proceso de descomposición de una fracción en fracciones parciales.

Problema 1. Descomponer en fracciones parciales la fracción:

$$\frac{x+4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

En este problema, el numerador es de grado menor que el denominador, es decir se trata de una fracción propia. Primero descomponemos el denominador en factores:

$$\frac{x+4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x+4}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{x+4}{x\,(x-1)\,(x+2)}$$

Los factores del denominador son todos lineales y diferentes. Entonces corresponde al caso I y suponemos la siguiente

descomposición:

$$\frac{x+4}{x\,(x-1)\,(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Reduciendo el lado derecho a una sola fracción con el mismo denominador del lado izquierdo.

$$= \frac{A\,(x-1)\,(x+2) + B\,(x)\,(x+2) + C\,(x)\,(x-1)}{x\,(x-1)\,(x+2)}$$

$$= \frac{A\,(x^2 + x - 2) + B\,(x^2 + 2x) + C\,(x^2 - x)}{x\,(x-1)\,(x+2)}$$

$$= \frac{A\,x^2 + Ax - 2\,A + B\,x^2 + 2Bx + C\,x^2 - Cx}{x\,(x-1)\,(x+2)}$$

$$\frac{x+4}{x\,(x-1)\,(x+2)} = \frac{x^2\,(A+B+C) + x\,(A+2B-C) - 2A}{x\,(x-1)\,(x+2)}$$

Los numeradores deben ser iguales para todo valor de x puesto que las fracciones deben ser algebraicamente equivalentes.

$$\therefore\ x + 4 = (A + B + C)\,x^2 + (A + 2B - C)\,x - 2\,A$$

Aplicando el segundo principio fundamental, los coeficientes de las potencias iguales en ambos lados son iguales:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 2B - C = 1 \\ -2\,A = 4 \end{cases} \qquad 0x^2 - x + 4$$

de la última ecuación: $A = -2$

Sustituyendo $A = -2$ en las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} -2 + B + \cancel{C} & = 0 \\ -2 + 2B - \cancel{C} & = 1 \\ \hline -4 + 3B & = 1 \\ 3B & = 5 \\ B & = 5/3 \\ C & = 2 - B = 2 - 5/3 = 1/3 \end{array}$$

$$\therefore \frac{x+4}{x^3+x^2-2x} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x+2)}$$

Desde luego siempre es posible comprobar los resultados sumando las fracciones para obtener la expresión original.

Problema 2. Descomponer en fracciones parciales $\frac{8x^2}{(2x-3)^3}$ siguiendo el mismo proceso que en el problema 1, ahora observamos que la factorización del denominador corresponde al caso II. Entonces:

$$\frac{8x^2}{(2x-3)^3} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{(2x-3)^2} + \frac{C}{(2x-3)^3}$$

$$= \frac{A(2x-3)^2 + B(2x-3) + C}{(2x-3)^3}$$

$$= \frac{4Ax^2 - 12Ax + 9A + 2Bx - 3B + C}{(2x-3)^3}$$

Igualando numeradores:

$$8x^2 = 4Ax^2 + (-12A + 2B)x + 9A - 3B + C$$

$$\begin{cases} 4A = 8 \\ -12A + 2B = 0 \\ 9A - 3B + C = 0 \end{cases}$$

$$A = 2$$

$$-24 + 2B = 0 \quad ; B = +12$$

$$18 - 36 + C = 0$$

$$C = 18$$

$$\therefore \frac{8x^2}{(2x-3)^2} = \frac{2}{2x-3} + \frac{12}{(2x-3)^2} + \frac{18}{(2x-3)^3}$$

Problema 3. Descomponer en fracciones parciales la fracción:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

En este caso, el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Entonces, primero hacemos la división para separar la parte entera y el resultado es:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Ahora:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

Igualando numeradores:

$$x = (A+B)x - A + B$$

$$\cancel{A} + B = 1$$

$$-\cancel{A} + B = 0$$

$$2B = 1$$

$$B = 1/2$$

$$A = +B = +\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = x - 1 + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

Aplicación al Cálculo Integral. Cuando una fracción racional no puede integrarse directamente pero puede descomponerse en fracciones parciales, entonces se integra término a término la suma de las fracciones parciales resultantes.

Ejemplo 1.

$$\int \frac{x+4}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$$

Esta integral no puede ser obtenida directamente. En el problema 1 de los ejemplos sobre descomposición en fracciones parciales, obtuvimos:

$$\frac{x+4}{x^3+x^2-2x} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{3\,(x-1)} + \frac{1}{3\,(x+2)}$$

$$\therefore \int \frac{x+4}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{-2\,dx}{x} + \int \frac{5\,dx}{3\,(x-1)} + \int \frac{dx}{3\,(x+2)}$$

$$= -2\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) + \frac{1}{3}\ln(x+2) + C$$

$$= \ln \frac{(x-1)^{5/3}\,(x+2)^{1/3}}{x^2} + C$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{x^3-x+1}{x^2-2x+1}\,dx$$

En este caso se trata de una fracción impropia porque el grado del numerador es mayor que el del denominador. Efectuando la división obtenemos:

$$\frac{x^3-x+1}{x^2-2x+1} = x + 2 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

Ahora, descomponiendo en fracciones parciales la parte fraccionaria:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

$$\therefore 2x-1 = Ax + B - A$$

$$A = 2$$

$$B - A = -1$$

$$B = A - 1 = 2 - 1 = 1$$

Entonces:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{x^3-x+1}{x^2-2x+1} = x + 2 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Ahora, integrando término a término:

$$\int \frac{x^3-x+1}{x^2-2x+1} = \int x\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{2dx}{x-1} + \int (x-1)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C$$

8.5 La constante de integración. Hemos visto que la integral indefinida es una familia de funciones que difieren por una constante. Geométricamente, la integral indefinida es una familia de curvas paralelas determinadas por los diferentes valores de la constante de integración. Entonces, la constante de integración puede ser determinada cuando se conoce el valor de la integral para un valor dado de la variable independiente. En términos geométricos, la constante se determina cuando se tiene un punto por donde pasa la curva de la integral.

Ejemplos:

1. Encontrar $F(x) = \int (4x-5)\,dx$ si el valor del integral para $x = 1$ es $F(x) = 5$.

Solución: $F(x) = \int (4x-5)\,dx = 2x^2 - 5x + C$

Ahora $F(x) = 5$ cuando $x = 1$:

Entonces: $5 = 2 - 5 + C$

$C = 8$

Sustituyendo:

$F(x) = 2x^2 - 5x + 8$

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(0,2)$ y cuya pendiente en cualquier punto es dada por: $e^x - 2x$.

Solución: La pendiente de la curva es igual a la primera derivada de la función con respecto a x. Es decir:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = e^{x} - 2x$$

Despejando d y:

$$d\,y = (e^{x} - 2x)\,dx$$

Integrando:

$$\int dy = \int (e^{x} - 2x)\,dx$$

$$\therefore\; y = e^{x} - x^{2} + C$$

Ahora, la curva pasa por el punto P (0, 2). Entonces y = 2 cuando x = 0. Sustituyendo estos valores para encontrar C:

$$2 = e^{0} - 0 + C$$

$$2 = 1 + C$$

$$\therefore\; C = 1$$

Sustituyendo:

$$y = e^{x} - x^{2} + 1$$

8.- Aplicaciones de la integral indefinida: Las aplicaciones del cálculo integral son comunes en Física. Consideremos una de sus aplicaciones a la cinemática que es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos sin tomar en cuenta las causas que lo producen, ni la naturaleza misma de los cuerpos. Supongamos que se desea obtener las leyes del movimiento de un cuerpo en caída libre. El cuerpo está sujeto a la aceleración de la gravedad que es igual a 9.8 metros por segundo al cuadrado, (redondeada a un decimal).

Ahora, la aceleración mide el cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Entonces, se tiene:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = 9.8$$

o sea: $d\,v = 9.8\,dt.$

Integrando:

$$\int dv = \int 9.8\,dt$$

$$v = 9.8\,t + c_1$$

Ahora, si el cuerpo parte del reposo, entonces la velocidad v = o cuando el tiempo t = o. Sustituyendo estos valores para determinar la constante c_1:

$$0 = 0 + C_1$$

$$\therefore\; C_1 = 0$$

Entonces:

$$v = 9.8\,t$$

Hemos encontrado una relación que nos permite determinar para cualquier valor de t, la velocidad del móvil que parte del reposo y se mueve en caída libre con una aceleración de $g = 9.8\ \frac{\text{Mts.}}{\text{Seg.}^2}$

Ahora, la velocidad mide el cambio del espacio recorrido con respecto al tiempo y se define como la derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo. Entonces:

$$\frac{d\,S}{d\,t} = 9.8\,t$$

o sea: $d\,S = 9.8\,t\,d\,t$

Integrando:

$$\int d\,S = \int 9.8\,t\,d\,t$$

$$S = \frac{9.8}{2}\,t^{2} + C_2$$

$$S = 4.9\,t^{2} + C_2$$

Ahora, puesto que el cuerpo parte del reposo, el espacio recorrido S = 0 cuando t = 0. Sustituyendo estos valores para determinar C_2:

$$0 = 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Entonces:

$$S = 4.9\ t^2$$

Esta relación nos proporciona el espacio recorrido por el móvil para cualquier valor del tiempo <u>t</u>.

<u>Ejemplo</u>: Se deja caer una piedra en un pozo que tiene 44.10 metros de profundidad. Encontrar el tiempo que tarda en llegar al fondo del pozo y la velocidad de la piedra al llegar al fondo, suponiendo que la aceleración de la gravedad es $g = 9.8\ \text{Mts.}/\text{Seg.}^2$

<u>Solución</u>: Hemos encontrado que el espacio recorrido por un móvil en estas condiciones es dado por:

$$S = 4.9\ t^2$$

Entonces, para $S = 44.10$:

$$4.9\ t^2 = 44.10$$

$$t^2 = \frac{44.10}{4.9} = 9$$

$$\therefore\ t = 3 \text{ segundos.}$$

Entonces, la piedra tarda 3 segundos en llegar al fondo.

Abora, la velocidad en cualquier instante es dada por:

$$V = 9.8\ t$$

Sustituyendo $t = 3$ para encontrar la velocidad de llegada al fondo:

$$V = (9.8)\ (3)$$

$$V = 29.4\ \text{Mts.}/\text{Seg.}$$

<u>Aplicación a economía.</u> Si el ingreso total I_t es dado por una función contínua de la cantidad demandada <u>x</u>, podemos encontrar el ingreso marginal y la ley de demanda correspondiente, de la siguiente manera:

$$\text{Sea } I_t = F\ (x):$$

$$\text{Ingreso marginal : } I_{mg} = \frac{d}{d\,x}\ (I_t) = F'\ (x)$$

$$\text{Ley de demanda: } p = \frac{I_t}{x} = \frac{F\ (x)}{x}$$

Ahora, si se tiene el ingreso marginal I_{mg} como una función de la cantidad demandada <u>x</u>, entonces podemos determinar el ingreso total por integración de la siguiente manera:

$$\text{Sea } I_{mg} = f\ (x)$$

$$\text{Ahora } I_{mg} = \frac{d\ I_t}{d\ x}$$

$$\text{Entonces: } d\ I_t = I_{mg}\ dx = f\ (x)\ dx$$

$$\text{Integrando: } I_t = \int f\ (x)\ dx$$

$$I_t = F\ (x) + C$$

Para determinar C, supongamos que el ingreso total es cero, cuando la cantidad demandada es cero: (Condiciones normales).

$$\therefore\ 0 = F\ (0) + C$$

$$C = -\ F\ (0)$$

Sustituyendo:

$$I_t = F\ (x) - F\ (0)$$

<u>Ejemplo</u> : Encontrar el ingreso total y la ley de demanda si el ingreso marginal es dado por: $I_{mg} = 10 - 2x$. Graficar en el mismo sistema de referencia, el ingreso total, el ingreso marginal y la ley de demanda.

<u>Solución</u>: $I_t = \int I_{mg}\ dx = \int\ (10 - 2x)\ dx$

$$I_t = 10\ x - x^2 + C$$

Ahora, $I_t = 0$ cuando $x = 0$. Entonces:

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

Sustituyendo:

$$I_t = 10\ x - x^2$$

Ley de demanda. El precio es igual al ingreso medio, es decir:

$$P = \frac{I_t}{x}$$

Entonces: $$P = \frac{10\,x - x^2}{x}$$

$$P = 10 - x$$

Gráfica: El ingreso marginal y la ley de demanda son funciones lineales de $\underline{x}$. Entonces, para graficarlas es suficiente encontrar sus intersecciones con los ejes:

x	0	5	10
I_{mg}	10	0	—
$I_{md} = P$	10	$\cancel{0}$	0

El ingreso total es una parábola abierta hacia abajo que pasa por el origen y tiene su vértice en el máximo de I_t, es decir cuando el ingreso marginal es cero. Esto ocurre cuando $x = 5$.

Para $x = 5$, $I_t = 10\,(5) - (5)^2 = 50 - 25 = 25$

(figura 8.2).

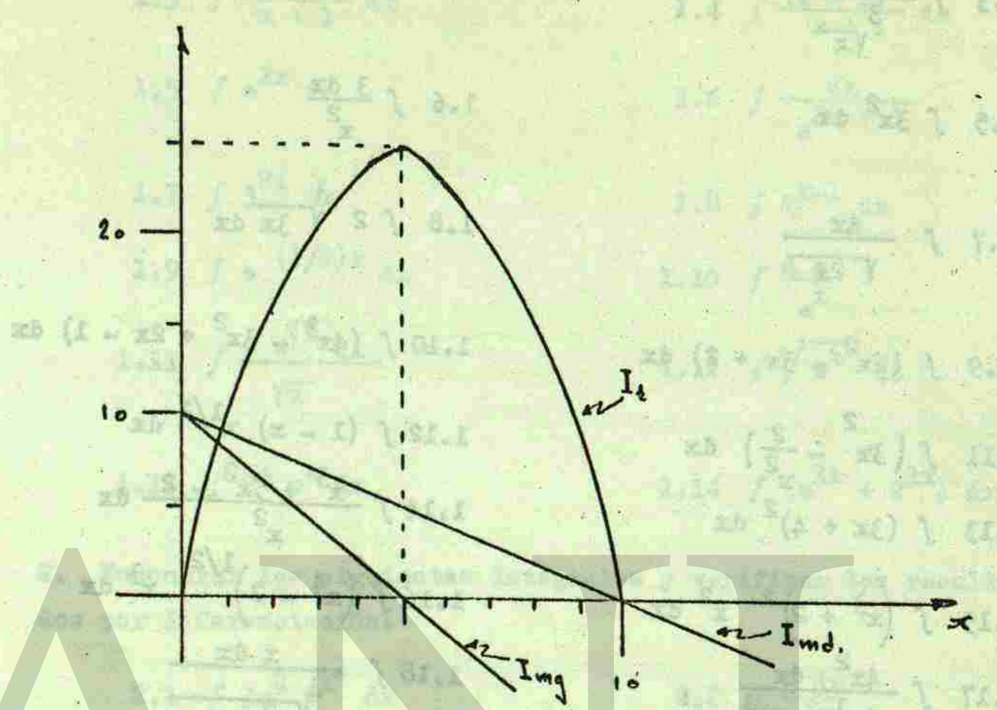


Fig. 8.2

Observación. De la misma manera se puede determinar el costo total y el costo medio cuando se tiene el costo marginal como una función de la cantidad producida. En general, con la ayuda del cálculo se pueden determinar conceptos totales y medios a partir del concepto marginal.

Ejercicio 28.

Tema: Integral indefinida. Aplicación de reglas para integración directa.

1. Determinar las integrales indefinidas siguientes:

1.1 $\int x^3\,dx$ 1.2 $\int \frac{dx}{x^3}$

1.3 $\int \frac{2\,dx}{\sqrt[3]{x}}$ 1.4 $\int x^{3/4}\,dx$

1.5 $\int 3x^2\,dx$ 1.6 $\int \frac{3\,dx}{x^2}$

1.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$ 1.8 $\int 2\sqrt[3]{3x}\,dx$

1.9 $\int (6x^2 - 3x + 2)\,dx$ 1.10 $\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx$

1.11 $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx$ 1.12 $\int (1 - x)\,x^{1/2}\,dx$

1.13 $\int (3x + 4)^2\,dx$ 1.14 $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{x^2}\,dx$

1.15 $\int \left(x^3 + 2\right)^2 x^2\,dx$ 1.16 $\int \left(x^4 - 2\right)^{1/2} x^3\,dx$

1.17 $\int \frac{4x^2\,dx}{(x^3 - 2)^3}$ 1.18 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 2}}$

1.19 $\int 3x\sqrt{1 - 3x^2}\,dx$ 1.20 $\int \left(x^2 + 6x\right)^{1/3} (x + 3)\,dx$

1.21 $\int \left(1 - x^2\right)^{1/3} x\,dx$ 1.22 $\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

1.23 $\int \frac{dx}{x}$ 1.24 $\int \frac{2\,dx}{2x + 5}$

1.25 $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$ 1.26 $\int \frac{2x^2\,dx}{2x^3 + 5}$

1.27 $\int \frac{x + 2}{x + 1}\,dx$ 1.28 $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x}\,dx$

1.29 $\int \frac{(x^2 - 1)^3}{x - 1}\,dx$ 1.30 $\int (x - 1)^5\,dx$

Ejercicio 29.

Tema: Fórmulas para integración directa.

1. Encontrar las integrales siguientes:

1.1 $\int \frac{x\,dx}{2x^2 - 1}$ 1.2 $\int \frac{x^2\,dx}{1 - x^3}$

1.3 $\int \frac{x + 3}{x + 1}\,dx$ 1.4 $\int \frac{(x - 1)^2}{x + 1}\,dx$

1.5 $\int e^{2x}\,dx$ 1.6 $\int \frac{dx}{e^{2x + 1}}$

1.7 $\int 3^{2x}\,dx$ 1.8 $\int 2^{x-1}\,dx$

1.9 $\int e^{(1/2)x}\,dx$ 1.10 $\int \frac{dx}{e^x}$

1.11 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$ 1.12 $\int \sqrt{e^t}\,dt$

1.13 $\int 2^x e^x\,dx$ 1.14 $\int (e^{3x} + 2^{3x})\,dx$

2. **Encontrar los siguientes integrales y verificar los resultados por diferenciación:**

2.1 $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$ 2.2 $\int \frac{2\,dx}{e^{2x}}$

2.3 $\int \frac{e^x\,dx}{e^x - 1}$ 2.4 $\int 2x\,e^{-x^2}\,dx$

2.5 $\int \left(e^{3x}\right)^2 dx$ 2.6 $\int 2x\left(e^{2x^2} - 1\right) dx$ duda.

3. **Determinar las integrales siguientes:**

3.1 $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ 3.2 $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

3.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$ 3.4 $\int \frac{dz}{9z^2 - 1}$

3.5 $\int \frac{dy}{25 - 4y^2}$ 3.6 $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$

3.7 $\int \frac{dx}{4x - x^2}$ 3.8 $\int \frac{2x - 3}{4x^2 - 11}\,dx$

3.9 $\int \frac{(2x + 2)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ * 3.10 $\int \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 6}\,dx$

Ejercicio 30.

Tema: Integración por partes.

1. Encontrar las siguientes integrales por el método de integración por partes:

1.1 $\int x^3 e^{2x}\,dx$ — 1.2 $\int 2x \ln x\,dx$

1.3 $\int x\, 3^x\,dx$ — 1.4 $\int x\, e^{-x}\,dx$

1.5 $\int (x+1)\ln x\,dx$ — 1.6 $\int \ln (x+7)\,dx$

1.7 $\int x^2 e^x\,dx$ — 1.8 $\int 5 \ln x\,dx$

1.9 $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ — 1.10 $\int \dfrac{x^3\,dx}{e^{x^2}}$

2. Determinar las siguientes integrales y verificar los resultados por diferenciación:

2.1 $\int (e^{2x}+x)^2\,dx$ — 2.2 $\int (x+e^x)^2\,dx$

2.3 $\int \dfrac{6x^2\,dx}{\sqrt{15+2x^3}}$ — 2.4 $\int \dfrac{(x+2)\,dx}{x^2+4x+5}$

2.5 $\int \dfrac{e^x\,dx}{e^x+e^{-x}}$ — 2.6 $\int \ln (1+x)\,dx$

2.7 $\int \dfrac{x^3\,dx}{x-1}$ — * 2.8 $\int \dfrac{2x\,dx}{1-x^4}$

2.9 $\int x^3 \sqrt{x^2+1}\,dx$ — 2.10 $\int \dfrac{(\ln x)^2\,dx}{x}$

Ejercicio 31.

Tema: Integración por fracciones parciales

1. Integrar por descomposición en fracciones parciales:

1.1 $\int \dfrac{(2x+1)\,dx}{x^2-1}$ — * 1.2 $\int \dfrac{(x-3)\,dx}{x^3-8}$

1.3 $\int \dfrac{(2x-4)\,dx}{(x+1)(x-3)}$ — 1.4 $\int \dfrac{dx}{x^2-3x+2}$

1.5 $\int \dfrac{(x^2-3x+1)\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$ — 1.6 $\int \dfrac{(x-8)\,dx}{x^3-2x^2}$

1.7 $\int \dfrac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3+3x^2+3x+1}$ — 1.8 $\int \dfrac{3\,dx}{x^2-4}$

1.9 $\int \dfrac{(x-3)\,d\,x}{(x^2-1)^2}$ — 1.10 $\int \dfrac{(2x+6)\,d\,x}{x^4-x^2}$

1.11 $\int \dfrac{(6x-1)\,d\,x}{(x+1)(x^2+5x-6)}$ — 1.12 $\int \dfrac{(x^2-3x+4)\,d\,x}{(x-2)(x^2-4x+4)}$

2. Integrar, descomponiendo en parte entera y fracciones parciales:

2.1 $\int \dfrac{(x^3-3x+2)\,dx}{x^2-6x+9}$ — 2.2 $\int \dfrac{2x^3\,d\,x}{x^2-10x+21}$

2.3 $\int \dfrac{(x^2+x-8)\,d\,x}{x^2+x-12}$ — 2.4 $\int \dfrac{(x^2+5)\,d\,x}{(x+5)^2}$

2.5 $\int \dfrac{(x^3+2x^2-3)\,d\,x}{(x+1)(x-2)^2}$ — 2.6 $\int \dfrac{(x^2-3x+5)\,d\,x}{x^2-4}$

Ejercicio 32.

Tema: Constante de integración. Aplicaciones.

1. Encontrar la función $y = f(x)$ utilizando los datos que se proporcionan:

	$\frac{dy}{dx}$	$\underline{x}$	$\underline{y}$
1.1	$x + 2$	1	5
1.2	$x^2 - 4x + 2$	0	3
1.3	$x^3 - 2x^2 + 4$	3	10
1.4	$e^{2x} + 4$	0	3/2
1.5	$\frac{3}{x + 2} + \frac{1}{x + 1}$	2	ln 4

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto indicado y con pendiente en cualquier punto igual a $\underline{m}$ como se indica: (Graficar los primeros tres).

   2.1 P (0, 2) $m = 1$

   2.2 P (1, 6) $m = -5$

   2.3 P (0, 10) $m = 3x - 2$

   2.4 P (3, 1) $m = x^2 - 4$

3. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en cualquier punto es la siguiente: (Graficar los primeros tres).

   3.1 $m = x$

   3.2 $m = 2$

   3.3 $m = x - 2$

   3.4 $m = x^2 - 2x + 4$

   3.5 $m = e^x + 3$

4. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = 6 - x$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

5. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = \frac{-6}{(x + 2)^2} + 100$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

no * 6. Un automóvil se acelera uniformemente a razón de 5 metros por segundo al cuadrado. Si el automóvil parte del reposo, encontrar la ley del movimiento.

CAPITULO 9

INTEGRAL DEFINIDA.

9.1 Area bajo una curva. El concepto de integral definida está relacionado con el área bajo una curva. Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo de $x = a$ a $x = b$ y consideremos el problema de determinar el área entre la curva de $f(x)$ y el eje de las $\underline{x}$ en el intervalo de $x = a$ a $x = b$, es decir, el área limitada por la curva, el eje de las $\underline{x}$ y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ como se indica en la figura 9.1.

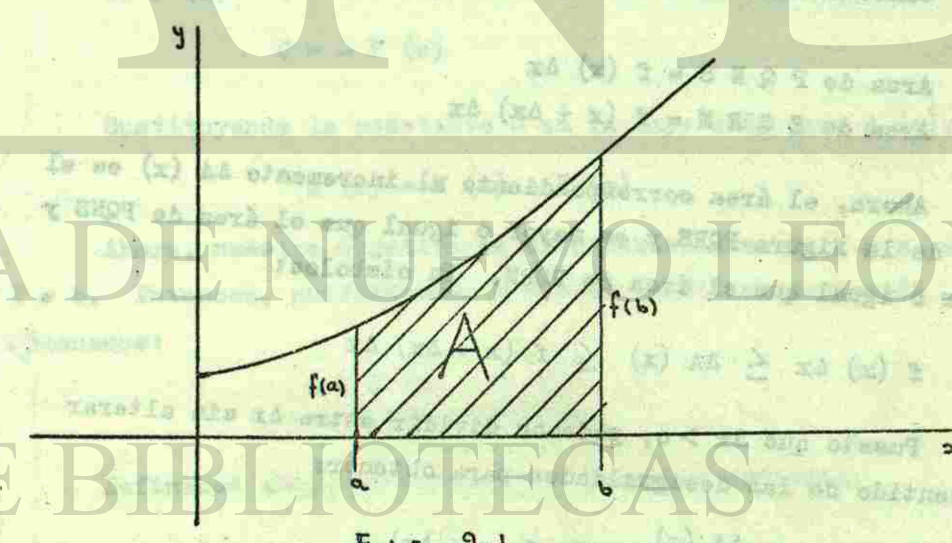


Fig. 9.1

Supongamos que el área en cuestión se mide a partir de la ordenada en $x = a$ y designemos por $A(x)$ el área limitada por la curva, el eje $\underline{x}$, $f(a)$ y la ordenada en el punto de abscisa $\underline{x}$. De acuerdo con ésto, $A(x)$ es una función de $\underline{x}$, es decir, su

	$\frac{dy}{dx}$	$\underline{x}$	$\underline{y}$
1.1	$x + 2$	1	5
1.2	$x^2 - 4x + 2$	0	3
1.3	$x^3 - 2x^2 + 4$	3	10
1.4	$e^{2x} + 4$	0	3/2
1.5	$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$	2	ln 4

2. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto indicado y con pendiente en cualquier punto igual a <u>m</u> como se indica: (Graficar los primeros tres).

2,1 P (0, 2) $m = 1$
2,2 P (1, 6) $m = -5$
2,3 P (0, 10) $m = 3x - 2$
2.4 P (3, 1) $m = x^2 - 4$

3. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en cualquier punto es la siguiente: (Graficar los primeros tres).

3.1 $m = x$
3.2 $m = 2$
3.3 $m = x - 2$
3.4 $m = x^2 - 2x + 4$
3.5 $m = e^x + 3$

4. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = 6 - x$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

5. Si el ingreso marginal es $I_{mg} = \frac{-6}{(x + 2)^2} + 100$, encontrar la función del ingreso total y deducir la función de demanda.

6. Un automóvil se acelera uniformemente a razón de 5 metros por segundo al cuadrado. Si el automóvil parte del reposo, encontrar la ley del movimiento.

CAPITULO 9

<u>INTEGRAL DEFINIDA.</u>

<u>9.1 Area bajo una curva</u>. El concepto de <u>integral definida</u> está relacionado con el área bajo una curva. Supongamos que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo de $x = a$ a $x = b$ y consideremos el problema de determinar el área entre la curva de $f(x)$ y el eje de las <u>x</u> en el intervalo de $x = a$ a $x = b$, es decir, el área limitada por la curva, el eje de las <u>x</u> y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ como se indica en la figura 9.1.

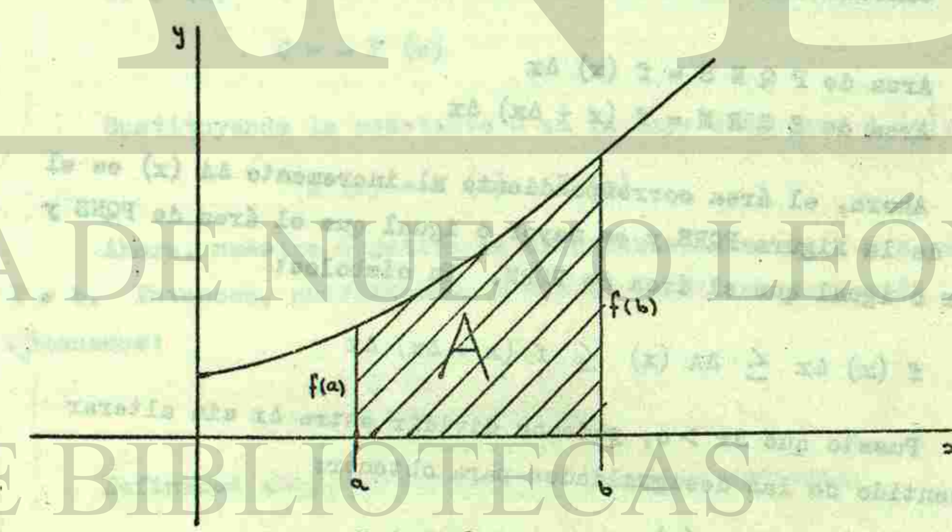
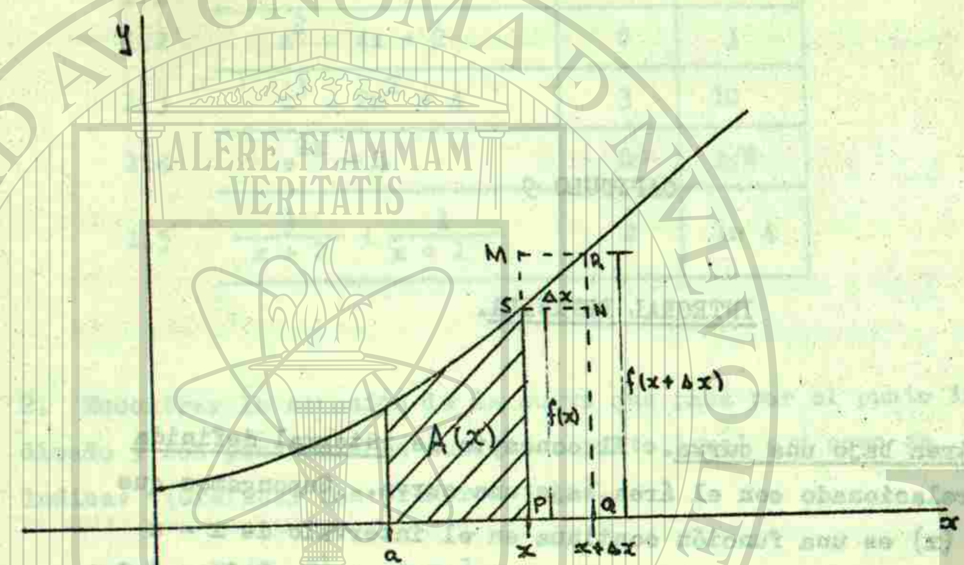


Fig. 9.1

Supongamos que el área en cuestión se mide a partir de la ordenada en $x = a$ y designemos por $A(x)$ el área limitada por la curva, el eje <u>x</u>, $f(a)$ y la ordenada en el punto de abscisa <u>x</u>. De acuerdo con ésto, $A(x)$ es una función de <u>x</u>, es decir, su valor depende del valor de x. Ahora, si aplicamos a $\underline{x}$ un incremento Δx, entonces el área A (x) se incrementa una cantidad ΔA (x) que corresponde al área de la figura P Q R S. (Figura 9.2).



Consideremos los rectángulos P Q N S y P Q R M. Sus áreas son:

Area de P Q N S = f (x) Δx

Area de P Q R M = f (x + Δx) Δx

Ahora, el área correspondiente al incremento ΔA (x) es el área de la figura PQRS y es mayor o igual que el área de PQNS y menor o igual que el área de PQRM. En símbolos:

$$f(x)\,\Delta x \leq \Delta A(x) \leq f(x+\Delta x)\,\Delta x$$

Puesto que $\Delta x > 0$, podemos dividir entre Δx sin alterar el sentido de las desigualdades para obtener:

$$f(x) \leq \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x)$$

Aplicando límites cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$\therefore\ f(x) \leq \frac{d\,A(x)}{d\,x} \leq f(x)$$

Entonces: $\frac{d\,A(x)}{d\,x} = f(x)$

Hemos encontrado que A (x) es una función cuya derivada es f (x) y por lo tanto A (x) es una integral de f (x) d x.

$$A(x) = \int f(x)\,d\,x.$$

De acuerdo con la definición de integral indefinida, hemos encontrado que:

$\int f(x)\,d\,x = F(x) + C$ donde F (x) es la anti-derivada de f (x), es decir: $F'(x) = f(x)$.

Entonces: $A(x) = F(x) + C$

Ahora, cuando $x = a$, el valor de A (x) es cero. Sustituyendo estos valores para encontrar la constante C:

$$A(a) = F(a) + C$$

$$\therefore F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

Sustituyendo la constante C en la expresión para A (x):

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Ahora, nuestro objetivo es calcular el área de $x = a$ a $x = b$. Entonces, sustituyendo $x = b$ en la última expresión obtenemos:

$$\underline{\underline{A = F(b) - F(a)}}$$

Definamos ahora el concepto de integral definida:

9.2 La integral definida. La integral definida de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ de una expresión diferencial es igual a la diferencia del valor de la integral para $x = b$ menos el valor de la integral para $x = a$.

Representaremos a la integral definida por el siguiente símbolo:

Integral definida de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ de $f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\underline{b}$ y $\underline{a}$ reciben el nombre de límites superior e inferior respectivamente de la integral definida.

Observación: Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x) + C)\Big|_a^b$$

$$= F(b) + \cancel{C} - F(a) - \cancel{C}$$

$$= F(b) - F(a)$$

Entonces, la constante de integración desaparece en la integral definida porque los límites $\underline{a}$ y $\underline{b}$ determinan un valor específico para la integral. Por esta razón se le llama integral definida.

Ejemplo 1. Encontrar las integrales definidas siguientes:

$$\int_0^1 4x\,dx$$

Solución: $\int_0^1 4x\,dx = 2x^2 \Big|_0^1$

$$\int_0^1 4x\,dx = 2 - 0 = \underline{\underline{2}}$$

Ejemplo 2.

$$\int_2^4 (x^2 - 3x + 5)\,dx$$

Solución: $\int_2^4 (x^2 - 3x + 5)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x \Big|_2^4$

$$= \frac{1}{3}(4^3) - \frac{3}{2}(4^2) + 5(4) - \frac{1}{3}(2^3) - \frac{3}{2}(2^2) + 5(2)$$

$$= \frac{64}{3} - 24 + 20 - \left(\frac{8}{3} - 6 + 10\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} - 4$$

$$= \frac{56}{3} - 8 = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

Ejemplo 3.

$$\int_0^1 (e^x + 1)\,dx$$

Solución: $\int_0^1 (e^x + 1)\,dx = (e^x + x)\Big|_0^1$

$$= e + 1 - (e^0 + 0)$$

$$= e + 1 - 1$$

$$= \underline{\underline{e}}$$

9.3 La integral definida como una suma. Hemos relacionado la integral definida de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ de una función continua $f(x)$ con el área limitada por la curva de $f(x)$, el eje de las $\underline{x}$ y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$. Veamos ahora como se puede expresar el área mencionada como el límite de una suma de áreas de rectángulos diferenciales, cuando el número de rectángulos tiende a infinito.

Sea $[a, b]$ un intervalo sobre el eje de las $\underline{x}$ con $a < b$ y sea $f(x)$ una función continua en el intervalo.

Def. Una partición P_n del intervalo $[a, b]$ es una secuencia de números $x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots, x_n$ tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots < x_n = b$$

De acuerdo con la definición, una partición P_n divide al intervalo $[a, b]$ en $\underline{n}$ sub-intervalos como indica la figura 9.3:

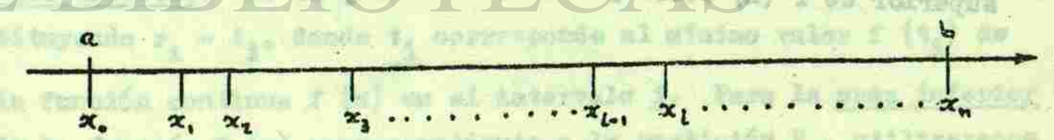


Fig. 9.3

Cada sub-intervalo determina geométricamente un segmento del eje x. El intervalo No. i determina el segmento $x_i - x_{i-1}$. Designemos por r_i, un punto en el segmento $x_i - x_{i-1}$, es decir, r_i es tal que: $x_{i-1} \leqslant r_i \leqslant x_i$. Ahora, consideremos la siguiente suma, llamada <u>suma de Riemann</u>:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i) = (x_1 - x_0)\, f(r_1) + (x_2 - x_1)\, f(r_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(r_n)$$

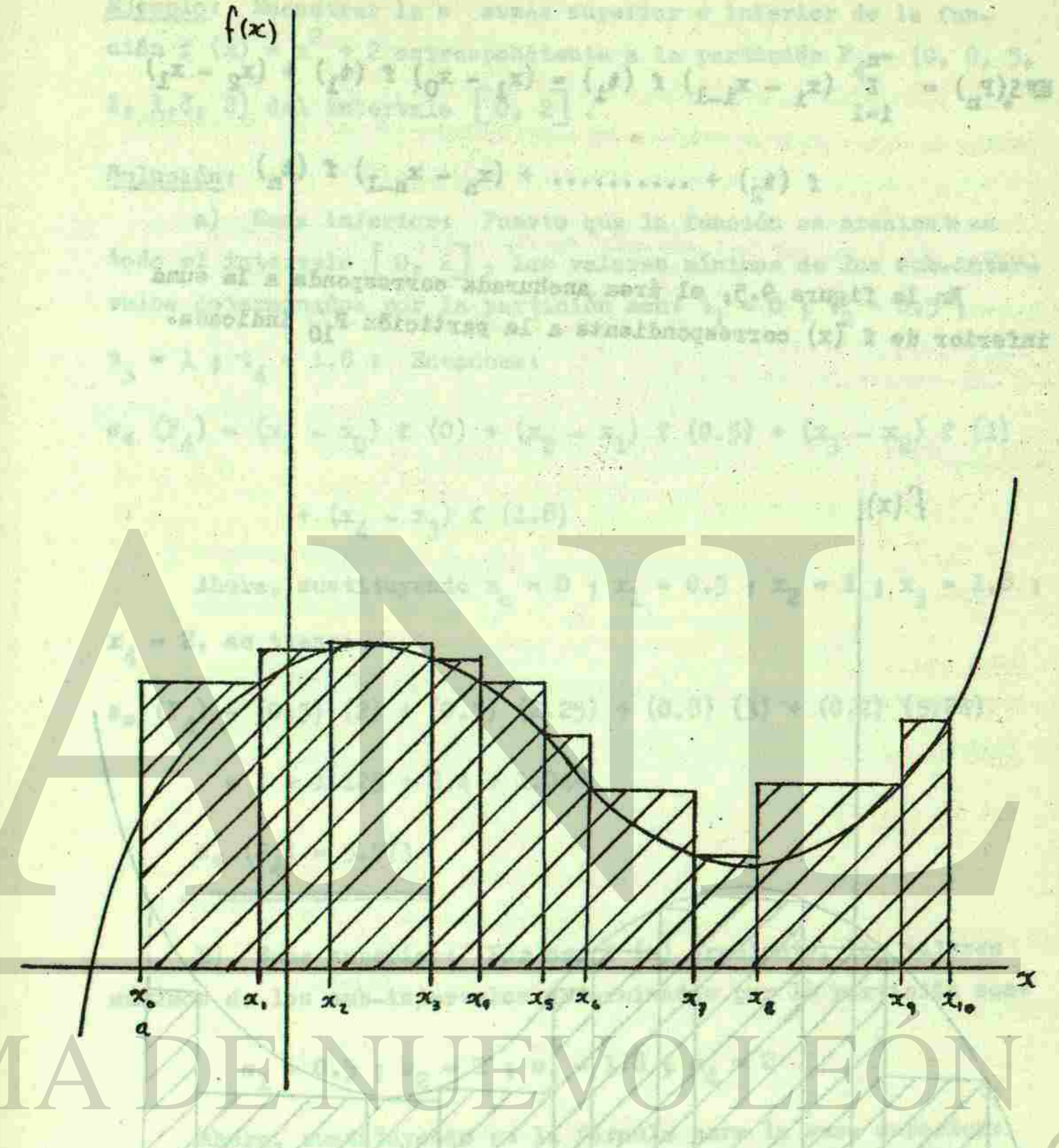
$f(r_i)$ corresponde a la ordenada de la curva de $f(x)$ para $x = r_i$. Entonces, cada sumando corresponde al área de un rectángulo de base $x_i - x_{i-1}$ y altura $f(r_i)$.

<u>Suma superior</u>. En la suma de Riemann que acabamos de definir, hagamos $r_i = s_i$, donde s_i corresponde al máximo valor de la función en el intervalo i, es decir $f(x) \leqslant f(s_i)$ para todo x entre x_{i-1} y x_i.

A la suma obtenida, la llamaremos <u>suma superior de la función f (x) correspondiente a la partición P_n</u>, y será designada por el siguiente símbolo:

$$s^*(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(s_i) = (x_1 - x_0)\, f(s_1) + (x_2 - x_1)\, f(s_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})\, f(s_n)$$

En la figura 9.4, el área anchurada corresponde a la suma superior de $f(x)$ correspondiente a la partición P_{10} indicada.



F i g. 9.4

<u>Suma inferior</u>. Es la que se obtiene de la Suma de Riemann, sustituyendo $r_i = t_i$, donde t_i corresponde al mínimo valor $f(t_i)$ de la función contínua $f(x)$ en el intervalo i. Para la <u>suma inferior de la función f (x) correspondiente a la partición P_n</u>, utilizaremos el siguiente símbolo:

$$s_*(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (x_1 - x_0)\, f(t_1) + (x_2 - x_1)\, f(t_2) + \dots\dots\dots + (x_n - x_{n-1})\, f(t_n)$$

En la figura 9.5, el área anchurada corresponde a la suma inferior de f (x) correspondiente a la partición P_{10} indicada.

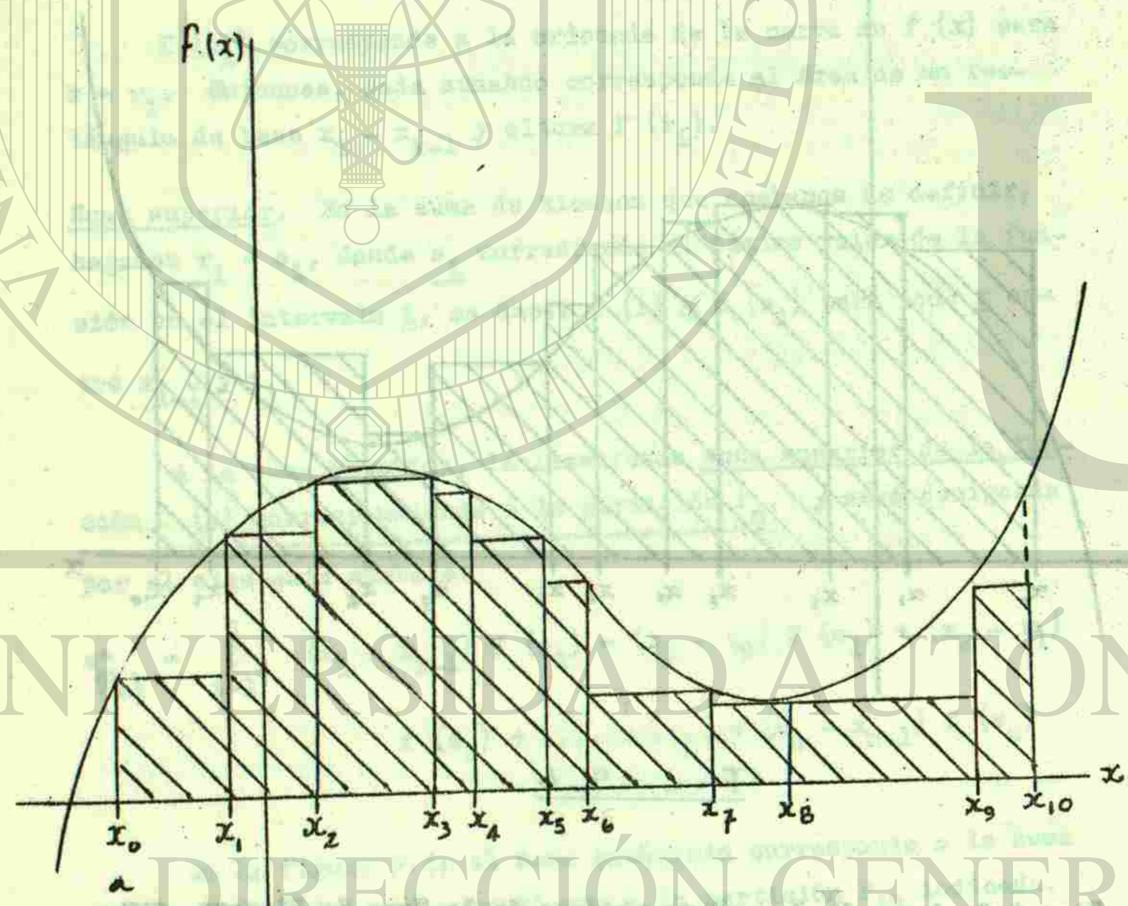


FIG. 9.5

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la s sumas superior e inferior de la función $f(x) = x^2 + 2$ correspondiente a la partición $P_4 = (0, 0, 5, 1, 1.8, 2)$ del intervalo $[0, 2]$.

<u>Solución</u>:

a) Suma inferior: Puesto que la función es creciente en todo el intervalo $[0, 2]$, los valores mínimos de los sub-intervalos determinados por la partición son: $t_1 = 0$; $t_2 = 0.5$; $t_3 = 1$; $t_4 = 1.8$: Entonces:

$$s_*(P_4) = (x_1 - x_0)\, f(0) + (x_2 - x_1)\, f(0.5) + (x_3 - x_2)\, f(1) + (x_4 - x_3)\, f(1.8)$$

Ahora, sustituyendo $x_0 = 0$; $x_1 = 0.5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1.8$; $x_4 = 2$, se tiene:

$$s_*(P_4) = (0.5)(2) + (0.5)(2.25) + (0.8)(3) + (0.2)(5.24)$$

$$= 1 + 1.125 + 2.4 + 1.048$$

$$s_*(P_4) = 5.573$$

b) Suma superior: Por ser f (x) creciente, los valores máximos de los sub-intervalos determinados por la partición son:

$$s_1 = 0.5 \; ; \; s_2 = 1 \; ; \; s_3 = 1.8 \; ; \; s_4 = 2$$

Ahora, sustituyendo en la fórmula para la suma superior:

$$s^*(P_4) = (x_1 - x_0)\, f(0.5) + (x_2 - x_1)\, f(1) + (x_3 - x_2)\, f(s_3) + (x_4 - x_3)\, f(s_4) = (0.5)(2.25) + (0.5)(3) + (0.8)(5.24) + (0.2)(6) = 1.125 + 1.5 + 4.192 + 1.2$$

$$s^*(P_4) = 8.017$$

<u>Relación entre la suma inferior y la suma superior</u>. Comparando las gráficas que ilustran las sumas superior e inferior, se deduce que la suma inferior es menor o igual que la suma superior para una partición dada de una función continua f (x) en un intervalo $[a, b]$. Este resultado es cierto para cualquier partición sobre el intervalo, de acuerdo con el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>. Si f (x) es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y P_n es una partición cualquiera sobre el intervalo, entonces la suma inferior es menor o igual que la suma superior de f (x) correspondiente a P_n.

<u>Demostración</u>: Sean: $P_n = a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots, x_n = b$

$f(t_i)$ = Mínimo valor de f (x) en el sub-intervalo <u>i</u>

$f(s_i)$ = Máximo valor de f (x) en el sub-intervalo <u>i</u>

Entonces, para cualquier sub-intervalo de la partición P_n, se tiene:

$$f(t_i) \leq f(x) \leq f(s_i)$$

$$\therefore f(t_i) \leq f(s_i)$$

Ahora, $x_{i-1} < x_i$, para todo <u>i</u>. Entonces $x_i - x_{i-1} > 0$.

Multiplicando por $(x_i - x_{i-1})$ la desigualdad anterior, se tiene:

$$(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) \leq (x_i - x_{i-1})\, f(s_i)$$

Sumando, desde i = 1 hasta i = n :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(s_i)$$

Ahora los lados izquierdo y derecho de esta desigualdad corresponden a las sumas inferior y superior respectivamente.

Entonces:

$$s_*(P_n) \leq s^*(P_n)$$

L.C.D.D.

<u>Corolario</u>. Si $s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$ es una suma general de Riemann, entonces: $s_*(P_n) \leq s \leq s^*(P_n)$

<u>Observación</u>. La igualdad entre las sumas inferior y superior y la suma general de Riemann, se satisface cuando f (x) = C, es decir, cuando la curva de f (x) es una recta horizontal. En este caso, cualquier suma de Riemann, incluyendo las sumas inferior y superior, son iguales al área anchurada que se indica en la figura 9.6.

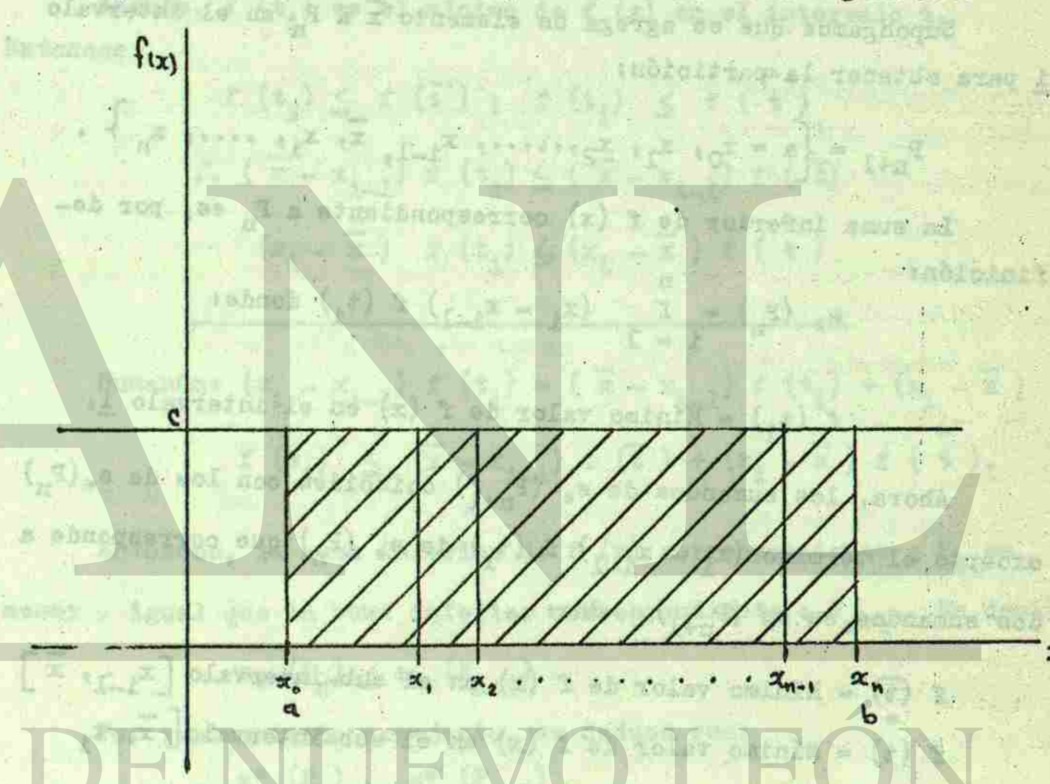


Fig. 9.6

Si f (x) es la función constante f (x) = C, entonces la gráfica de f (x) es una recta paralela al eje <u>x</u> y el área entre la curva y el eje <u>x</u> en un intervalo $[a, b]$, es igual a cualquier suma de Riemann. Es decir:

$$A = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$$

Relación entre la suma de Riemann y la integral definida. Consideremos ahora una función continua $f(x)$ cuya gráfica es cualquier curva. Sea P_n una partición cualquiera de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Si aumentamos un elemento a la partición P_n, entonces la suma inferior aumenta o sigue igual y la suma superior disminuye o sigue igual por la siguiente razón:

$$\text{Sea } P_n = \left\{ a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots\ldots x_n \right\}.$$

Supongamos que se agrega un elemento $\overline{x}$ a P_n en el intervalo $\underline{i}$ para obtener la partición:

$$P_{n+1} = \left\{ a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{i-1}, \overline{x}, x_i, \ldots, x_n \right\}.$$

La suma inferior de $f(x)$ correspondiente a P_n es, por definición:

$$s_*(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i) \text{ donde:}$$

$$f(t_i) = \text{Mínimo valor de } f(x) \text{ en el intervalo } \underline{i}.$$

Ahora, los sumandos de $s_*(P_{n+1})$ coinciden con los de $s_*(P_n)$ excepto el término $(x_i - x_{i-1})\, f(t_i)$ de $s_*(P_n)$ que corresponde a dos sumandos en $s_*(P_{n+1})$. Sea:

$f(\overline{t})$ = Mínimo valor de $f(x)$ en el sub-intervalo $[x_{i-1}, \overline{x}]$

$f(\overline{\overline{t}})$ = Mínimo valor de $f(x)$ en el sub-intervalo $[\overline{x}, x_i]$

Puesto que $f(t_i)$ es el mínimo valor de $f(x)$ en el intervalo $\underline{i}$, entonces:

$$f(t_i) \leq f(\overline{t})\ ;\ f(t_i) \leq f(\overline{\overline{t}})$$

Ahora:

$$(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (\overline{x} - x_{i-1})\, f(t_i) + (x_i - \overline{x})\, f(t_i)$$

Entonces, el término de $s_*(P_{n+1})$ correspondiente al intervalo $\underline{i}$ es igual a la siguiente suma:

$$(\overline{x} - x_{i-1})\, f(\overline{t}) + (x_i - \overline{x})\, f(\overline{\overline{t}})$$

Ahora, el término $\underline{i}$ de $s_*(P_n)$ puede descomponerse de la siguiente manera:

$$(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (\overline{x} - x_{i-1})\, f(t_i) + (x_i - \overline{x})\, f(t_i)$$

Además, $f(t_i)$ es el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $\underline{i}$. Entonces:

$$f(t_i) \leq f(\overline{t})\ ;\ f(t_i) \leq f(\overline{\overline{t}})$$

$$\therefore (\overline{x} - x_{i-1})\, f(t_i) \leq (\overline{x} - x_{i-1})\, f(\overline{t})$$

$$(x_i - \overline{x})\, f(t_i) \leq (x_i - \overline{x})\, f(\overline{\overline{t}})$$

Sumando: $(x_i - x_{i-1})\, f(t_i) = (\overline{x} - x_{i-1})\, f(t_i) + (x_i - \overline{x})\, f(t_i) \leq (\overline{x} - x_{i-1})\, f(\overline{t}) + (x_i - \overline{x})\, f(\overline{\overline{t}})$.

Entonces, la suma inferior de $f(x)$ correspondiente a P_n es menor o igual que la suma inferior correspondiente a P_{n+1}. Es decir:

$$s_*(P_n) \leq s_*(P_{n+1})$$

Por razonamiento semejante, se deduce que:

$$s^*(P_n) \geq s^*(P_{n+1})$$

Repitiendo el proceso que acabamos de describir, cada vez que aumentemos un elemento a la partición, la suma inferior tiende a aumentar y la suma superior tiende a disminuir. Si el número de elementos de la partición se aumenta tendiendo a infinito, entonces las sumas superior e inferior y en general, cualquier suma de Riemann, tienden al mismo valor, que es precisamente la integral definida de $\underline{a}$ a $\underline{b}$ de $f(x)\, d\, x$. Este resultado es el teorema fundamental del cálculo integral que será establecido sin demostración.

Teorema. La integral definida de a a b de una función continua $f(x)$, es igual al límite de cualquier suma de Riemann correspondiente a una partición P_n cuando el número de elementos de la partición tiende a infinito. En símbolos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$$

La expresión de la integral definida como una suma es de fundamental importancia para facilitar el entendimiento de las aplicaciones del cálculo integral como se verá enseguida.

9.4 Propiedades de la integral definida. Supongamos que $f(x)$ es una función contínua en el intervalo $[a, b]$ con $a < b$. Sea $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Entonces, por definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Las propiedades fundamentales de la integral definida son las siguientes:

Propiedad 1. Si los 2 límites del intervalo son iguales, entonces el valor de la integral definida es cero.

Dem. $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

L.C.D.D.

Propiedad 2. Si se intercambian los límites de la integral definida, su valor cambia de signo.

Dem.
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a)\\ &= -(F(a) - F(b))\\ &= -\int_b^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

L.C.D.D.

Propiedad 3. Si c es tal que $a < c < b$, entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dem.
$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= F(\cancel{c}) - F(a) + F(b) - F(\cancel{c}) = F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

L.C.D.D.

9.5 Area entre el eje x y la curva de $f(x)$. Para relacionar la integral definida con el área entre el eje x y la curva de $f(x)$, hemos considerado que $f(x)$ es una función contínua que toma valores positivos para todo x en el intervalo $[a, b]$. Cuando este es el caso, resultó que el área limitada por la curva y el eje x en el intervalo $[a, b]$ es igual a la integral definida de a a b de $f(x)$.

Supongamos ahora que $f(x)$ es una función contínua en el intervalo $[a, b]$ que toma valores negativos para todo x en el intervalo, es decir, la curva de $f(x)$ está bajo el eje de las x en el intervalo considerado. En este caso, la integral definida de a a b de $f(x)$ es negativa porque cada uno de los términos de la suma de Riemann tiene la forma $(x_i - x_{i-1})\, f(r_i)$, donde $(x_i - x_{i-1})$ siempre es positivo mientras que $f(r_i)$ es negativo para todo r_i en el intervalo $[a, b]$.

Entonces, la integral definida de a a b es igual al área entre el eje x y la curva de $f(x)$, cuando la curva está sobre el eje x en el intervalo. Si la curva de $f(x)$ está bajo el eje x en el intervalo, entonces la integral definida es igual a menos el área entre la curva y el eje x. De acuerdo con ésto, para determinar el área entre la curva de $f(x)$ y el eje x, cuando la curva corta el eje x en el intervalo $[a, b]$, es necesario determinar los valores de x para los cuales la curva corta el eje x y dividir el intervalo en sub-intervalos que contengan como límites, los puntos donde la curva corta el eje x, es decir, los puntos donde f (x) = 0. La figura 9.6 ilustra las áreas que resultan positivas y negativas de la integral definida.

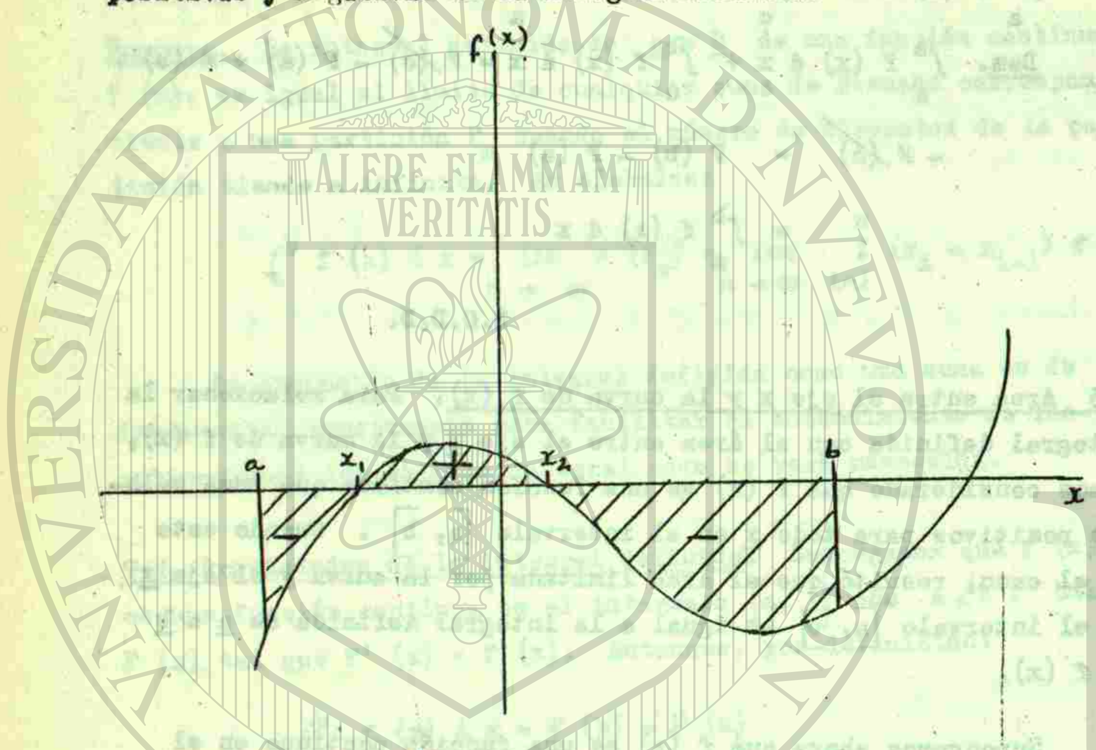


FIG. 9.7

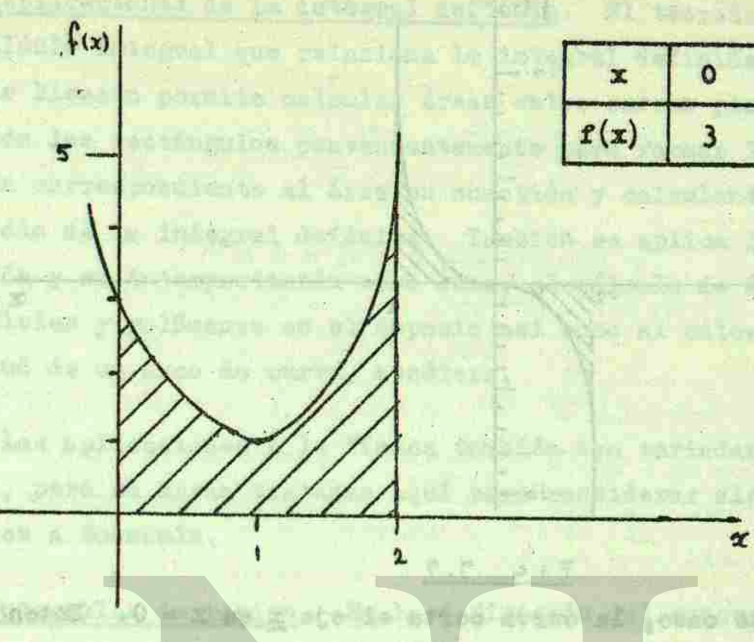
De acuerdo con esta figura, para calcular el área entre la curva y el eje x en el intervalo $[a, b]$, descomponemos el intervalo en los sub-intervalos: $[a_1, x_1]$; $[x_1, x_2]$; $[x_2, b]$.

Entonces, el área anchurada es igual a:

$$A = -\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$

Ejemplo 1. Encontrar el área entre el eje x y la curva de $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución. Grafiquemos la curva de f (x) en el intervalo de $x = 0$ a $x = 2$.



x	0	1	2
f(x)	3	1	5

FIG. 9.8

La curva está totalmente sobre el eje x. Entonces el área buscada será:

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4}(16) - \frac{3}{2}(4) + 3(2) - 0$$

$$= 4 - \cancel{6} + \cancel{6} = \underline{\underline{4}}$$

Ejemplo 2. Encontrar el área entre el eje x y la curva de $f(x) = x^3$ en el intervalo de $x = -2$ a $x = 2$.

Solución. Tabulemos f (x) en el intervalo para graficar la curva:

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	-8	-1	0	1	8

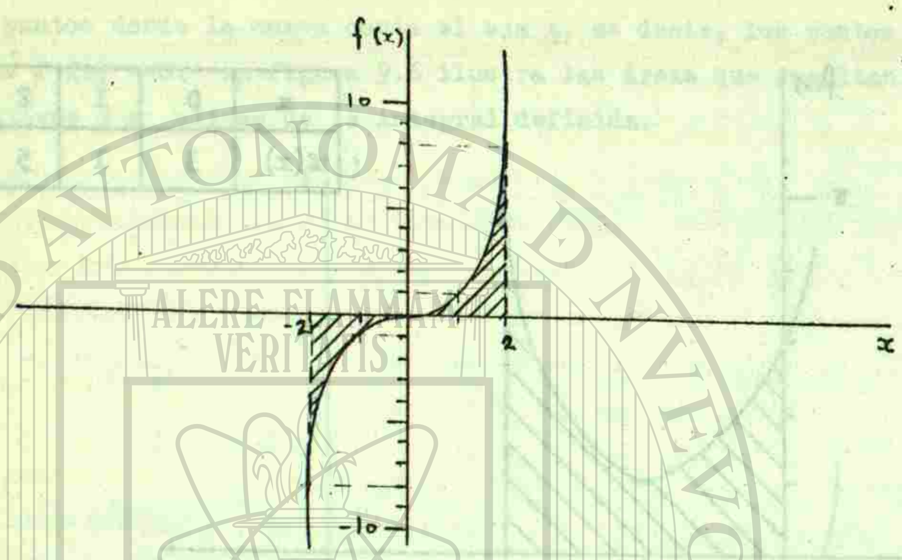


Fig. 9.9

En este caso, la curva corta el eje x en x = 0. Entonces calculamos las áreas bajo y sobre el eje x por separado:

Area bajo el eje x = $A_1 = -\int_{-2}^{0} x^3\, d\,x$

$$A_1 = -\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-2}^{0}$$

$$A_1 = -\frac{1}{4}(0) - (-\frac{1}{4})(16)$$

$$A_1 = 4$$

Ahora:

Area sobre el eje x = $A_2 = \int_{0}^{2} x^3\, d\,x$

$$= \frac{1}{4}x^4 \Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}(16) - \frac{1}{4}(0)$$

$$\therefore A_2 = 4$$

Entonces, el área buscada es: $A = A_1 + A_2$

$$= 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

Otras aplicaciones de la integral definida. El teorema fundamental del cálculo integral que relaciona la integral definida con una suma de Riemann permite calcular áreas entre curvas planas, seleccionando los rectángulos convenientemente para formar la suma de Riemann correspondiente al área en cuestión y calculando su valor por medio de la integral definida. También se aplica la integral definida y su interpretación como suma, al cálculo de áreas de superficies y volúmenes en el espacio así como al cálculo de la longitud de un arco de curva, etcétera.

Las aplicaciones a la Física también son variadas e interesantes, pero no serán tratadas aquí para considerar algunas aplicaciones a Economía.

9.6 Integrales impropios. En la definición del concepto de integral definida de a a b de f (x), hemos exigido que f (x) sea una función contínua en el intervalo [a, b] y que el intervalo sea finito. Si alguna de estas condiciones no se cumple, entonces la integral recibe el nombre de integral impropia. Con la ayuda de límites, las integrales impropias se definen en algunos casos de manera que puedan ser interpretadas como integrales definidas. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Función discontínua en un número finito de puntos del intervalo [a, b]. Supongamos que f (x) es discontínua para x = a porque f (a) = ∞. En este caso se define la integral impropia como el límite de la integral definida de s a b de f (x) cuando s tiende a a, siempre y cuando el límite exista. En símbolos:

$$\text{Si } f(a) = \infty \;;\; \int_a^b f(x)\, d\,x = \lim_{s \to a} \int_s^b f(x)\, d\,x$$

Si el límite indicado no existe, entonces la expresión no tiene sentido.

Ejemplo. Encontrar $\int_1^5 \frac{d\,x}{\sqrt{x-1}}$. En este caso, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ y $f(1) = \frac{1}{0} = \infty$. Entonces:

$$\int_1^5 \frac{d\,x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{s\to 1} \int_s^5 (x-1)^{-1/2}\, d\,x$$

$$= \lim_{s\to 1} \left[2\,(x-1)^{1/2}\right]_s^5$$

$$= \lim_{s\to 1} \left[2\,(2) - 2\,(s-1)^{1/2}\right]$$

$$= 4$$

La gráfica de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ aparece en la figura 9.10 y la integral impropia calculada corresponde al área anchurada:

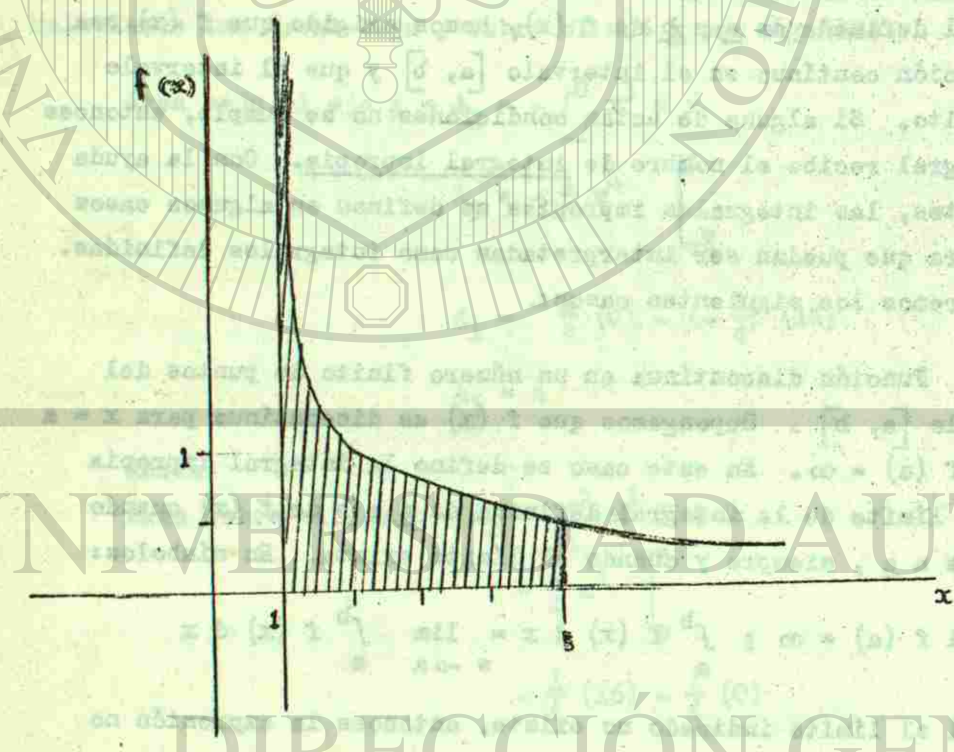


Fig. 9.10

Ahora, si $f(x)$ es discontínua en $x = b$ con $f(b) = \infty$, la integral impropia se define de manera semejante:

Si $f(b) = \infty$; $\int_a^b f(x)\, d\,x = \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)\, d\,x$ cuando el límite exista.

Si la función es infinita en un número finito de puntos en el intervalo $[a, b]$, es decir, si $f(c_i) = \infty$ para $i = 1, 2, \ldots\ldots n$, donde $a \leq c_1 \leq c_2 < \ldots\ldots c_n \leq b$, entonces la integral impropia de <u>a</u> a <u>b</u> es igual a la suma de las siguientes integrales impropias cuando todas estas existan:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^{c_1} f(x)\,d\,x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,d\,x + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)\,d\,x.$$

<u>Caso 2</u>. Intervalo de integración infinito. Si uno de los extremos del intervalo de integración es infinito, digamos $b = \infty$, entonces la integral impropia se define de la siguiente manera cuando el límite exista:

$$\int_a^\infty f(x)\,d\,x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,d\,x$$

Cuando el límite existe, la integral impropia se llama <u>convergente</u> por su relación con las series convergentes que estudiaremos en el próximo capítulo. Si el límite no existe, entonces se dice que la integral no existe y se le llama divergente.

De la misma manera se definen los siguientes integrales impropios cuando los límites indicados existan:

1. $\int_{-\infty}^b f(x)\,d\,x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,d\,x$

2. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,d\,x = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)\,d\,x$

<u>Ejemplo 1</u>. Encontrar $\int_1^\infty \frac{d\,x}{x^3}$

<u>Solución</u>: $\int_1^\infty \frac{d\,x}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3}\,d\,x$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2}\,x^{-2}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Entonces, la integral es convergente. La figura 9.11 ilustra el área correspondiente a esta integral impropia:

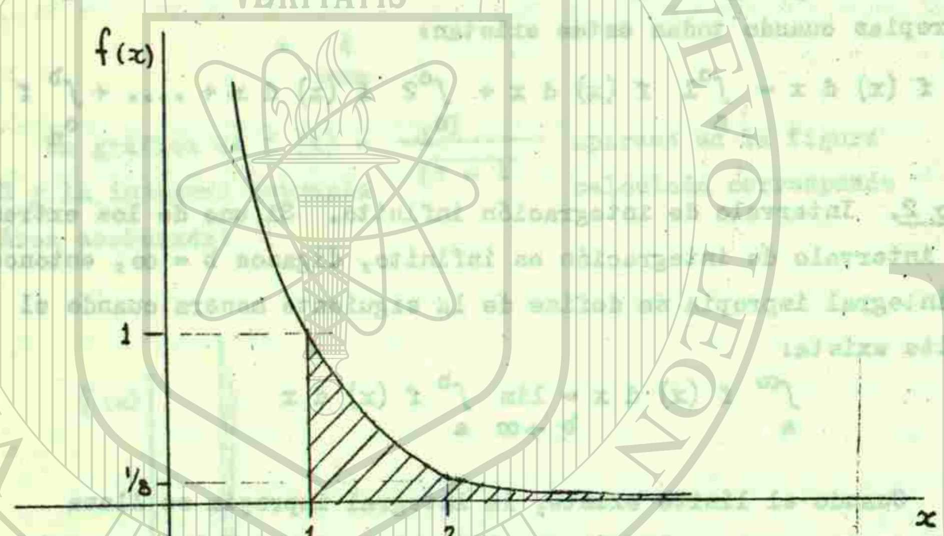


Fig. 9.11

9.7 Relación entre el ingreso marginal y el ingreso medio. El ingreso total I_t es, por definición, el producto del ingreso medio I_{md}, por la cantidad demandada x. Entonces, el ingreso total puede determinarse de la gráfica del ingreso medio, por el área del rectángulo que se forma con la abscisa correspondiente al nivel de demanda considerado y la ordenada correspondiente en la gráfica del ingreso medio, que es la curva de demanda. Ahora, en el capítulo anterior vimos que el ingreso total era igual a la integral del ingreso marginal cuando este es una función contínua de la cantidad demandada. Entonces, el ingreso total para un nivel de demanda dado x_o es igual a la integral definida de cero a x_o del ingreso marginal, o sea el área entre la curva de I_{mg} y el eje x de $x = 0$ a $x = x_o$.

Utilizando estos resultados, y graficando en el mismo sistema de referencia, el ingreso medio y el ingreso marginal, se obtiene una relación geométrica entre los ingresos medio y marginal. De la misma manera pueden relacionarse los diferentes pares de conceptos medio y marginal que se utilizan en teoría económica, como el costo medio y el costo marginal que se relacionan a través del costo total.

Ejemplo. Supongamos que la ley de demanda para un cierto artículo en determinado mercado es dada por: $P = \frac{600}{x + 10} - 10$. Graficar las curvas de los ingresos medio y marginal en el mismo sistema de referencia y determinar el ingreso total gráficamente de las curvas de los ingresos medios y marginal, para $x = 10$.

Solución. El ingreso medio es igual al precio P. Entonces:

$$I_{md} = \frac{600}{x + 10} - 10.$$

Ahora: $I_t = \frac{600\,x}{x + 10} - 10\,x$

Derivando I_t con respecto a x para encontrar el ingreso marginal I_{mg}.

$$I_{mg} = \frac{6000}{(x + 10)^2} - 10$$

Ahora, tabulando los ingresos medio y marginal para diferentes valores de la cantidad demandada, se obtiene la figura 9.12.

x	0	5	10	50
I_{md}	50	30	20	0
I_{mg}	50	16.67	5	-

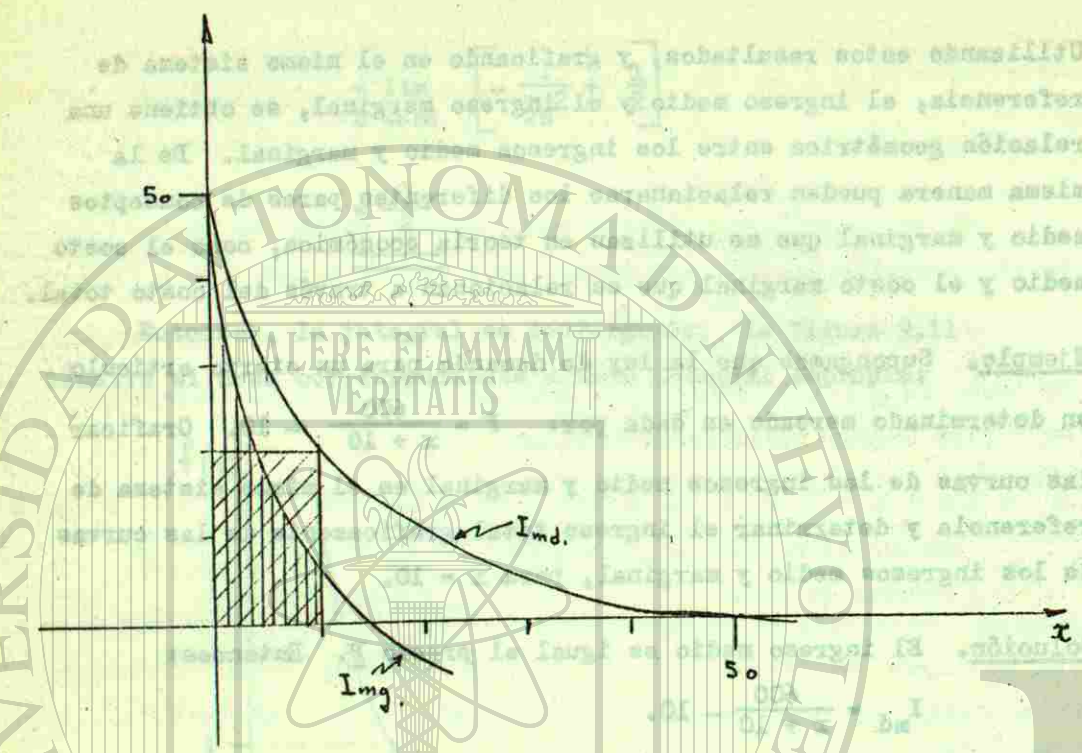


Fig. 9.12

Entonces, el ingreso total cuando la cantidad demandada $x = 10$ es igual a:

a) el área del rectángulo anchurado a 45^o obtenida de la curva del ingreso medio $= 10 \times 20 = 200$

b) el área entre la curva del ingreso marginal y el eje $\underline{x}$ de $x = 0$ a $x = 10$, anchurada verticalmente en la figura.

$$= \int_0^{10} I_{mg}\, dx = \int_0^{10} \left(\frac{6000}{(x+10)^2} - 10\right) dx = 200$$

__9.8 Leyes de crecimiento.__ Las leyes de crecimiento pueden ser empíricas, cuando se basan en datos estadísticos, o matemáticas, cuando se deducen de condiciones matemáticas específicas. Las leyes empíricas serán estudiadas en estadística y ahora discutiremos leyes matemáticas importantes en economía. Para ilustrar los diferentes casos, las leyes de crecimiento serán referidas al capital, pero conclusiones semejantes se obtienen al considerar crecimiento de otras variables económicas.

__Caso 1.__ Interés simple. Supongamos que un capital $\underline{C}$ aumenta una cantidad constante cada año, es decir, produce un interés simple anual de $\underline{r}$ porciento. Si el capital inicial es C_o y el aumento fijo anual es $r\,C_o$, entonces:

Capital de 1 año $= C_o + r\,C_o$ capital después de 2 años $= C_o + 2rC_o$

Si llamamos $\underline{t}$ al tiempo transcurrido, entonces Capital después de $\underline{t}$ años $= C_t = C_o + t\,r\,C_o$.

Entonces la ley de crecimiento de un capital a interés simple anual es una progresión aritmética cuya diferencia común es $r\,C_o$:

__Caso 2.__ Interés compuesto anualmente. Supongamos que un capital produce un interés de $\underline{r}$ porciento compuesto anualmente, es decir, el interés obtenido al final de un año se acumula al capital de manera que al año siguiente el interés se aplica sobre el capital acumulado. En este caso, a diferencia del anterior, el capital aumenta cada año una cantidad variable que depende del tamaño del capital acumulado. Llamaremos al interés compuesto anualmente $\underline{r}$ la __tasa efectiva de interés.__ Si el capital inicial es C_o se tiene la siguiente sucesión de capitales acumulados:

Capital inicial $= C_o$

Capital después de un año $= C_1 = C_o + r\,C_o$

$= C_o\,(1 + r)$

Capital después de 2 años $= C_o\,(1 + r) + r\,C_o\,(1 + r)$

$= C_o\,(1 + r)^2$

Si le llamamos t al tiempo transcurrido, intuitivamente se deduce que:

Capital después de $\underline{t}$ años $= C_t = C_o\,(1 + r)^t$

Puesto que $\underline{t}$ toma valores enteros, se tiene una fórmula que se demuestra en álgebra por el primer principio de inducción matemática.

Entonces, la ley de crecimiento $C_t = C_o\,(1 + r)^t$ correspondiente a una tasa efectiva $\underline{r}$, (interés compuesto) es una progresión geométrica cuya razón es $(1 + r)$.

Ejemplo. Un capital de $ 9,600 produce un interés compuesto anual de 8%, dentro de cuántos años se triplicará el capital?

Respuesta. Se tienen los siguientes datos:

Capital inicial : $C_o = 9,600$

tasa efectiva de interés : $r = .08$

la pregunta es: cuándo será $C_t = 3\,C_o$?

$$C_t = C_o\,(1 + r)^t$$

$$C_o = 9,600 \quad ; \quad \therefore C_t = 28,800$$

$$28,8\cancel{00} = 9,6\cancel{00}\,(1.08)^t$$

$$(1.08)^t = 3$$

Aplicando logaritmos:

$$t \log\ 1.08 = \log 3$$

$$\therefore t = \frac{\log 3}{\log.\ 1.08} \approx \frac{0.4771}{0.0334} \approx \frac{4771}{334} \approx 14$$

Aproximadamente dentro de 14 años se triplicará el capital.

Caso 3. Interés compuesto $\underline{n}$ veces por año. Supongamos que se desea aplicar una tasa efectiva $\underline{r}$ a determinado capital C_o, pero aplicando el interés y acumulando $\underline{n}$ veces durante el año. Si dividimos la tasa efectiva $\underline{r}$ entre $\underline{n}$, obtenemos una tasa de interés que al aplicarla $\underline{n}$ veces durante el año nos dará un capital mayor que si aplicamos la tasa efectiva $\underline{r}$ una sola vez al final del año. Esto puede demostrarse comparando los capitales acumulados al final de un año en los dos casos:

a) Capital acumulado al final del año, aplicando la tasa efectiva $\underline{r}$ una sola vez:

$$C_t = C_o\,(1 + r) \quad (1)$$

b) Capital acumulado al final del año, aplicando una tasa de $\frac{r}{n}$,

en $\underline{n}$ períodos iguales de tiempo durante el año:

$$C_t = C_o\,(1 + \frac{r}{n})^n \quad (2)$$

Ahora, lo que se asegura es que el resultado (2) es mayor que el (1). En símbolos:

$$C_o\,(1 + r/n)^n > C_o\,(1 + r)$$

Dividiendo entre C_o, no se altera el sentido de la desigualdad porque $C_o > 0$:

$$\therefore (1 + \frac{r}{n})^n > 1 + r$$

Desarrollando por la ley del binomio el lado izquierdo de la desigualdad:

$$1 + n\,(\frac{r}{n}) + \frac{n\,(n-1)}{2\,!}\left(\frac{r}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{r}{n}\right)^n > 1 + r$$

$$\therefore \cancel{1 + r} + (\text{suma de términos positivos}) > \cancel{1 + r}$$

$$\therefore \text{Suma de términos positivos} > 0$$

L.C.D.D.

Entonces, para que el capital acumulado aplicando el interés $\underline{n}$ veces durante el año, sea igual al capital acumulado aplicando la tasa de interés compuesto $\underline{r}$ al final del año, es necesario definir la tasa nominal de interés $\underline{s}$ de manera que:

$$1 + r = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n$$

Ahora, despejando s:

$$s = n\ \left[(1 + r)^{1/n} - 1\right]$$

Por ejemplo, si se desea aplicar una tasa efectiva $r = 21\%$ a determinado capital C_o, acumulando intereses 2 veces por año, entonces la tasa nominal será:

$$s = 2\ \left[(1 + .21)^{1/2} - 1\right]$$

$$= 2\ (1.1 - 1) = 0.20 = \underline{20\%}$$

Es decir deberá aplicarse una tasa del 10% 2 veces por año. Si C_o = \$10,000, el capital acumulado al final de 4 años será:

a) aplicando la tasa efectiva $r = 21\%$ al final de cada año:

$$C_t = C_o (1 + r)^t$$

Sustituyendo: $C_o = \$10,000$; $r = 0.21$; $t = 4$:

$$C_t = 10,000\ (1 + 0.21)^4 = \underline{\underline{\$21,435,89}}$$ (aproximado a 2 decimales.

b) aplicando la tasa nominal $s = 20\%$ correspondiente a la tasa efectiva de 21% aplicando intereses dos veces por año:

$$C_t = C_o \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{nt}$$

Sustituyendo $C_o = \$10,000$; $s = 0.20$; $n = 2$; $t = 4$:

$$C_t = 10,000\ (1 + 0.10)^8 = \underline{\underline{\$21,435.89}}$$ aproximado a 2 decimales.

<u>9.9 La fuerza de interés.</u> Supongamos que se desea aplicar el interés continuamente al capital C_o de manera que el capital acumulado al final del año sea igual al capital acumulado que resulta al aplicar la tasa efectiva $\underline{r}$ una sola vez al final del año. Entonces, debemos considerar una tasa nominal correspondiente a la aplicación de los intereses un número infinito de veces durante el año. Para esto definiremos la fuerza de interés $\underline{u}$ de manera que:

$$1 + r = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$$

Ahora, el límite del lado derecho de la ecuación es igual a e^u porque:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{u}{n}\right)^{n/u}\right]^u = e^u$$ porque, por

definición: $$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{n/u}$$

Entonces: $1 + r = e^u$ o sea $u = \ln(1 + r)$, y el capital acumulado después de $\underline{t}$ años correspondiente a una tasa efectiva $\underline{r}$,

pero aplicando los intereses continuamente, será:

$$\underline{\underline{C_t = C_o\, e^{ut}}}$$ donde la fuerza de interés $u = \ln(1 + r)$

Hemos deducido una función contínua de $\underline{t}$ para calcular el capital acumulado en cualquier instante, correspondiente a una tasa efectiva de interés compuesto anualmente $\underline{r}$.

Derivando C_t con respecto a $\underline{t}$, encontramos que la razón de aumento de C_t es proporcional a C_t :

$$\frac{d\,C_t}{d\,t} = (C_o\, e^{ut})\ u$$

Sustituyendo $C_t = C_o\, e^{ut}$

$$\frac{d\,C_t}{d\,t} = u\, C_t$$

Ahora, si una cantidad aumenta a una razón proporcional a si misma, entonces podemos demostrar que la ley de crecimiento es una función exponencial. Sea: $\underline{x}$ la cantidad que aumenta de manera que:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = k\,x$$

Dividiendo la ecuación entre $\underline{x}$ y multiplicando por $\underline{d\,t}$.

$$\frac{d\,x}{x} = k\,d\,t$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{d\,x}{x} = \int k\,d\,t$$

$$\ln x = k\,t + C$$

Para determinar C, supongamos $x = x_o$ cuando $t = 0$. Entonces:

$$\ln x_o = C$$

Sustituyendo: $\ln x = k\,t + \ln x_o$

$$\therefore \ln x - \ln x_o = k\,t \quad ; \quad \ln \frac{x}{x_o} = k\,t$$

Aplicando anti-logaritmos:

$$\frac{x}{x_0} = e^{k\,t}$$

$$\therefore x = x_0\, e^{kt}$$

9.10 Modelo de Domar sobre la deuda pública. Supongamos que el ingreso nacional de un país aumenta a una velocidad constante (relativa) y que la deuda pública aumenta una fracción constante del ingreso nacional. Para analizar el comportamiento de la deuda pública a través del tiempo, consideremos la siguiente notación:

Y_0 = Ingreso nacional al principio de un período determinado.

Y_t = Ingreso nacional después de t años.

D_0 = Deuda pública inicial.

D_t = Deuda pública, después de t años.

α = Fracción del ingreso nacional correspondiente a deuda pública.

r = Velocidad de aumento relativo del ingreso nacional.

El ingreso nacional después de t años es dado por:

$$Y_t = Y_0\, e^{rt}$$

Entonces, la deuda pública después de t años será:

$$D_t = D_0 + \int_0^t \alpha\, Y_t\, d\,t$$

$$= D_0 + \int_0^t \alpha\, Y_0\, e^{rt}\, d\,t$$

$$= D_0 + \alpha Y_0 \left[\frac{1}{r}\; e^{rt} \right]_0^t$$

$$D_t = D_0 + \frac{\alpha Y_0}{r} \quad (e^{rt} - 1)$$

Para comparar el valor de la deuda pública acumulada después de t años, con el ingreso nacional después de t años, consideremos la razón entre D_t y Y_t:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{D_0}{Y_t} + \frac{\alpha Y_0}{r\, Y_t} \quad (e^{rt} - 1)$$

Sustituyendo: $Y_t = Y_0\, e^{rt}$

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{D_0}{Y_0\, e^{rt}} + \frac{\alpha \cancel{Y_0}\, (e^{rt} - 1)}{r \cancel{Y_0}\, e^{rt}}$$

Ahora, cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{D_t}{Y_t} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{D_0}{Y_0\, e^{rt}} \right) + \frac{\alpha}{r} \lim_{t \to \infty} \quad (1 - e^{-rt})$$

$$= 0 + \frac{\alpha}{r}$$

$$= \frac{\alpha}{r}$$

Es decir, el cociente de la deuda pública entre el ingreso nacional, cuando t tiende a infinito, depende del valor de la fracción del ingreso nacional que aumenta la deuda pública y de la velocidad de aumento del ingreso nacional r.

Ejercicio 33.

Tema: Integral definida. Interpretación geométrica.

1. Encontrar el valor de las siguientes integrales definidas:

1.1 $\int_1^3 (x^2 - 3x + 10)\, dx$ 1.2 $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

1.3 $\int_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt{4x}}$ 1.4 $\int_0^4 (x^2 - 4)^2\, d\,x$

1.5 $\int_0^1 e^x\, d\,x$ 1.6 $\int_0^1 \frac{d\,x}{e^{2x}}$

1.7 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9 - x}}$ *1.8 $\int_1^4 \frac{2x\,d\,x}{x^2 - 8}$

1.9 $\int_{2}^{9} (x - 1)^{1/3}\, d x$ 1.10 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2\, d x}{x + 2}$

1.11 $\int_{-2}^{1} \frac{x^2\, d x}{x + 3}$ 1.12 $\int_{-3}^{-1} (x + 2)\, d x$

2. Aplicando la definición, demostrar las siguientes igualdades:

2.1 $\int_{a}^{a} f (x)\, d x = 0$

2.2 $\int_{a}^{b} f (x)\, d x = - \int_{b}^{a} f (x)\, d x$

2.3 $\int_{a}^{b} f (x)\, d x = \int_{a}^{c} f (x)\, d x + \int_{c}^{b} f (x)\, d x$

3. Evaluar las siguientes integrales definidas. Graficar e interpretar geométricamente el valor de la integral definida:

3.1 $\int_{1}^{3} (-x + 3)\, d x$ 3.2 $\int_{0}^{2} (x + 1)\, d x$

3.3 $\int_{1}^{4} x^2\, d x$ 3.4 $\int_{-2}^{-1} e^{2x}\, d x$

3.5 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x - 2}$ 3.6 $\int_{1}^{e} \ln x\, d x$

Ejercicio 34.

Tema: Sumas de Riemann. Areas.

1. Calcular las sumas superior e inferior de $f (x) = 2x - 1$ correspondientes a una partición uniforme del intervalo $[0.5,\ 3]$ con una longitud de los sub-intervalos de 0.5, (base de los rectángulos). Graficar y comparar los valores de las sumas superior e inferior con el área entre la curva de $f (x)$ y el eje $\underline{x}$ calculada por geometría.

2. Encontrar las sumas superior e inferior de $f (x) = x^2 - x + 1$ correspondientes a una partición uniforme del intervalo $[0,\ 2]$ con una longitud de los sub-intervalos de 0.5. Graficar cada una de las sumas. Calcular el área bajo la curva de $f (x)$ como la integral definida de $\underline{0}$ a $\underline{2}$ de $f (x)$ y compararla con las sumas encontradas.

3. Verificar que el área bajo la curva de $f (x) = 5$ de $x = 1$ a $x = 4$ es igual a las sumas superior e inferior de la función correspondiente a una partición uniforme del intervalo con longitud de sub-intervalos igual a uno.

4. Demostrar que si $f (x) = C$, entonces la suma general de Riemann correspondiente a una partición cualquiera $P_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n = b\}$ es igual al área entre la curva de $f (x)$ y el eje $\underline{x}$ en el intervalo de $x = a$ a $x = b$. $(c > 0)$.

5. Encontrar el área entre la curva de la siguiente función y el eje $\underline{x}$ en el intervalo indicado. Graficar:

5.1 $f (x) = x^3 - x + 1$ de $x = 1$ a $x = 3$

5.2 $f (x) = x^2 + 4$ de $x = 0$ a $x = 3$

5.3 $f (x) = 1 - x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$

5.4 $f (x) = x^2 - 2x - 3$ de $x = -3$ a $x = 5$

5.5 $f (x) = e^x$ de $x = 0$ a $x = 2$

5.6 $f (x) = x^3$ de $x = -2$ a $x = 2$

5.7 $f (x) = \frac{1}{x + 1}$ de $x = 0$ a $x = e - 1$

5.8 $f (x) (x + 6)^{1/2}$ de $x = -5$ a $x = 3$

6. Encontrar el área entre la curva de la siguiente ecuación y el eje $\underline{y}$ en el intervalo indicado. Graficar.

6.1 $y = 9 - x^2$ de $y = 0$ a $y = 5$

6.2 $x = y^2 + 2x - 35$ de $y = 3$ a $y = 6$

6.3 $x = y - 4$ de $y = 2$ a $y = 5$

Ejercicio 35.

Tema: Integrales impropios. Interpretación geométrica.

1. Determinar si los siguientes integrales impropios existen y cuando este sea el caso, encontrar su valor. Graficar e interpretar geométricamente el resultado:

1.1 $\int_1^3 \frac{d\,x}{x-1}$ 1.2 $\int_0^3 \frac{2x\,d\,x}{\sqrt{x^2-9}}$

1.3 $\int_0^1 \ln x\,d\,x$ 1.4 $\int_0^1 \frac{d\,x}{x^2}$

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{d\,x}{x^3}$ 1.6 $\int_0^2 \frac{2x\,d\,x}{x^2-4}$

1.7 $\int_0^{\infty} e^x\,d\,x$ 1.8 $\int_{-\infty}^0 e^x\,d\,x$

1.9 $\int_0^{\infty} x\,e^{-x}\,d\,x$ 1.10 $\int_0^{\infty} (x+4)^{1/2}\,d\,x$

1.11 $\int_{-1}^1 \frac{d\,x}{x^2-1}$ 1.12 $\int_0^2 \frac{(x^2+1)\,dx}{x}$

1.13 $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,d\,x$ 1.14 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,x}{x^2}$

2. Demostrar que $\int_0^3 \frac{d\,x}{(x-1)^2}$ no existe y comprobar que si se evalúa la integral definida sin tomar en cuenta el punto de discontinuidad en $x = 1$, entonces se obtiene un resultado absurdo. Graficar.

3. Demostrar que $\int_1^{\infty} \ln x\,d\,x$ no existe. Graficar e interpretar el resultado geométricamente.

<u>Ejercicio 36.</u>

<u>Tema:</u> Aplicaciones del cálculo integral a economía.

1. Supongamos que en la producción de cierto artículo, el ingreso marginal I_{mg} está dado por la siguiente ley:

$$I_{mg} = \frac{1000}{(x+4)^2} - 15$$

a) Encontrar la función del ingreso total I_t, suponiendo que $I_t = 0$ cuando $x = 0$. Graficar.

b) Encontrar la ley de demanda correspondiente.

c) Graficar el ingreso medio y el ingreso marginal en el mismo sistema de coordenadas, sombreando las áreas correspondientes al ingreso total obtenido de cada una de las curvas, para un nivel dado de demanda.

2. Supongamos que en la producción de cierto artículo, el costo marginal C_{mg} está dado por la siguiente ley:

$$C_{mg} = 2x + 13$$

a) Encontrar el costo total y el costo medio suponiendo que el costo total es cero cuando $x = 0$.

b) Graficar los costos medio y marginal en el mismo sistema de coordenadas y verificar que el área entre la curva del costo marginal y el eje <u>x</u>, de $x = 0$ a $x = 3.5$, es igual a 3.5 por el costo medio para $x = 3.5$.

3. Un capital de $100,000 produce un interés compuesto anualmente de 10%.

a) Encontrar una fórmula para determinar el capital acumulado y encontrar su valor cuando $t = 10$ años.

b) Supongamos que se desea aplicar el interés mensualmente de manera que el efecto sobre el capital sea el mismo que el que produce la <u>tasa efectiva</u> de interés anual del 10%. Encontrar la <u>tasa nominal</u> de interés anual y determinar una fórmula para el capital acumulado después de <u>t</u> años. Encontrar el capital acumulado para $t = 10$ años y verificar con el resultado del inciso (a).

c) Encontrar la <u>fuerza de interés</u> y determinar una función continua del tiempo <u>t</u> para el capital acumulado. Encontrar el capital acumulado para $t = 10$ años y verificar con los resultados anteriores.

<u>Nota:</u> Se pueden utilizar logaritmos para los cálculos numéricos.

4. Supongamos que el ingreso nacional de un país al principio de un período determinado es $Y_o = 100$ millones de pesos. La deuda pública <u>D</u> aumenta anualmente $\frac{1}{10}$ del ingreso nacional Y_t. Si la velocidad de

aumento relativo del ingreso nacional es constante e igual a 0.20, encontrar una fórmula para calcular la deuda pública después de t años. Verificar que la razón entre Y_t y D_t tiende a $\frac{1}{2}$ cuando t tiende a infinito.

CAPITULO 10

SERIES

10.1 Secuencias. Al iniciar el estudio del cálculo infinitesimal, se definió el concepto de secuencia como una función discreta de una variable cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Definamos ahora el concepto de secuencia de la siguiente manera:

Def. Una secuencia es una sucesión de números, ordenados de acuerdo con una ley determinada.

A los números que forman una secuencia se les llama términos de la secuencia. Las secuencias pueden ser finitas o infinitas de acuerdo con que el número de términos sea finito o infinito. Por ejemplo: a) 1, 3, 5, ..., 15 es una secuencia finita que corresponde a una progresión aritmética de 8 términos.

b) $x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots$ es una secuencia infinita en la que el término número n es igual a $\frac{x^n}{n!}$ donde $n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots(2)(1)$. Cuando una secuencia es infinita, puede representarse por el enésimo término, que proporciona aumento relativo del ingreso nacional es constante e igual a 0.20, encontrar una fórmula para calcular la deuda pública después de t años. Verificar que la razón entre Y_t y D_t tiende a $\frac{1}{2}$ cuando t tiende a infinito.

CAPITULO 10

SERIES

10.1 Secuencias. Al iniciar el estudio del cálculo infinitesimal, se definió el concepto de secuencia como una función discreta de una variable cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Definamos ahora el concepto de secuencia de la siguiente manera:

Def. Una secuenbia es una sucesión de números, ordenados de acuerdo con una ley determinada.

A los números que forman una secuencia se les llama términos de la secuencia. Las secuencias pueden ser finitas o infinitas de acuerdo con que el número de términos sea finito o infinito. Por ejemplo: a) 1, 3, 5, ..., 15 es una secuencia finita que corresponde a una progresión aritmética de 8 términos.

b) $x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots$ es una secuencia infinita en la que el término número n es igual a $\frac{x^n}{n!}$ donde $n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots(2)(1)$. Cuando una secuencia es infinita, puede representarse por el enésimo término, que proporciona la ley de formación de los términos de la secuencia. En nuestro ejemplo:

$$\left\{\frac{x^n}{n!}\right\} = x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots\ldots$$

En álgebra se han estudiado algunas secuencias finitas interesantes, como son las progresiones. Ahora dedicaremos especial atención a las secuencias infinitas que representaremos por la siguiente expresión general:

$$\{u_n\} = u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$$

<u>Clasificación</u>. Tomando en cuenta la relación entre sus términos, las secuencias se clasifican de la siguiente manera:

a) <u>Secuencia monótona creciente</u>, cuando cada término es mayor que el anterior.

b) <u>Secuencia monótona decreciente</u>, cuando cada término es menor que el anterior.

En símbolos, la secuencia $\{u_n\}$ es <u>monótona creciente</u> si $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots\ldots < u_n < \ldots\ldots$

La secuencia es <u>monótona decreciente</u> si $u_1 > u_2 > \ldots\ldots > u_n > \ldots\ldots$

<u>Ejemplos</u>: a) $\{2^n\} = 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\ldots$
$= 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots$ es monótona creciente.

b) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$ es monótona decreciente.

De acuerdo con el límite del enésimo término cuando n tiende a infinito, las secuencias se clasifican de la siguiente manera: <u>Secuencia convergente</u>. Una secuencia infinita es convergente si el enésimo término tiende a un número finito cuando n tiende a infinito.

En símbolos: $\{u_n\}$ es convergente si:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = A \text{ (finito)}$$

<u>Secuencia divergente</u>. Una secuencia es divergente si sus términos no tienen un límite definido cuando n tiende a infinito. En otras palabras, una secuencia es divergente si no es convergente. Nótese que una secuencia puede ser divergente porque su enésimo término tienda a infinito o menos infinito cuando n tiende a infinito o porque no exista un límite determinado de acuerdo con la ley de formación de los términos. Consideremos algunos ejemplos:

1. La secuencia: $\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots$ es divergente porque $\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$

2. La secuencia $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots\ldots$ es divergente porque $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ no existe. En este caso los términos toman los valores alternados <u>1</u> y <u>-1</u> sin tender a un límite definido.

3. La secuencia $\left\{2 + \frac{1}{3n}\right\} = \frac{7}{3}, \frac{13}{6}, \frac{19}{9}, \ldots\ldots$ es convergente porque: $\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{3n}\right) = 2$

Definamos ahora el concepto de serie.

<u>10.2 Series</u>. Una serie es la suma indicada de los términos de una secuencia. En símbolos, la expresión general de una serie es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$

Una serie puede ser finita o infinita de acuerdo con que el número de términos sea finito o infinito. Por ejemplo:

1. La serie $\sum_{k=0}^{4} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$ es finita y corresponde a la suma de una progresión geométrica de 5 términos.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots$ es una serie infinita.

Dedicaremos especial atención a las series infinitas que son las que resultan interesantes según se verá después. Para definir los conceptos fundamentales de convergencia y divergencia de una serie infinita, es conveniente establecer primeramente el concepto de <u>suma parcial</u>. Consideremos la expresión general de una serie infinita:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

Ahora, las sumas parciales se definen de la siguiente manera:

Primera suma parcial $= S_1 = u_1.$

Segunda suma parcial $= S_2 = u_1 + u_2.$

Tercera suma parcial $= S_3 = u_1 + u_2 + u_3.$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Enésima suma parcial $= S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n.$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

De acuerdo con éstas definiciones, el número de sumas parciales de una serie infinita, es infinito y la ley de formación de las sumas parciales está dada por:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$$

Consideremos ahora la secuencia de sumas parciales para definir la convergencia y divergencia de una serie:

$$\left\{S_n\right\} = S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ldots\ S_n\ ,\ \ldots\ldots\ldots$$

Def. Una serie es convergente si la secuencia de sus sumas parciales es convergente. Una serie es divergente si la secuencia de sus sumas parciales es divergente.

Ejemplo. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n + \ldots\ldots$$

Solución:

Sumas parciales:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2 = 3$

$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\vdots$

$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

$\vdots \qquad \vdots$

La ley de formación $S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ es la suma de los primeros <u>n</u> enteros positivos y se obtiene de la suma de una progresión aritmética o se demuestra por inducción en álgebra.

Entonces, la secuencia de sumas parciales es la siguiente:

$$\left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\} = 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \ldots\ldots,\ \frac{n\,(n+1)}{2}\ ,\ \ldots\ldots$$

Ahora:

$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,(n+1)}{2} = \infty$. Entonces la secuencia de sumas parciales es divergente y por lo tanto la serie considerada es <u>divergente</u>.

Observación. Para determinar a partir de la definición, si una serie infinita es convergente o divergente, es necesario encontrar la ley de formación de la secuencia de sumas parciales. En el ejemplo que acabamos de considerar, obtuvimos la ley de formación de la secuencia de sumas parciales, porque se trataba de la suma de los términos de una progresión aritmética para la cual se tiene una fórmula algebraica. Sin embargo, con excepción de algunos casos particulares como el de nuestro ejemplo, no es posible establecer la ley de formación de la secuencia de sumas parciales para determinar si la serie es convergente o divergente, a partir de la definición. Entonces, es necesario deducir pruebas indirectas y criterios especiales para determinar si una serie es convergente o divergente.

10.3 La serie geométrica. Antes de discutir métodos indirectos para la determinación de la convergencia o divergencia deuna serie, consideremos el caso particular de la serie geométrica, que es de especial importancia en el estudio de series y en teoría económica.

Al estudiar progresiones en álgebra, se definió la progresión geométrica como una sucesión de números tales que cada término, después del primero, se encuentra multiplicando al anterior por una cantidad constante llamada razón. En símbolos, si llamamos a al primer término y r a la razón, entonces la forma general de la progresión geométrica es la siguiente secuencia:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots\ldots,\ a\,r^{n-1}$$

Consideremos la serie infinita asociada a una progresión geométrica infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots\ldots$$

La enésima suma parcial es:

$$S_n = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots\ldots + a\,r^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando por r ambos lados de la ecuación (1):

$$r\,S_n = a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots\ldots\ldots + a\,r^{n-1} + a\,r^n \qquad (2)$$

Ahora, restando (2) de (1), se tiene:

$$S_n - r\,S_n = a - a\,r^n$$

$$S_n\,(1 - r) = a - a\,r^n$$

$$\therefore\ S_n = \frac{a - a\,r^n}{1 - r} \qquad (3)$$

Hemos obtenido una fórmula para la enésima suma parcial de la serie geométrica general. Es decir, la fórmula (3) es la ley de formación de la secuencia de sumas parciales. Entonces, de acuerdo con la definición, la serie geométrica será convergente cuando el límite de S_n cuando n tienda a infinito, sea un número finito.

Ahora:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

En esta expresión a y r permanecen constantes en cada caso particular, mientras que n varía tendiendo a infinito. Entonces, aplicando los teoremas de límites:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a - a \lim\limits_{n\to\infty} r^n}{1 - r}$$

Ahora, cuando $r > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ y cuando $r < -1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ no existe. En estos casos la serie es divergente. Si r es un número entre 1 y -1, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ y por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$ (finito). Es decir, la serie geométrica converge cuando r es una fracción propia positiva o negativa.

Ejemplo. La serie geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} 10\,(1/2)^{n-1} = 10 + 5 + \frac{5}{2} + \ldots.$ es convergente porque la razón es $r = 1/2 < 1$. En este ejemplo el límite de S_n cuando n tiende a infinito es:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1-1/2} = \frac{10}{1/2} = 20$$

Se dice que la serie converge a 20 porque la suma que constituye la serie, llamada también el valor de la serie puede acercarse a 20 todo lo que uno quiera tomando un número de término suficientemente grande.

Aplicaciones de la serie geométrica. Las series geométricas son útiles en el método de comparación para determinar convergencia o divergencia de una serie. Este método lo veremos más adelante. Consideremos ahora dos aplicaciones interesantes de la serie geométrica.

10.4 Decimales periódicos infinitos. Cuando un número decimal infinito es tal que, a partir de cierta cifra, se repite indefinidamente un grupo determinado de cifras, entonces se le llama decimal periódico infinito. Todos los decimales periódicos infinitos provienen de una fracción formada por el cociente de 2 enteros. Para encontrar la fracción de que proviene un decimal periódico infinito, se descompone en una serie con el primer término conteniendo a la parte no periódica del número y los demás conteniendo cada uno, un grupo de las cifras que se repiten.

Ejemplo 1. Encontrar la fracción de que proviene el número 0.252525.....

Solución. En este caso la periodicidad empieza desde la primera cifra y el grupo que se repite es el 25. Entonces:

$$0.252525\ldots\ldots = 0.25 + 0.0025 + 0.000025 + \ldots\ldots$$

La serie geométrica infinita que resulta, tiene como primer término $a = 0.25$ y la razón es $r = 0.01$. Como la razón es menor que uno, la serie es convergente y su valor es:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.25}{1-0.01} = \frac{0.25}{0.99} = \frac{25}{99}$$

Este resultado es correcto y puede comprobarse haciendo la división: $\frac{25}{99} = 0.252525\ldots\ldots$

Ejemplo 2. Encontrar la fracción de que proviene el número:

$$1.4270270270\ldots\ldots\ldots$$

Solución. El grupo de cifras que se repiten es 270. Entonces descomponemos el número de la siguiente manera:

$$1.4270270270\ldots\ldots\ldots = 1.4 + 0.0270 + 0.0000270 + 0.000000270 + \ldots\ldots\ldots$$

A partir del segundo sumando tenemos una serie geométrica donde $a = 0.0270$ y $r = 0.001$. Esta serie es convergente porque $r < 1$ y su valor es:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.270}{1-0.001} = \frac{0.0270}{0.999}$$

$$= \frac{27}{999} = \frac{1}{37}$$

Entonces:

$$1.4270270270\ \ldots\ldots = 1.4 + \frac{1}{37} = \frac{51.8 + 1}{37} = \frac{52.8}{37}$$

$$= \frac{528}{370} = \frac{264}{185}$$

10.5 El multiplicador. Si una persona dispone de un ingreso determinado y recibe un ingreso extra, entonces gasta una parte de ese nuevo ingreso. La fracción del ingreso extra que una persona gasta, recibe el nombre de propensión marginal al consumo, mientras que la fracción del nuevo ingreso, que la persona ahorra, recibe el nombre de propensión marginal al ahorro. Consideremos el modelo simple de Keynes con la siguiente notación:

Y_o = Ingreso inicial ; C = consumo ; S = ahorro.

Entonces: $Y_o = C + S$

Ahora, si se llama Δy a un aumento del ingreso y α a la fracción de Δy que se gasta, se tiene:

$$Y_o + \Delta Y = (C + \alpha \Delta Y) + [S + (1-\alpha)\Delta Y]$$

Entonces, de acuerdo con las definiciones:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1 - 1/2} = \frac{10}{1/2} = 20$$

Se dice que la serie converge a 20 porque la suma que constituye la serie, llamada también el valor de la serie puede acercarse a 20 todo lo que uno quiera tomando un número de término suficientemente grande.

Aplicaciones de la serie geométrica. Las series geométricas son útiles en el método de comparación para determinar convergencia o divergencia de una serie. Este método lo veremos más adelante. Consideremos ahora dos aplicaciones interesantes de la serie geométrica.

10.4 Decimales periódicos infinitos. Cuando un número decimal infinito es tal que, a partir de cierta cifra, se repite indefinidamente un grupo determinado de cifras, entonces se le llama decimal periódico infinito. Todos los decimales periódicos infinitos provienen de una fracción formada por el cociente de 2 enteros. Para encontrar la fracción de que proviene un decimal periódico infinito, se descompone en una serie con el primer término conteniendo a la parte no periódica del número y los demás conteniendo cada uno, un grupo de las cifras que se repiten.

Ejemplo 1. Encontrar la fracción de que proviene el número 0.252525.....

Solución. En este caso la periodicidad empieza desde la primera cifra y el grupo que se repite es el 25. Entonces:

$$0.252525...... = 0.25 + 0.0025 + 0.000025 + ...$$

La serie geométrica infinita que resulta, tiene como primer término $a = 0.25$ y la razón es $r = 0.01$. Como la razón es menor que uno, la serie es convergente y su valor es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.25}{1 - 0.01} = \frac{0.25}{0.99} = \frac{25}{99}$$

Este resultado es correcto y puede comprobarse haciendo la división: $\frac{25}{99} = 0.252525.....$

Ejemplo 2. Encontrar la fracción de que proviene el número:

$$1.4270270270......... .$$

Solución. El grupo de cifras que se repiten es 270. Entonces descomponemos el número de la siguiente manera:

$$1.4270270270......... = 1.4 + 0.0270 + 0.0000270 + 0.000000270 + ...$$

A partir del segundo sumando tenemos una serie geométrica donde $a = 0.0270$ y $r = 0.001$. Esta serie es convergente porque $r < 1$ y su valor es:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.270}{1 - 0.001} = \frac{0.0270}{0.999}$$

$$= \frac{27}{999} = \frac{1}{37}$$

Entonces:

$$1.4270270270 .... = 1.4 + \frac{1}{37} = \frac{51.8 + 1}{37} = \frac{52.8}{37}$$

$$= \frac{528}{370} = \frac{264}{185}$$

10.5 El multiplicador. Si una persona dispone de un ingreso determinado y recibe un ingreso extra, entonces gasta una parte de ese nuevo ingreso. La fracción del ingreso extra que una persona gasta, recibe el nombre de propensión marginal al consumo, mientras que la fracción del nuevo ingreso, que la persona ahorra, recibe el nombre de propensión marginal al ahorro. Consideremos el modelo simple de Keynes con la siguiente notación:

Y_o = Ingreso inicial ; C = consumo ; S = ahorro.

Entonces: $Y_o = C + S$

Ahora, si se llama Δy a un aumento del ingreso y α a la fracción de Δy que se gasta, se tiene:

$$Y_o + \Delta Y = (C + \alpha \Delta Y) + [S + (1 - \alpha) \Delta Y]$$

Entonces, de acuerdo con las definiciones:

Propensión marginal al consumo $= \alpha$

Propensión marginal al ahorro $= 1 -$

La propensión marginal al consumo es, en general, diferente para cada persona. Sin embargo, si se supone que el consumo de una persona depende únicamente del nivel de su ingreso sin tomar en cuenta los factores que lo rodean, como el ingreso de los vecinos, etc., entonces puede considerarse que todos los habitantes de un país tienen la misma propensión marginal al consumo. Supongamos que el ingreso nacional de un país es Y_o en un instante dado y el gobierno invierte una nueva cantidad I, utilizando recursos inactivos. Si la propensión marginal al consumo "nacional" es α, entonces las personas que reciben el dinero I, gastarán una cantidad αI. Ahora, las personas que reciban esta cantidad αI, gastarán $\alpha(\alpha I) = \alpha^2 I$ y así sucesivamente se gastarán cantidades $\alpha I, \alpha^2 I, \alpha^3 I, \alpha^4 I, \ldots\ldots$ Cada uno de estos gastos sucesivos es una contribución al ingreso nacional, de manera que la inversión I contribuye en total una cantidad I_t dada por la siguiente expresión:

$$I_t = I + \alpha I + \alpha^2 I + \alpha^3 I + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= I\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\right) I$$

La expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots\ldots$ es una serie geométrica donde el primer término es $a = 1$ y la razón $r = \alpha$.

Hemos demostrado que las series geométricas convergen cuando la razón está entre cero y uno. Ahora, en este caso, la razón α que normalmente es igual a la propensión marginal al consumo es un número entre cero y uno. Es decir, la serie converge para $0 < \alpha < 1$ y su valor es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Entonces, cuando la propensión marginal al consumo α es una fracción propia, lo cual sucede generalmente, la inversión inicial sigue un proceso de expansión, porque resulta multiplicada por una cantidad $\frac{1}{1-\alpha}$, que recibe el nombre de "El multiplicador" y normalmente es mayor que uno.

Ejemplo. Si la propensión marginal al consumo es $\alpha = 0.68$, entonces el multiplicador M será:

$$M = \frac{1}{1 - 0.68} = \frac{1}{0.32} = 3.125$$

Entonces, si se invierten \$1000, el proceso de expansión los convierte en \$3,125. Nótese que entre mas pequeña sea la propensión marginal al ahorro $1 - \alpha$, el multiplicador será más grande porque es igual precisamente a la inversa de la propensión marginal al ahorro.

Evaluación de límites. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie, generalmente es necesario evaluar límites de funciones de una variable. La evaluación de límites se dificulta frecuentemente cuando aparecen formas indeterminadas, que no puedan ser eliminadas por las reglas particulares establecidas al estudiar límites. Ahora daremos sin demostración, una regla de gran utilidad para la eliminación de formas indeterminadas.

10.6 Regla de L'Hospital. Supongamos que para $x = a$, finito o infinito, $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{siempre que este límite exista.}$$

La regla de L'Hospital puede aplicarse a una gran variedad de formas indeterminadas, como $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, etc., las cuales peuden ser transformadas en alguna de las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Consideremos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 1.</u> Evaluar: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$

<u>Solución.</u> Aplicando los teoremas de límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

Ahora, aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0} = \infty$$

<u>Ejemplo 2.</u> Evaluar: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 \ln x}{x^3}$

<u>Solución:</u>

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x^3} = \frac{2 \ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2/x}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{3x^3} = \frac{2}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

<u>Ejemplo 3.</u> Evaluar: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x} \right)$

<u>Solución.</u> $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x} \right) = \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0} = \infty - \infty$ (Indeterminado)

Esta forma indeterminada se transforma en la forma $\frac{0}{0}$ de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\ln x} = \frac{0}{0}$$

Ahora, aplicando la regla de L' Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{1/x} = \lim_{x \to 1} (-x) = \underline{\underline{-1}}$$

<u>Métodos indirectos para determinar la convergencia o divergencia de una serie.</u> Cuando no es posible obtener la ley de formación de la

secuencia de sumas parciales, es necesario determinar la convergencia o divergencia de una serie a partir de la ley de formación de los términos de la serie. Consideremos primeramente el siguiente teorema, que nos proporciona un criterio general de divergencia.

<u>Teorema.</u> Si la serie infinita $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ es convergente, entonces

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

<u>Demostración.</u> Por hipótesis la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots$$ es convergente. Entonces, de acuerdo con la definición de convergencia:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = A \text{ (finito)}$$

Ahora, consideremos las sumas parciales:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

Restando S_{n-1} de S_n, se obtiene:

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Aplicando límites cuando <u>n</u> tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1}$$

Ahora, las secuencias de sumas parciales S_n y S_{n-1} tienden al mismo límite <u>A</u> cuando <u>n</u> tiende a infinito porque S_{n-1} toma los mismos valores que S_n desplazados un lugar hacia atrás. Esto se deduce de la siguiente tabla:

n	1	2	3	....	n - 1	n	.... $\to \infty$
S_n	u_1	$u_1 + u_2$	$u_1+u_2+u_3$	....	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	$\sum_{k=1}^{n} u_k$	.... $\to A$
S_{n-1}	-	u_1	$u_1 + u_2$	....	$\sum_{k=1}^{n-2} u_k$	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	.... $\to A$

Entonces, $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = A$ y por lo tanto:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = A - A = 0$$

L.C.D.D.

Este teorema establece una condición necesaria para convergencia, es decir, si el enésimo término u_n no tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces la serie es divergente. Sin embargo, esta condición no es suficiente para decidir que la serie es convergente porque si $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, la serie puede ser divergente, como en el caso de la serie armónica que veremos después. Lo importante del teorema es que nos proporciona el siguiente:

10.7 Criterio de divergencia. Si el límite del enésimo término de una serie, es diferente de cero cuando n tiende a infinito, entonces la serie es divergente. En símbolos:

$$\text{Si } \lim_{n \to \infty} u_k \neq 0, \text{ entonces } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ es divergente.}$$

Ejemplo 1. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \ldots\ldots\ldots$$

Solución. El enésimo término es dado por la ley de formación:

$$u_n = \frac{n}{2n+1}$$

Aplicando límites cuando n tiende a ∞:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Por la regla de L'Hospital:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Entonces la serie es divergente porque el enésimo término no tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Principios fundamentales. Las pruebas de convergencia y divergencia de series, que serán establecidas a continuación, se apoyan en los siguientes principios fundamentales:

1. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si se suprime un número finito de sus términos. Es decir, si:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots\ldots$ es convergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots\ldots$ también es convergente, para cualquier N finito. De la misma manera, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ también es divergente, para cualquier N finito.

2. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si todos los términos de la serie se multiplican por un número finito $c \neq 0$.

Es decir, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ también

n	1	2	3	....	$n-1$	n	.... $\to \infty$
S_n	u_1	u_1+u_2	$u_1+u_2+u_3$	....	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	$\sum_{k=1}^{n} u_k$	.... $\to A$
S_{n-1}	-	u_1	u_1+u_2	....	$\sum_{k=1}^{n-2} u_k$	$\sum_{k=1}^{n-1} u_k$	.... $\to A$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A$ y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A - A = 0$$

L.C.D.D.

Este teorema establece una condición necesaria para convergencia, es decir, si el enésimo término u_n no tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces la serie es divergente. Sin embargo, esta condición no es suficiente para decidir que la serie es convergente porque si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, la serie puede ser divergente, como en el caso de la serie armónica que veremos después. Lo importante del teorema es que nos proporciona el siguiente:

10.7 Criterio de divergencia. Si el límite del enésimo término de una serie, es diferente de cero cuando n tiende a infinito, entonces la serie es divergente. En símbolos:

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} u_k \neq 0, \text{ entonces } \sum_{k=1} u_k \text{ es divergente.}$$

Ejemplo 1. Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots\dots\dots$$

Solución. El enésimo término es dado por la ley de formación:

$$u_n = \frac{n}{2n+1}$$

Aplicando límites cuando n tiende a ∞:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Por la regla de L'Hospital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Entonces la serie es divergente porque el enésimo término no tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Principios fundamentales. Las pruebas de convergencia y divergencia de series, que serán establecidas a continuación, se apoyan en los siguientes principios fundamentales:

1. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si se suprime un número finito de sus términos. Es decir, si: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots\dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots\dots$ es convergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots\dots$ también es convergente, para cualquier N finito. De la misma manera, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ también es divergente, para cualquier N finito.

2. La convergencia o divergencia de una serie no se altera, si todos los términos de la serie se multiplican por un número finito $c \neq 0$.
Es decir, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ también

es convergente, para cualquier $c \neq 0$ finito. De la misma manera, si $\sum_{k=1}^{\infty}$ es divergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ también es divergente para cualquier $c \neq 0$.

(3) Si una secuencia infinita $\{S_n\}$ es monótona creciente, pero todos sus términos son menores o iguales que un número finito S, entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \leq S$ y por lo tanto la secuencia es convergente. En símbolos, si $\{S_n\}$ es tal que $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$ .... y $S_k \leq S$ (finito para todo k = 1, 2, 3, ..., entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \leq S$.

(4) Si una secuencia infinita $\{S_n\}$ es monótona decreciente, pero todos sus términos son mayores o iguales que un número B, entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \geq B$. En símbolos, si $\{S_n\}$ es tal que $S_1 > S_2 > S_3 > \ldots\ldots$, y $S_k \geq B$ para todo k = 1, 2, 3 ....., entonces $\lim_{n \to \infty} S_n \geq B$.

Series de términos positivos. Las series de términos positivos son series de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k > 0$ para todo k = 1, 2, 3, ... Las pruebas más importantes para determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos, son las siguientes :

10.8 I. Prueba de comparación. La serie infinita de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, si cada uno de sus términos es menor o igual que el correspondiente término de una serie conocida como convergente. La serie será divergente, si cada uno de sus términos es mayor o igual que los correspondientes términos de una serie conocida como divergente.

Demostración.

a) Supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente y que la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es tal que $a_k \leq b_k$ para todo k = 1, 2, 3 ....

Entonces: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots. + b_n$

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge a B, entonces:

$b_1 + b_2 + \ldots.. + b_n < B$ y por lo tanto:

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n < B$ (finito).

Ahora, la secuencia de sumas parciales $\{S_n\}$ es monótona creciente porque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es de términos positivos. Además S_n es menor que el número finito B, para todo n. Entonces, $\lim_{n \to \infty} S_n \leq B$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. (Por el principio fundamental (3)).

b) Supongamos que la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente y que la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es tal que $a_k \geq b_k$ para todo k = 1, 2, 3, ... Entonces:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots.. + b_n = T_n$$

$$\therefore S_n \geq T_n$$

Ahora, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente y de términos positivos. Entonces $\lim_{n \to \infty} T_n = \infty$ y por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$.

(por el principio fundamental (4)).

Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Observación. De acuerdo con el principio fundamental (1), la comparación de las series puede hacerse eliminando cualquier número finito de términos. Entonces la prueba es igualmente válida si la comparación se hace a partir de cierto término a_N, para cualquier N finito.

Ejemplo: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots\ldots$$

Solución. Comparemos esta serie con la serie geométrica de razón $r = 1/2$, que es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots\ldots$$

Simplificando ambas series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$$

Los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ son menores que los correspondientes términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, a partir del tercer término. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ es convergente.}$$

10.9 II. Prueba del Integral. (Cf Maclaurin. 1698-1746).

Sea $f(n) = a_n$, donde a_n es el enésimo término de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si $f(x)$ es una función positiva y decreciente para todo $\underline{x}$ mayor que un entero positivo $\underline{c}$, entonces:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si el integral impropio $\int_c^{\infty} f(x)\, dx$ es convergente, es decir, si es igual a un número finito A.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si el integral impropio $\int_c^{\infty} f(x)\, dx = \infty$.

Demostración. a) Consideremos la gráfica de una función que satisface las condiciones del teorema:

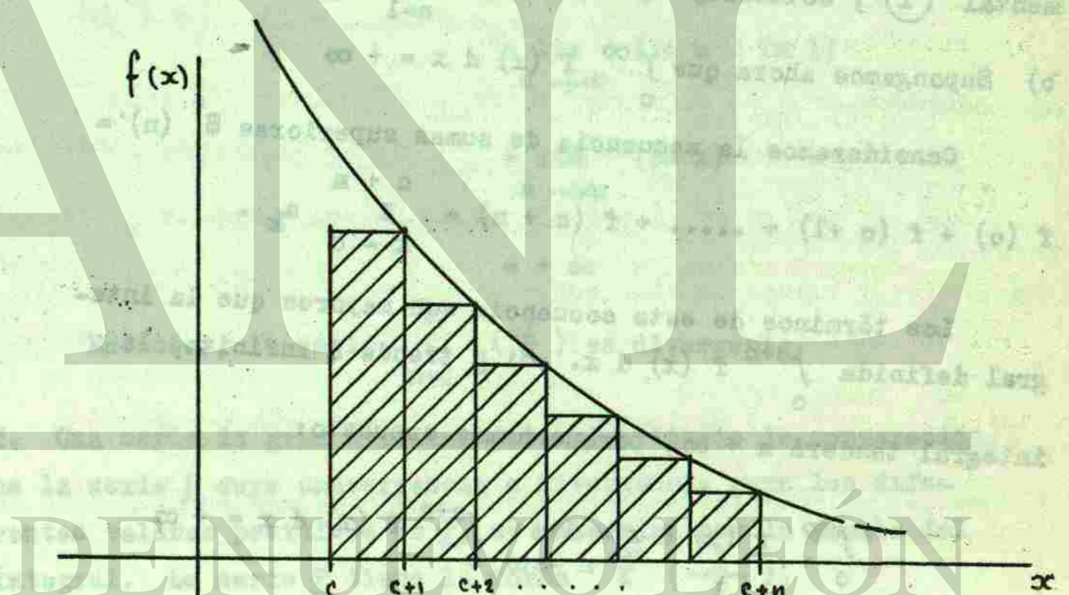


Fig. 10.1

Sea P_n la partición uniforme del intervalo $c \leqslant x \leqslant x + n$ con sub-intervalos de longitud uno, como indica la figura 10.1. El área anchurada es la suma inferior $S_*(n)$ de $f(x)$ correspondiente a P_n. Además $S_*(n) = f(c+1) + f(c+2) + \ldots\ldots + f(c+n) = \sum_{k=c+1}^{c+n} f(x) = \sum_{k=c+1}^{c+n} a_k$.

Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Observación. De acuerdo con el principio fundamental (1), la comparación de las series puede hacerse eliminando cualquier número finito de términos. Entonces la prueba es igualmente válida si la comparación se hace a partir de cierto término a_N, para cualquier N finito.

Ejemplo: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots\ldots$$

Solución. Comparemos esta serie con la serie geométrica de razón r = 1/2, que es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots\ldots$$

Simplificando ambas series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$$

Los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ son menores que los correspondientes términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, a partir del tercer término. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ es convergente.}$$

10.9 II. Prueba del Integral. (Cd Maclaurin. 1698-1746).

Sea f (n) = a_n, donde a_n es el enésimo término de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si f (x) es una función posi-

tiva y decreciente para todo x mayor que un entero positivo c, entonces:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si el integral impropio $\int_c^{\infty} f(x)\, dx$ es convergente, es decir, si es igual a un número finito A.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si el integral impropio $\int_c^{\infty} f(x)\, dx = \infty$.

Demostración. a) Consideremos la gráfica de una función que satisface las condiciones del teorema:

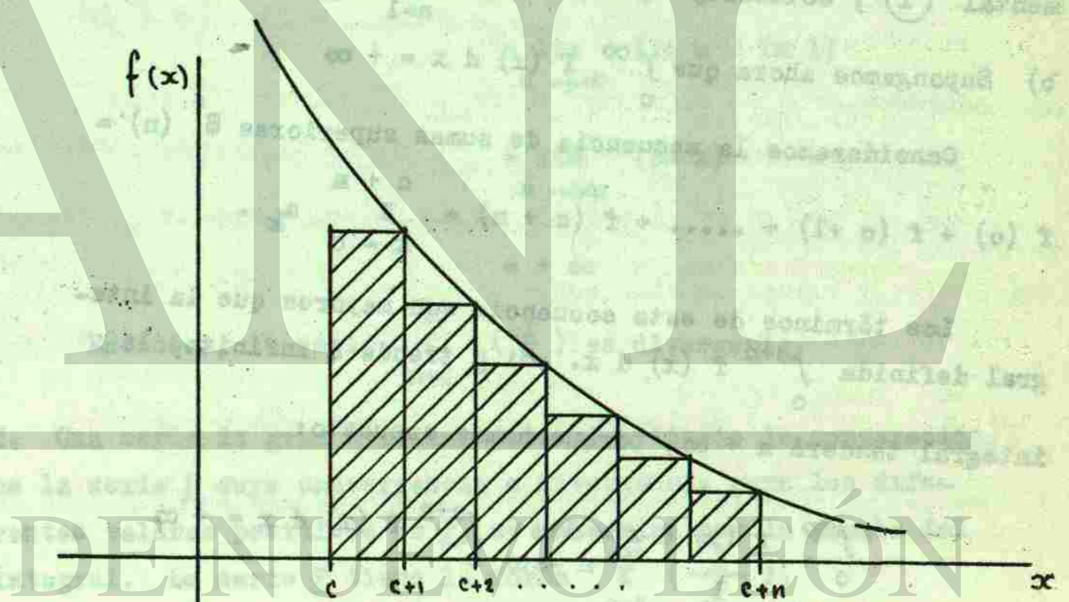


Fig. 10.1

Sea P_n la partición uniforme del intervalo $c \leqslant x \leqslant x + n$ con sub-intervalos de longitud uno, como indica la figura 10.1. El área anchurada es la suma inferior $S_*(n)$ de f (x) correspondiente a P_n. Además $S_*(n) = f(c+1) + f(c+2) + \ldots\ldots$ $+ f(c+n) = \sum_{k=c+1}^{c+n} f(x) = \sum_{k=c+1}^{c+n} a_k$.

Es decir, la suma inferior $S_*(n)$ es la enésima suma parcial de la serie $\sum_{k=c}^{\infty} a_k$ que resulta de eliminar los primeros c términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ahora, $S_*(n) \leqslant \int_c^{c+n} f(x)\,dx < \int_c^{\infty} f(x)\,dx$ para todo n. Entonces la secuencia de sumas parciales $\{S_*(n)\}$ es monótona creciente, por ser de términos positivos, y todos sus términos son menores que la integral impropia $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$.

Si $\int_c^{\infty} f(x)\,dx = A$ (finito), entonces $\lim_{n\to\infty} S_*(n) \leqslant A$ y la serie $\sum_{k=c}^{\infty} a_k$ es convergente. Por el principio fundamental (1), se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Supongamos ahora que $\int_c^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$

Consideremos la secuencia de sumas superiores $S^*(n) =$

$$f(c) + f(c+1) + \ldots\ldots + f(c+n) = \sum_{k=c}^{c+n} a_k .$$

Los términos de esta secuencia son mayores que la integral definida $\int_c^{c+n} f(x)\,dx$. Si n tiende a infinito, la integral tenderá a $+\infty$, porque hemos supuesto:

$$\int_c^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^{c+n} f(x)\,dx = +\infty$$

Entonces la serie $\sum_{k=c}^{\infty} a_k$ será divergente. Ahora, por el principio fundamental (1), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos.

1. Determinar si la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ es convergente o divergente.

Solución. El enésimo término de la serie es dado por $a_n = \frac{1}{n}$ la condición necesaria para convergencia se satisface, es decir, el enésimo término tiende a cero. Sin embargo, la serie resulta divergente al aplicar la prueba del integral:

$f(x) = \frac{1}{x}$ (positiva y decreciente para todo x en el intervalo $1 \leqslant x < \infty$)

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[(\ln x)\Big]_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \quad (\ln n - \ln 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \quad (\ln n)$$

$$= +\infty$$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

2. Una serie de gran utilidad para el criterio de comparación, es la serie P cuya convergencia o divergencia para los diferentes valores positivos de P, se determina por la prueba del integral. La serie P tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^P}\right)$.

Consideremos primeramente $P > 1$. El enésimo término es dado por $a_n = \frac{1}{n^P}$ y la función $f(x) = \frac{1}{x^P}$ es decreciente y positiva para todo x en el intervalo $1 \leqslant x < \infty$.

Aplicando la prueba del integral:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x^P} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-P}\,dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1-p} n^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1-p} \right) \left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{p-1}$$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} \right)$ es convergente para cualquier $p > 1$.

Si $P = 1$, se obtiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$ que es divergente.

Si $0 < P < 1$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ sigue siendo decreciente y positiva. Aplicando la prueba del integral, se encuentra $\int_1^{\infty} f(x)\, dx = +\infty$. Entonces la serie es divergente.

Por último, si $P \leqslant 0$, la serie es divergente porque el enésimo término no tiende a cero cuando n tiende a infinito:

Para $P = 0$ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = 1$

Para $p < 0$ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \to \infty} n^{|p|} = \infty$

Resumen. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} \right)$ es convergente para todo $P > 1$ y es divergente para todo $P \leqslant 1$.

10.10 Prueba de la razón. (D'Alembert. 1717-1783). En la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definamos $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

a) La serie es convergente si $\lim_{n \to \infty} r_n < 1$

b) La serie es divergente si $\lim_{n \to \infty} r_n > 1$

c) Si $\lim_{n \to \infty} r_n = 1$, la prueba no sirve, porque la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración.

a) Supongamos que $\lim_{n \to \infty} r_n = \rho < 1$. Sea r un número entre ρ y 1, es decir $\rho < r < 1$ como indica la figura.

La secuencia $\{r_n\}$ tiende a ρ cuando n tiende a infinito. Entonces, a partir de cierto entero N, r_N será menor que r para todo $n \geqslant N$. Eliminando los primeros N términos de la serie, su convergencia o divergencia no se altera y se tiene lo siguiente:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \text{para todo} \quad n \geqslant N$$

Entonces, la secuencia $\{r_n\}$ a partir de $n = N$, satisface lo siguiente:

Para $n = N$: $\frac{a_{N+1}}{a_N} < r$. Es decir: $a_{N+1} < r \cdot a_N$

Para $n = N + 1$: $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r$. Es decir: $a_{N+2} < r \; a_{N+1}$

Para $n = N + 2$: $\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < r$. Es decir: $a_{N+3} < r \; a_{N+2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Sustituyendo la primera desigualdad obtenida en la segunda, la segunda en la tercera y así sucesivamente, se obtiene:

$$a_{n+1} < r\, a_{N+2} < r^2 a_N \; ; \; a_{N+3} < r^3 a_N \; ; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Entonces, los términos de la serie $\sum_{n=n+1}^{\infty} a_n$ son menores que los correspondientes términos de la serie geométrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_N$, con $r < 1$. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Supongamos que $\lim_{n \to \infty} r_n > 1$. En este caso, a partir de cierto N, los términos de la secuencia $\{ r_n \}$ son mayores que 1 y se tiene:

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > 1. \text{ Es decir: } a_{N+1} > a_N$$

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > 1. \text{ Es decir: } a_{N+2} > a_{N+1} > a_N$$

$$\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} > 1. \text{ Es decir: } a_{N+3} > a_{N+2} > a_N$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Entonces los términos de la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ son todos mayores que a_N y no tienden a cero cuando n tiende a ∞. Es decir, la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ y por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

c) Cuando $\lim_{n \to \infty} r_n = 1$, la prueba no sirve para determinar convergencia o divergencia. Para demostrar esto, basta observar los siguientes dos ejemplos donde $\lim_{n \to \infty} r_n = 1$:

Ejemplo 1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica que ya conocemos como divergente.

Ahora: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$; $a_n = \frac{1}{n}$ Entonces:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Ejemplo 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie p, con $p = 2 > 1$. Entonces, es convergente.

Ahora: $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$$

De acuerdo con los ejemplos, si $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente o divergente. Cuando este sea el caso, debe intentarse otra prueba. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie, se recomienda la siguiente:

Regla práctica. Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. Si el enésimo término tiende a cero cuando n tiende a infinito, se aplica primeramente la prueba de la razón y si $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 1$, entonces se intenta la prueba del integral o la prueba de comparación.

Ejemplo. Determinar si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1'000,000)^n} = \frac{1}{1'000,000} + \frac{(1)\,(2)}{(1'000,000)^2} + \frac{(1)(2)(3)}{(1'000,000)^3} + \cdots\cdots$$

Solución. Apliquemos la prueba de la razón:

$$a_n = \frac{n!}{(1'000,000)^n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)\,!}{(1'000,000)^{n+1}}$$

Entonces:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)\,!}{(1'000,000)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(1'000,000)^n}},$$

$$r_n = \frac{(n+1)\,!\,(1'000,000)^n}{n\,!\,(1'000,000)^{n+1}}$$

$$\therefore\ r_n = \frac{n+1}{1'000,000}$$

Ahora:

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{1'000,000} = \infty > 1$$

Entonces, la serie es divergente.

10.11 Series de términos negativos. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos negativos, se puede transformar a una serie de términos positivos, multiplicando por menos uno todos los términos.

Esto no altera la convergencia o divergencia, de acuerdo con el principio fundamental 2 .

Entonces, se aplican las pruebas de convergencia o divergencia para series de términos positivos.

Ejemplo: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{6} - \cdots\cdots\cdots$$

Solución. Consideremos la serie de términos positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \cdots\cdots\cdots$$

Aplicando la prueba de la razón:

$$a_n = \frac{3}{2n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{3}{2n+2}$$

$$\therefore\ r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3}{2n+2}}{\dfrac{3}{2n}} = \frac{6n}{6n+6}$$

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \frac{6}{6 + \dfrac{6}{n}} = \frac{6}{6} = 1$$

Entonces, la prueba no sirve. Intentemos la prueba del integral:

$$f\,(n) = a_n = \frac{3}{2n}$$

$$\therefore\ f\,(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{(positiva y decreciente para todo } x \geq 1).$$

$$\int_1^{\infty} f\,(x)\,d\,x = \lim_{n \to \infty} \int_1^{n} \frac{3}{2x}\,d\,x$$

De acuerdo con los ejemplos, si $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente o divergente. Cuando este sea el caso, debe intentarse otra prueba. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie, se recomienda la siguiente:

Regla práctica. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. Si el enésimo término tiende a cero cuando n tiende a infinito, se aplica primeramente la prueba de la razón y si $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$, entonces se intenta la prueba del integral o la prueba de comparación.

Ejemplo. Determinar si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1'000{,}000)^n} = \frac{1}{1'000{,}000} + \frac{(1)\,(2)}{(1'000{,}000)^2} + \frac{(1)(2)(3)}{(1'000{,}000)^3} + \ldots .$$

Solución. Apliquemos la prueba de la razón:

$$a_n = \frac{n!}{(1'000{,}000)^n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)\,!}{(1'000{,}000)^{n+1}}$$

Entonces:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)\,!}{(1'000{,}000)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(1'000{,}000)^n}} ,$$

$$r_n = \frac{(n+1)\,!\,(1'000{,}000)^n}{n\,!\,(1'000{,}000)^{n+1}}$$

$$\therefore\ r_n = \frac{n+1}{1'000{,}000}$$

Ahora:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1'000{,}000} = \infty > 1$$

Entonces, la serie es divergente.

10.11 Series de términos negativos. Para determinar la convergencia o divergencia de una serie de términos negativos, se puede transformar a una serie de términos positivos, multiplicando por menos uno todos los términos.

Esto no altera la convergencia o divergencia, de acuerdo con el principio fundamental (2) .

Entonces, se aplican las pruebas de convergencia o divergencia para series de términos positivos.

Ejemplo: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2n}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{6} - \ldots\ldots\ldots$$

Solución. Consideremos la serie de términos positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \ldots\ldots\ldots$$

Aplicando la prueba de la razón:

$$a_n = \frac{3}{2n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{3}{2n+2}$$

$$\therefore\ r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3}{2n+2}}{\dfrac{3}{2n}} = \frac{6n}{6n+6}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{6+\dfrac{6}{n}} = \frac{6}{6} = 1$$

Entonces, la prueba no sirve. Intentemos la prueba del integral:

$$f(n) = a_n = \frac{3}{2n}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{3}{2x} \quad \text{(positiva y decreciente para todo } x \geqslant 1).$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{3}{2x}\,dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2} \ln x \Big|_1^n \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2} \ln n = \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n} \right)$ es divergente y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2n} \right)$ es divergente.

10.12 Series alternantes. Son las series de términos positivos y negativos de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$$

donde $a_n > 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Para determinar la convergencia o divergencia de las series alternantes se tiene la siguiente prueba:

Prueba para series alternantes. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n > 0$, es convergente si: a) $a_{n+1} < a_n$ para todo $\underline{n}$; b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Si no se cumple alguna de estas condiciones, la serie es divergente.

Demostración. Consideremos la secuencia de sumas parciales pares:

$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} a_n$. Esta suma parcial puede escribirse de la siguiente manera, agrupando los términos de $\underline{2}$ en $\underline{2}$:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

La secuencia $\left\{ S_{2m} \right\}$ es monótona creciente porque los términos de la suma que representa, son positivos. (Por hipótesis, $a_{n+1} < a_n$. Es decir, $a_n - a_{n+1} > 0$ para todo $\underline{n}$).

Ahora, S_{2m} puede escribirse también de la siguiente manera:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots\ldots\ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

$$= a_1 - (\text{Suma de términos positivos}).$$

$$\therefore \; S_{2m} < a_1$$

Entonces, la secuencia $\left\{ S_{2m} \right\}$ y por lo tanto, la secuencia $\left\{ S_n \right\}$ es convergente. (Principio fundamental (3)). Entonces la secuencia alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es convergente. La convergencia de la secuencia S_n se deduce de la convergencia de S_{2m} y del hecho de que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Ejemplo. Determinar si la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente o divergente.

Solución $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$

$$a_n = \frac{1}{n} \; ; \; \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ahora, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Comparando a_{n+1} con a_n, se tiene: $a_{n+1} < a_n$ para todo $\underline{n}$ porque:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} . \text{ Es decir: } n < n + 1.$$

Entonces, la serie es convergente.

Observación: La serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente, mientras que la serie armónica original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Cuando una serie alternante es convergente y la correspondiente serie de términos positivos también es convergente, entonces se dice que la serie alternante es <u>absolutamente convergente</u>.

$$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{3}{2}\ \ln x \Big|_1^n\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2}\ \ln n = \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2n}\right)$ es divergente y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2n}\right)$ es divergente.

10.12 Series alternantes. Son las series de términos positivos y negativos de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots\dots$$

donde $a_n > 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots\dots$

Para determinar la convergencia o divergencia de las series alternantes se tiene la siguiente prueba:

Prueba para series alternantes. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n > 0$, es convergente si: a) $a_{n+1} < a_n$ para todo n; b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Si no se cumple alguna de estas condiciones, la serie es divergente.

Demostración. Consideremos la secuencia de sumas parciales pares:

$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1}\ a_n$. Esta suma parcial puede escribirse de la siguiente manera, agrupando los términos de 2 en 2:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

La secuencia $\{S_{2m}\}$ es monótona creciente porque los términos de la suma que representa, son positivos. (Por hipótesis, $a_{n+1} < a_n$. Es decir, $a_n - a_{n+1} > 0$ para todo n).

Ahora, S_{2m} puede escribirse también de la siguiente manera:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots\dots\dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

$$= a_1 - (\text{Suma de términos positivos}).$$

$$\therefore\ S_{2m} < a_1$$

Entonces, la secuencia $\{S_{2m}\}$ y por lo tanto, la secuencia $\{S_n\}$ es convergente. (Principio fundamental 3). Entonces la secuencia alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ a_n$ es convergente. La convergencia de la secuencia S_n se deduce de la convergencia de S_{2m} y del hecho de que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Ejemplo. Determinar si la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente o divergente.

Solución $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots$

$$a_n = \frac{1}{n}\ ;\ \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ahora, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Comparando a_{n+1} con a_n, se tiene: $a_{n+1} < a_n$ para todo n porque:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\ .\ \text{Es decir:}\ \ n < n + 1.$$

Entonces, la serie es convergente.

Observación: La serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ es convergente, mientras que la serie armónica original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Cuando una serie alternante es convergente y la correspondiente serie de términos positivos también es convergente, entonces se dice que la serie alternante es <u>absolutamente convergente</u>.

Cuando una serie alternante es convergente, pero la correspondiente serie de términos positivos es divergente, entonces se le llama <u>condicionalmente convergente</u>.

Para encontrar un valor aproximado de la suma de una serie alternante, se define el residuo R_n como la serie:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\ldots\ldots$$

(suponiendo n = par).

De acuerdo con su definición, R_n representa el error al considerar el valor de la serie como la suma de los primeros <u>n</u> términos. Se puede demostrar que el valor absoluto del error R_n es menor que el valor absoluto del término a_{n+1} de la serie. Entonces, al tomar <u>n</u> términos para un valor aproximado de la serie, se tiene una idea del error, observando el término a_{n+1}.

<u>Ejemplo</u>. Verificar que el error que se comete al aproximar la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ a 15 términos es menor que 0.0625.

<u>Solución</u>. El enésimo término es dado por: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Al aproximar a 15 términos, el error debe ser menor que el valor absoluto del término número 16. Ahora:

$$a_{16} = \frac{(-1)^{15}}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore \text{ Error} = R_{15} < \left| -\frac{1}{16} \right| = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$\therefore R_{15} < 0.0625.$$

<u>Nota</u>. La prueba de la razón es válida para series alternantes. Esta prueba puede demostrarse de la misma manera, considerando a la razón en valor absoluto, con los siguientes resultados:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

<u>10.13 Series de potencias</u>. Una serie de potencias es una serie infinita de potencias de una variable <u>x</u>. La forma general de las series de potencias es la siguiente:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

a_0, a_1, a_2, ..., son constantes. Obsérvese que una serie de potencias puede considerarse como un polinomio de grado infinito. En particular, un polinomio de grado <u>n</u> puede considerarse como una serie de potencias en la que los coeficientes de las potencias de <u>x</u> son ceros a partir de a_{n+1}, es decir: $a_k = 0$ para k = (n+1), (n+2), ...

<u>Intervalo de convergencia</u>. Cualquier serie de potencias de la forma (1) es convergente para x = 0 porque en este caso, la suma o valor de la serie es igual al número finito a_0. Para determinar el conjunto de valores de <u>x</u> para los cuales, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente, se utiliza la prueba de la razón:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$$

$$b_n = a_n x^n$$

Cuando una serie alternante es convergente, pero la correspondiente serie de términos positivos es divergente, entonces se le llama <u>condicionalmente convergente</u>.

Para encontrar un valor aproximado de la suma de una serie alternante, se define el residuo R_n como la serie:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\ldots$$

(suponiendo n = par).

De acuerdo con su definición, R_n representa el error al considerar el valor de la serie como la suma de los primeros <u>n</u> términos. Se puede demostrar que el valor absoluto del error R_n es menor que el valor absoluto del término a_{n+1} de la serie. Entonces, al tomar <u>n</u> términos para un valor aproximado de la serie, se tiene una idea del error, observando el término a_{n+1}.

<u>Ejemplo</u>. Verificar que el error que se comete al aproximar la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ a 15 términos es menor que 0.0625.

<u>Solución</u>. El enésimo término es dado por: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Al aproximar a 15 términos, el error debe ser menor que el valor absoluto del término número 16. Ahora:

$$a_{16} = \frac{(-1)^{15}}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\therefore \text{ Error} = R_{15} < \left| -\frac{1}{16} \right| = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$\therefore R_{15} < 0.0625.$$

<u>Nota</u>. La prueba de la razón es válida para series alternantes. Esta prueba puede demostrarse de la misma manera, considerando a la razón en valor absoluto, con los siguientes resultados:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente si:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

<u>10.13 Series de potencias</u>. Una serie de potencias es una serie infinita de potencias de una variable <u>x</u>. La forma general de las series de potencias es la siguiente:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

a_0, a_1, a_2, ..., son constantes. Obsérvese que una serie de potencias puede considerarse como un polinomio de grado infinito. En particular, un polinomio de grado <u>n</u> puede considerarse como una serie de potencias en la que los coeficientes de las potencias de <u>x</u> son ceros a partir de a_{n+1}, es decir: $a_k = 0$ para k = (n+1), (n+2), ...

<u>Intervalo de convergencia</u>. Cualquier serie de potencias de la forma (1) es convergente para x = 0 porque en este caso, la suma o valor de la serie es igual al número finito a_0. Para determinar el conjunto de valores de <u>x</u> para los cuales, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente, se utiliza la prueba de la razón:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$$

$$b_n = a_n x^n$$

Entonces:

$$|r_n| = \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\,x\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,|x|$$

Ahora:

$$\lim_{n\to\infty}|r_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

(porque $|x|$ no depende de $\underline{n}$)

Sustituyendo $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}|r_n| = |x|\cdot\rho$$

Ahora, la serie será convergente cuando este límite sea menor que uno, de acuerdo con la prueba de la razón. Es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ es convergente si } |x|\,\rho <$$

$$\therefore\ |x| < \frac{1}{\rho} \quad (\text{porque } \rho > 0).$$

La expresión encontrada determina una vecindad alrededor de $x = 0$, de longitud $2\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Por esta razón, al conjunto de valores de $\underline{x}$ para los cuales, la serie es convergente, se le llama <u>intervalo de convergencia</u> de la serie y al número $\frac{1}{\rho}$ se le llama <u>radio de convergencia</u> de la serie. La siguiente gráfica ilustra el intervalo y radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Desde luego, el intervalo y el radio de convergencia de cada serie de potencias de la forma (1) dependen de:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

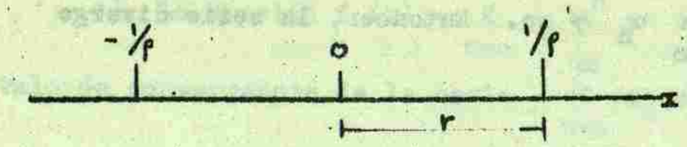


Fig. 10.2

Nota. Los extremos del intervalo de convergencia, cuando éste sea finito, deben investigarse por medio de otra prueba para convergencia o divergencia porque en esos puntos se tiene $\lim\limits_{n\to\infty}|r_n| = 1$ y por lo tanto la prueba de la razón no es aplicable.

<u>Ejemplo</u>. Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

<u>Solución</u>.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Entonces, el radio de convergencia es:

$r = \frac{1}{\rho} = 2$ y la serie converge para todo $-2 < x < 2$.

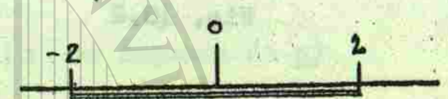
Ahora, investiguemos los extremos del intervalo:

$$\text{Para } x = -2:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

$$\text{Para } x = 2:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$$

En ambos casos $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$. Entonces, la serie diverge para $x = \pm 2$.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ es convergente para todo $\underline{x}$ en el intervalo $[-2, 2]$ sin incluir los extremos.



Ejemplo 2. Determinar el intervalo de convergencia de la serie alternante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

Solución:

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \; ; \; a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n! \, (-1)^{n+1}}{(n+1)! \, (-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Entonces, el radio de convergencia es $r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0} = \infty$ y la serie es absolutamente convergente para todo $\underline{x}$ entre $-\infty$ y $+\infty$. Es decir, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ es convergente para todo número real $\underline{x}$.

Propiedades fundamentales de las series de Potencias. Si la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es considerada como una función de la variable $\underline{x}$, entonces se demuestra que esta función se comporta de manera semejante a las funciones polinomiales finitas, dentro del intervalo de convergencia. Las siguientes propiedades fundamentales de las series de potencias serán establecidas sin demostración:

i) La función $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es contínua en el intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por esta razón, si una función contínua puede expresarse como una serie de potencias, entonces se dice que la serie representa a la función en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. Sea $f(x) = \frac{2}{2-x}$. Esta función puede desarrollarse en serie de potencias haciendo la división:

$$f(x) = \frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Ahora, hemos encontrado que el intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \ldots\ldots\ldots$ es el intervalo $[-2, 2]$ sin incluir los extremos. Entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ representa a la función $f(x) = \frac{2}{2-x}$ para todo $\underline{x}$ entre $\underline{-2}$ y $\underline{2}$. Obsérvese que el valor de la serie es igual al valor de la función para $\underline{x}$ en el intervalo de convergencia $[-2, 2]$.

ii) Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la derivada de la función $f(x)$ es igual a la derivada, término a término, de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ en el intervalo de convergencia. Es decir: $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ para todo $\underline{x}$ en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior teníamos $f(x) = \frac{2}{2-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ para todo $-2 < x < 2$.

Entonces: $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$ para todo $-2 < x < 2$.

iii) Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la integral de $f(x)\,dx$ es igual a la integral, término a término de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx$, en el intervalo de convergencia. Es decir:

$$\int_0^x f(x)\,d\,x = \int_0^x \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, x^n\, d\,x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$ para

todo x en el intervalo de convergencia.

Ejemplo. En el ejemplo anterior:

$$f(x) = \frac{2}{2-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad \text{para todo } -2 < x < 2.$$

Entonces:

$$\int_0^x f(x)\,d\,x = \int_0^x \frac{2\,dx}{2-x} = \int_0^x \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{2^n} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n}$$

Para todo x en el intervalo $[-2, 2]$.

Ahora: $\int_0^x \frac{2\,d\,x}{2-x} = -2\ln(2-x)\Big|_0^x$ Entonces:

$$-2\ln(2-x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} - 2\ln 2$$

$$\therefore \ln(2-x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} + 2\ln 2,$$ para todo x

entre -2 y 2. Hemos encontrado una fórmula para calcular los logaritmos naturales de los números entre cero y cuatro. La aproximación en cada caso, depende del número de términos que se tomen de la serie.

10.14 Desarrollo de funciones en series de potencias. Hemos establecido que si una serie de potencias se considera como una función de x, entonces podemos encontrar las derivadas de la función, derivando término a término la serie en el intervalo de convergente. Ahora, dada una función de x, se puede encontrar una serie de potencias que sea equivalente a la función para determinados valores de x. Consideremos primeramente el desarrollo de una función en serie de potencias de x.

Series de Maclaurin. El siguiente teorema se debe a Colin Maclaurin (1698-1746) aunque algunos historiadores lo atribuyen a Stirling (1692-1770). El teorema proporciona una fórmula para desarrollar

en serie de potencias de x, cualquier función que satisface las condiciones indicadas.

Teorema. Si una función $f(x)$ y sus derivadas de todas las órdenes, están definidas en un intervalo alrededor de $x = 0$, entonces la serie: $f(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(o)}{n!}x^n + \ldots\ldots.$ representa a la función $f(x)$ para todos los valores de x tales que $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(o)}{(n+1)!}x^{n+1} + \ldots..$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Demostración. Cualquier función definida en un intervalo alrededor de $x = o$, puede ser expresada en la siguiente serie de potencias que es convergente por lo menos para $x = o$:

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f(o) = a_o$

Ahora, las derivadas de $f(x)$ están definidas en un intervalo alrededor del cero. Derivando término a término, se obtiene:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$; $f'(o) = a_1$

Derivando de nuevo:

$$f''(x) = 2a_2 + (3)(2)\,a_3\,x + \ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f''(o) = 2\,a_2$

$$\therefore a_2 = \frac{f''(o)}{2} = \frac{f''(o)}{2!}$$

Volviendo a derivar:

$$f''(x) = (3)(2)\,a_3 + (4)(3)(2)\,x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para $x = o$: $f'''(o) = 3!\,a_3$

$$\therefore a_3 = \frac{f'''(o)}{3!}$$

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$ para

todo $\underline{x}$ en el intervalo de convergencia.

<u>Ejemplo</u>. En el ejemplo anterior:

$$f(x) = \frac{2}{2-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \text{ para todo } -2 < x < 2.$$

Entonces:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{2\,dx}{2-x} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n}$$

Para todo $\underline{x}$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Ahora: $\int_0^x \frac{2\,dx}{2-x} = -2\ln(2-x)\Big|_0^x$. Entonces:

$$-2\ln(2-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} - 2\ln 2$$

$$\therefore \ln(2-x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} + 2\ln 2,$$ para todo $\underline{x}$

entre $\underline{-2}$ y $\underline{2}$. Hemos encontrado una fórmula para calcular los logaritmos naturales de los números entre cero y cuatro. La aproximación en cada caso, depende del número de términos que se tomen de la serie.

<u>10.14 Desarrollo de funciones en series de potencias</u>. Hemos establecido que si una serie de potencias se considera como una función de $\underline{x}$, entonces podemos encontrar las derivadas de la función, derivando término a término la serie en el intervalo de convergente. Ahora, dada una función de $\underline{x}$, se puede encontrar una serie de potencias que sea equivalente a la función para determinados valores de $\underline{x}$. Consideremos primeramente el desarrollo de una función en serie de potencias de $\underline{x}$.

<u>Series de Maclaurin</u>. El siguiente teorema se debe a Colin Maclaurin (1698-1746) aunque algunos historiadores lo atribuyen a Stirling (1692-1770). El teorema proporciona una fórmula para desarrollar

en serie de potencias de $\underline{x}$, cualquier función que satisface las condiciones indicadas.

<u>Teorema</u>. Si una función f (x) y sus derivadas de todas las órdenes, están definidas en un intervalo alrededor de x = 0, entonces la serie:

$$f(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!} x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n + \ldots\ldots\ldots$$

representa a la función f (x) para todos los valores de $\underline{x}$ tales que $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(o)}{(n+1)!} x^{n+1} + \ldots\ldots$ tiende a cero cuando $\underline{n}$ tiende a infinito.

<u>Demostración</u>. Cualquier función definida en un intervalo alrededor de x = o, puede ser expresada en la siguiente serie de potencias que es convergente por lo menos para x = o:

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Para x = o : $f(o) = a_o$

Ahora, las derivadas de f (x) están definidas en un intervalo alrededor del cero. Derivando término a término, se obtiene:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Para x = o ; $f'(o) = a_1$

Derivando de nuevo:

$$f''(x) = 2a_2 + (3)(2)\,a_3\,x + \ldots\ldots$$

Para x= o : $f''(o) = 2\,a_2$

$$\therefore a_2 = \frac{f''(o)}{2} = \frac{f''(o)}{2!}$$

Volviendo a derivar:

$$f''(x) = (3)(2)\,a_3 + (4)(3)(2)\,x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para x = o : $f'''(o) = 3!\,a_3$

$$\therefore a_3 = \frac{f'''(o)}{3!}$$

Repitiendo el proceso de derivación, se encuentra:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!} \quad \text{donde } f^{(n)}(x) \text{ es la enésima derivada de } f(x).$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para a_o, a_1, a_2, a_3, ... en la serie original:

$$f(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(o)}{3!}\,x^3 + \ldots\ldots$$

Ahora, para determinar los valores de $\underline{x}$ para los cuales la serie representa a la función $f(x)$, consideremos la enésima suma parcial:

$$S_n(x) = f(o) + f'(o)\,x + \frac{f''(o)}{2!}\,x^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(o)}{n!}\,x^n$$

De acuerdo con la definición de $R_n(x)$, se tiene:

$$S_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

Aplicando límites cuando $\underline{n}$ tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$ (porque $f(x)$ no depende de $\underline{n}$ en el límite).

Ahora, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ es el valor de la serie y cuando $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = o$ se tiene:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Entonces, la serie representa a la función $f(x)$ para los valores de $\underline{x}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = o$

L.C.D.D.

Nota: Es importante observar que puede haber valores de $\underline{x}$ dentro del intervalo de convergencia de la serie, para los cuales $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$.

Sin embargo, el intervalo de convergencia coincide con el

conjunto de valores de $\underline{x}$ para los cuales $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = o$ para las funciones que hemos estudiado. (En general).

Ejemplo. Desarrollar en serie de Maclaurin la función $f(x) = e^x$. Encontrar el intervalo de convergencia.

Solución.

$$f(x) = e^x = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$$

$$a_o = f(o) = e^o = 1$$

$$f'(x) = e^x$$

$$\therefore a_1 = f'(o) = e^o = 1$$

$$f''(x) = e^x$$

$$\therefore a_2 = \frac{f''(o)}{2!} = \frac{e^o}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$f'''(x) = e^x$$

$$\therefore a_3 = \frac{f'''(o)}{3!} = \frac{e^o}{3!} = \frac{1}{3!}$$

Puesto que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, se tiene:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(o)}{n!} = \frac{e^o}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Sustituyendo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

Intervalo de convergencia: $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$; $a_n = \dfrac{1}{n!}$

$$\therefore \rho_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \rho = \lim_{n\to\infty} |\rho_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

Entonces $r = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{0} = \infty$ y la serie converge para todo $\underline{x}$ real $(-\infty < x < +\infty)$.

En este caso puede demostrarse que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$ es igual a cero para todo $\underline{x}$ en el intervalo de convergencia, es decir, para todo $-\infty < x < \infty$.

Un valor aproximado del número $\underline{e}$ puede ser obtenido de esta serie sustituyendo $x = 1$ en la serie $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$, se tiene:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

<u>Serie de Taylor</u>. El desarrollo de una función puede hacerse sobre un intervalo alrededor de cualquier número $\underline{c}$, cuando se satisfacen las condiciones indicadas en el siguiente teorema debido a Brook Taylor (1685-1731).

<u>Teorema</u>. Si una función $f(x)$, y sus derivados de todas las órdenes, están definidas en un intervalo alrededor de $x = c$ entonces la serie:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \ldots\ldots$$

representa a la función $f(x)$ para todos los valores de $\underline{x}$ tales que $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema anterior. Obsérvese que la serie de Maclaurin es un caso particular de la serie de Taylor, cuando $c = 0$. La serie de Taylor permite desarrollar funciones que no están definidas para $x = 0$.

<u>Ejemplo</u>. Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \ln x$, Encontrar el intervalo de convergencia.

<u>Solución</u>. Esta función no puede desarrollarse en serie de Maclaurin porque $f(0) = \ln 0$ no existe. Consideremos la serie de potencias de $(x - 1)$.

$$f(x) = \ln x = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$f(1) = \ln 1 = 0$. Entonces $a_0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(1) = 1$. Entonces $a_1 = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Entonces: $a_2 = \frac{-1}{2!} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f'''(1) = 2$. Entonces $a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

$f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$f^{IV}(1) = -6$. Entonces $a_4 = \frac{-6}{4!} = \frac{-3!}{4!} = -\frac{1}{4}$

Sustituyendo:

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \ldots\ldots$$

<u>Intervalo de convergencia</u>. El enésimo término es dado por:

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

Entonces:

$$|\rho_n| = \left| \frac{\dfrac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}} \right| = \left| \frac{(x-1)^{n+1}\ n}{(x-1)^n\ (n+1)} \right|$$

$$|\rho_n| = |x - 1| \left| \frac{n}{n+1} \right|$$

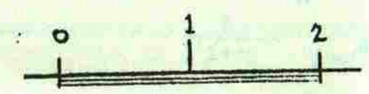
$$\lim_{n \to \infty} |\rho_n| = |x - 1| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= |x - 1|$$

Entonces la serie es convergente para los valores de $\underline{x}$ tales que:

$$|x - 1| < 1 \quad \text{(por el criterio de la razón).}$$

Esta desigualdad define el intervalo alrededor de $x = 1$ de longitud $\underline{2}$:



La serie encontrada nos permite calcular valores aproximados de los logaritmos naturales para números entre o y 2. En este caso, la serie resultó alternante por lo que el error, al considerar el valor de la función igual a la suma de los primeros n términos, es menor que el término número (n + 1).

Aplicación al cálculo integral. Las aplicaciones de los desarrollos en serie de funciones, son muy variadas. Hemos visto como se pueden calcular valores aproximados de logaritmos. Las tablas de logaritmos y las de otras funciones trascendentes como las trigonométricas, han sido elaboradas aproximando los valores por medio de desarrollos en serie. Consideremos ahora, otra de las muchas aplicaciones del desarrollo en serie de las funciones de una variable. Supongamos que deseamos encontrar la integral definida de una expresión diferencial que no puede ser integrada. Desarrollando la función en serie de potencias alrededor de un intervalo que contenga al intervalo de integración, se puede integrar la serie término a término y obtener un valor aproximado de la integral definida tomando un número n de términos de la serie integrada.

Ejemplo. Encontrar el valor aproximado a 3 decimales de la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \frac{d\,x}{4-x^2}$$

Solución. Desarrollemos en serie de potencias alrededor de x = o la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$. Por la fórmula de Maclaurin o haciendo la división, se obtiene:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} + \frac{x^6}{4^4} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{256} + \ldots\ldots$$

Intervalo de convergencia. El enésimo coeficiente es dado por:

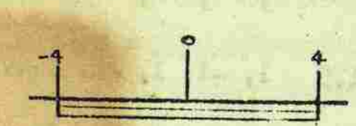
$$a_n = \frac{1}{4^n}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} \quad \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$\text{Ahora} \quad \rho_n = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Entonces} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\rho_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$\therefore \; r = \frac{1}{\rho} = 4.$ Entonces, la serie converge para un intervalo alrededor del cero de longitud 8.



El intervalo de convergencia contiene al intervalo de integración. Entonces:

$$\int_0^1 \frac{d\,x}{4-x^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{256} + \ldots\right) d\,x$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{x^3}{(3)(16)} + \frac{x^5}{(5)(64)} + \frac{x^7}{(7)(256)} + \ldots\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3(16)} + \frac{1}{(5)(64)} + \frac{1}{(7)(256)} + \ldots\ldots$$

$$= 0.25 + 0.0208 + 0.0031 + 0.0006 + \ldots\ldots$$

Después del cuarto término, la primera cifra significativa está después de la cuarta cifra decimal. Entonces, aproximando a cuatro términos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} \approx 0.2745$$

Redondeando a tres decimales:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} \approx 0.275$$

Ejercicio 37.

Tema: Secuencias. Convergencia y divergencia.

1. Determinar si las siguientes secuencias son convergentes o divergentes.

1.1 $1, 4, 7, \ldots\ldots, 3n - 2, \ldots\ldots$

1.2 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\ldots$

1.3 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\ldots$

1.4 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{3}, \ldots\ldots$

1.5 $1, -1, 1, -1, \ldots\ldots, (-1)^{n-1}, \ldots\ldots$

2. Establecer la ley de formación de los términos de las siguientes secuencias y determinar si son convergentes o divergentes.

2.1 $2, 4, 8, 16, \ldots\ldots$

2.2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$

2.3 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \ldots$

2.4 $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{27}, \ldots\ldots$

2.5 $\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{5}, \frac{6}{7}, \ldots\ldots$

2.6 $2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$

2.7 $5, 5, 5, 5, \ldots\ldots$

2.8 $(1)(2), (2)(3), (3)(4), (4)(5), \ldots$

2.9 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots$

2.10 $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{27}, \ldots\ldots$

3. Encontrar los primeros cuatro términos de las siguientes secuencias, dado el enésimo término u_n y determinar si son convergentes:

3.1 $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3.2 $u_n = 3 + 2n$

3.3 $u_n = \frac{1}{n^2}$

3.4 $u_n = (0.08)^n$

3.5 $u_n = 3\left(\frac{1}{5^n}\right)$

3.6 $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

3.7 $u_n = \frac{(-1)^n x^n}{n}$

3.8 $u_n = \frac{1}{n+1}$

3.9 $u_n = \frac{x^n}{n!}$

3.10 $u_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)$

<u>Ejercicio 38.</u>

Tema. Series geométricas. Regla de L'Hospital.

1. Determinar si las siguientes series geométricas son convergentes o divergentes. Cuando sean convergentes, encontrar el valor de la serie:

1.1 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3})^{n-1} = 1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ldots\ldots$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1000} = \frac{3}{1000} + \frac{9}{1000} + \frac{27}{1000} + \ldots\ldots$

1.4 $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots\ldots$

1.5 $8 + 4 + 2 + 1 + \ldots\ldots$

2. Encontrar la fracción de que provienen los siguientes números decimales.

2.1	0.858585.......	2.5	0.87777........
2.2	0.9999	2.6	3.181818.......
2.3	0.125125125	2.7	0.21400400400.....
2.4	0.3225	2.8	12.121212 ....

3. Si la expansión del ingreso es determinada por el multiplicador $m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}$, encontrar una fórmula para <u>m</u> cuando α está entre cero y uno. Determinar el multiplicador cuando la propensión marginal al consumo es $\alpha = 0.6$.

4. Si la propensión marginal al ahorro es igual a 0.25, encontrar la propensión marginal al consumo α y el multiplicador del ingreso <u>m</u>.

5. Evaluar los siguientes límites, aplicando la regla de L'Hospital cuando sea necesario:

5.1 $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

5.4 $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2}\right)$

5.2 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ 5.5 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{1 - x}\right)$

5.3 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$ 5.6 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x + x}{x^2 \ln x}$

Ejercicio 39.

Tema: Convergencia y divergencia de series de términos positivos.

1. Demostrar que las siguientes series son divergentes porque el límite del enésimo término cuando n tiende a infinito es diferente de cero:

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \ldots\ldots\ldots$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \ldots\ldots\ldots$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n - 1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \ldots\ldots$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots\ldots$

2. Determinar si las siguientes series son convergentes ó divergentes:

2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n + 1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots\ldots\ldots$

2.2 $\displaystyle\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{4n + 1} + \ldots\ldots$

2.3 $\displaystyle 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\,(4)^{n-1}}$

2.5 $\displaystyle\frac{1}{(1)\,(2)} + \frac{1}{(2)\,(2^2)} + \frac{1}{(3)\,(2^3)} + \frac{1}{4(2^4)} + \ldots\ldots$

2.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$

2.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots$

2.8 $\displaystyle\frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} + \frac{5}{\ln 5} + \ldots\ldots\ldots$

2.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \ldots\ldots$

2.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\,n^2}$

2.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\,(n + 1)}$

2.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n\sqrt{n}}$

2.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\,(n+1)}$

* 2.14 $\displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4}}$

2.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$

Ejercicio 40.

Tema. Series alternantes: Series de potencias.

1. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes. En caso de que sean convergentes, investigar si son absolutamente convergentes.

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n - 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

2. Encontrar el valor de la siguiente serie aproximado a 5 decimales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots\dots$$

3. Encontrar la suma de los primeros 10 términos de la siguiente serie y comparar el error, con respecto al valor de la serie, con el onceavo término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+4)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{(2)\,(6)} + \frac{1}{(3)\,(7)} - \frac{1}{(4)\,(8)} + \dots\dots$$

4. Encontrar el intervalo de convergencia de las siguientes series y representarlo gráficamente.

4.1 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\dots\dots$

4.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{1}{2!}\,x + \frac{1}{3!}\,x^2 + \dots\dots$

4.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

4.5 $(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots\dots$

4.6 $(x-2) + 2!\,(x-2)^2 + 3!\,(x-2)^3 + 4!\,(x-2)^4 + \dots\dots$

4.7 $\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{4}{16x^4} + \dots\dots\dots\dots$

4.8 $(x-3) + (x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4 + \dots\dots$

4.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2} = 1 + \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{9}\,x^2 + \dots\dots$

Ejercicio 41.

Tema: Desarrollo de funciones en serie. Aplicaciones.

1. Desarrollar en serie de Maclaurin (potencias de x) las siguientes funciones y determinar su intervalo de convergencia.

1.1 $f(x) = \ln(1-x)$

1.2 $f(x) = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$

1.3 $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

2. Desarrollar en serie de Taylor (potencias de $(x-c)$) las siguientes funciones; para el valor indicado de c y determinar su intervalo de convergencia.

2.1 $f(x) = \ln x \qquad c = 3$

2.2 $f(x) = e^{\frac{x}{3}} \qquad c = 3$

2.3 $f(x) = \ln(1+x) \qquad c = 0$

3. Encontrar el valor aproximado a cuatro decimales de ln 0.98 utilizando el desarrollo en serie de $\ln(1-x)$ encontrado en el problema 1.1.

4. Encontrar el valor aproximado a cuatro decimales de ln 1.04 utilizando el desarrollo en serie encontrado en el problema 2.3

5. Encontrar el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$ para encontrar el área aproximada limitada por la curva de $f(x)$, el eje de las x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Sugestión. Integrar la serie aproximada a 6 términos entre los límites $x = 0$ y $x = 1$.

6. Encontrar el valor aproximado a 3 decimales del número e utilizando el desarrollo en serie de $f(x) = e^{x/3}$ encontrado en el problema 2.2

Sugestión. Sustituir $c = 3$.

CAPITULO 11

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

11.1 Matrices. El estudio del álgebra de matrices y sus álgebras isomórficas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales, proporcionan la base matemática para el desarrollo de nuevas técnicas de optimización de funciones lineales de varias variables sujetas a condiciones laterales lineales. La programación lineal y el planteo y solución de modelos lineales exigen conocimientos básicos de esta rama de las matemáticas que se ha denominado Algebra Lineal.

Empezaremos por definir el concepto de matriz y la notación matemática que será utilizada. Las matrices se definen, en general, sobre los elementos de un sistema algebraico llamado campo. Limitaremos el estudio de las matrices al campo de los números reales, es decir, sus elementos serán del sistema de números reales, que satisface las condiciones necesarias para ser un campo.

La forma general de una matriz $m \times n$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sugestión. Integrar la serie aproximada a 6 términos entre los límites $x = 0$ y $x = 1$.

6. Encontrar el valor aproximado a 3 decimales del número e utilizando el desarrollo en serie de $f(x) = e^{x/3}$ encontrado en el problema 2.2

Sugestión. Sustituir $c = 3$.

CAPITULO 11

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

11.1 Matrices. El estudio del álgebra de matrices y sus álgebras isomórficas de Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales, proporcionan la base matemática para el desarrollo de nuevas técnicas de optimización de funciones lineales de varias variables sujetas a condiciones laterales lineales. La programación lineal y el planteo y solución de modelos lineales exigen conocimientos básicos de esta rama de las matemáticas que se ha denominado Algebra Lineal.

Empezaremos por definir el concepto de matriz y la notación matemática que será utilizada. Las matrices se definen, en general, sobre los elementos de un sistema algebraico llamado campo. Limitaremos el estudio de las matrices al campo de los números reales, es decir, sus elementos serán del sistema de números reales, que satisface las condiciones necesarias para ser un campo.

La forma general de una matriz $m \times n$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Def. Una matriz m x n es un arreglo en m hileras y n columnas de números reales.

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } 2 \times 3$$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1/5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } 3 \times 3$$

El doble subíndice en los elementos de la matriz permite identificar la posición de cualquier elemento, pues el primer subíndice indica el número de la hilera y el segundo subíndice indica el número de la columna a que pertenece cada elemento. Así, por ejemplo, a_{34} es el elemento que está en la 3a. hilera y en la cuarta columna de la matriz.

Si n = m, se tiene una matriz cuadrada. Si m = 1, la matriz es una matriz hilera y si n = 1, será una matriz columna. Es conveniente observar la semejanza entre una matriz cuadrada y un determinante y hacer notar que son conceptos matemáticos totalmente distintos. Una matriz es un arreglo de números, mientras que un determinante es un número que se obtiene de acuerdo con su definición.

Notación compacta. La matriz m x n se expresa en forma compacta de la siguiente manera:

$A = ((a_{ij}))\ m \times n$ donde: a_{ij} = Elemento en la hilera i y columna j.

La hilera i se denota para $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots a_{in})$

La columna j se denota por:

$$A^{(j)}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Nótese que A_i es una matriz 1 x n ; $A^{(j)}$ es una matriz m x 1.

11.2 Transformaciones elementales en hileras. De acuerdo con su definición, las matrices constituyen un conjunto infinito de elementos, (arreglos de números reales en m hileras y n columnas), sobre los cuales definiremos operaciones para formar propiamente un álgebra que es el álgebra de las matrices. Antes de definir operaciones con matrices, definiremos las llamadas "Transformaciones elementales en hileras" de una matriz con el propósito de relacionar las matrices con los sistemas de ecuaciones lineales y al mismo tiempo motivar el estudio del álgebra de matrices aplicando estos conceptos fundamentales a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Consideremos primeramente las siguientes definiciones:

Def. Multiplicar una hilera de una matriz por un número real c es multiplicar cada elemento de la hilera por el número real en cuestión.

$$c\,A_i = c\,(a_{i1}, a_{i2}, \ldots\ldots a_{in}) = (c\,a_{i1}, c\,a_{i2}, \ldots, c\,a_{in})$$

Def. Sumar 2 hileras de una matriz es sumar sus elementos correspondientes.

En nuestra notación:

$$A_i + A_h = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) + (a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn})$$
$$= (a_{i1} + a_{h1}, a_{i2} + a_{h2}, \ldots, a_{in} + a_{hn})$$

Las transformaciones elementales en hileras son las siguientes:

(i) Intercambio de 2 hileras cualquiera.

(ii) Multiplicación de una hilera por un número real diferente de cero.

(iii) Suma de un múltiplo cualquiera de una hilera a otra hilera.

Observemos el efecto de estas transformaciones en la matriz general m x n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transformación (i) intercambia 2 hileras de la matriz, digamos A_i y A_j y el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transformación (ii) multiplica la hilera A_i por un número real c diferente de cero y el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots\cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La transformación (iii) suma un múltiplo de A_j a la hilera A_i y el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \cdots\cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>11.3 Equivalencia de matrices</u>. Una matriz A es equivalente a otra matriz B si puede transformarse A en B por medio de un número finito de transformaciones elementales en hileras.

<u>Notación</u>: La relación A es equivalente a B se denota por $A \sim B$.

La relación $A \sim B$ es una relación de equivalencia, es decir, satisface las leyes reflexiva, simétrica y transitiva.

1. <u>Ley reflexiva</u>. Cualquier matriz A es equivalente a si misma $A \sim A$. Esta ley es inmediata de la definición de equivalencia.

2. Ley simétrica. Si A es equivalente a B, entonces B es equivalente a A. En símbolos:

$$\text{Si } A \sim B, \quad \text{entonces} \quad B \sim A.$$

Esta ley se deduce de que para cada una de las transformaciones elementales en hileras puede encontrarse a otra transformación elemental en hileras que invierte el efecto de la primera. Por ejemplo, el efecto de la transformación que intercambia la hilera A_i con la hilera A_j puede invertirse por medio de la transformación que intercambia la hilera A_j con la hilera A_i.

Si $A \sim B$, entonces, por definición, puede transformarse A en B por medio de un número finito de transformaciones en hileras. Aplicando las transformaciones inversas, puede transformarse B en A por medio de un número finito de transformaciones elementales en hileras. Es decir, $B \sim A$.

3. Ley transitiva. Si A es equivalente a B y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C. En símbolos:

$$\text{Si} \quad A \sim B \quad \text{y} \quad B \sim C, \text{ entonces} \quad A \sim C.$$

Esta ley también es inmediata de la definición de equivalencia de matrices.

11.4 Formas reducidas de una matriz. Por medio de transformaciones elementales en hileras, podemos reducir una matriz a ciertas formas específicas que son útiles para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Las formas reducidas que utilizaremos son las siguientes:

1. Forma reducida inferior. Se dice que una matriz tiene una forma reducida inferior si, después de aplicarle transformaciones elementales convenientes, cuando esto sea necesario, satisface las siguientes condiciones:

a) El primer elemento diferente de cero (elemento principal) de cada hilera es uno.

b) Todos los elementos bajo el elemento principal de cada hilera son cero.

2. Forma reducida en escalón. Es una forma reducida inferior que además satisface las siguientes condiciones:

c) Los elementos sobre cada elemento principal son cero.

d) Las hileras de ceros, si las hay, aparecen al final.

e) Sea hi el número de la columna que contiene al elemento principal de la hilera i. Entonces: $h_i < h_j$ si $i < j$. Esto significa que los elementos principales de la matriz están escalonados a la derecha y hacia abajo.

Ejemplos.

1. Encontrar una forma reducida inferior de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para las transformaciones elementales que se aplicarán a la matriz, utilizaremos números encerrados en círculos para indicar multiplicación de la hilera por el número en cuestión y flechas para indicar intercambio de hileras o suma de un múltiplo de una hilera a otra:

$$-2 \quad -3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} \\ -4 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{27} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

La última matriz B es una forma reducida inferior de la matriz A.

Nótese que el camino seguido para encontrar la forma reducida es un proceso sistemático en el que se aplica una sucesión de transformaciones elementales para satisfacer las condiciones necesarias. La primera condición es que el primer elemento diferente de cero en la primera hilera sea uno. En el ejemplo, esta condición se satisface en la matriz original A. Después los elementos bajo el elemento principal de la primera hilera deben ser ceros, lo cual se consigue sumando a las hileras después de la primera, múltiplos apropiados de la primera hilera. El siguiente paso es que el elemento principal de la segunda hilera sea uno, lo cual se consigue por medio de transformaciones elementales con las hileras después de la primera tratando de evitar fracciones que complicarían los cálculos posteriores. En el peor de los casos, hay que dividir entre el primer elemento diferente de cero de la segunda hilera para obtener un uno como elemento principal. Este proceso se repite hasta satisfacer todas las condiciones necesarias.

Para la forma reducida en escalón, el proceso es completamente semejante:

Por ejemplo:

Encontrar la forma reducida en escalón de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando las mismas indicaciones que en ejemplo anterior:

$$\begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{1}{\overset{2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \underset{1/11}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 17 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 10 \end{pmatrix} \underset{-17 \quad -8}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 17 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10/14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/11 \\ 0 & 1 & 0 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & 10/11 \end{pmatrix} = B$$

La matriz B es la forma reducida en escalón buscada.

<u>Sistemas de ecuaciones lineales</u>. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, tenemos los métodos de eliminación estudiados en el álgebra elemental. Estos métodos resultan sumamente laboriosos cuando el número de incógnitas en el sistema es grande, digamos más de 3 incógnitas. El <u>método de Gauss</u> es un proceso organizado de eliminación que, con la ayuda de matrices y form reducidas, resulta ser uno de los mejores métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

<u>Sistemas cuadrados</u>. Consideremos la forma general de un sistema de <u>n</u> ecuaciones lineales con <u>n</u> incógnitas:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots\cdots + a_{1n} X_n = b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots\cdots + a_{2n} X_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots\cdots + a_{nn} X_n = b_n \end{array} \right.$$

La eliminación gaussiana consiste en eliminar $\underline{X_1}$ en todas las ecuaciones después de la primera. Después, eliminar $\underline{X_2}$ en todas las ecuaciones después de la segunda, y así sucesivamente hasta la incógnita X_{n-1} que se elimina en la última ecuación. Al terminar este proceso y si el sistema I es consistente, se obtiene un sistema equivalente que se transforma en la <u>forma reducida de Gauss</u>, dividiendo cada ecuación entre su primer coeficiente. Es decir, el sistema original se reduce al siguiente sistema:

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{r} X_1 + C_{12} X_2 + C_{13} X_3 + \cdots\cdots + C_{1n-1} X_{n-1} + C_{1n} X_n = d_1 \\ X_2 + C_{23} X_3 + \cdots\cdots + C_{2n-1} X_{n-1} + C_{2n} X_n = d_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ X_{n-1} + C_{n-1n} X_n = d_{n-1} \\ X_n = d_n \end{array} \right.$$

De la última ecuación se tiene el valor de $X_n = d_n$. De la penúltima ecuación, se obtiene X_{n-1} en términos de X_n cuyo valor d_n ya se conoce y así sucesivamente hasta llegar a X_1.

De la forma reducida de Gauss (II), se obtiene la siguiente fórmula para obtener cada incógnita en términos de las que le siguen:

$$X_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} C_{ij} \quad X_j$$

El método de Gauss puede efectuarse trabajando únicamente con el cuadro de coeficientes y los términos independientes de las cuaciones del sistema. Consideremos la siguiente definición:

<u>11.5 Matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales.</u> Es la matriz que se obtiene agregando a la matriz del cuadro de coeficiente, la columna de términos independientes.

En nuestro sistema general I, la <u>matriz asociada</u> es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

De acuerdo con ésto, hemos establecido una ley de correspondencia que asocia a cada sistema de ecuaciones, una matriz y a cada matriz, el correspondiente sistema de ecuaciones. Inmediatamente podemos deducir el siguiente:

<u>Lema:</u> Matrices equivalentes corresponde a sistemas de ecuaciones lineales equivalentes, es decir, sistemas que tienen exactamente las mismas soluciones.

<u>Demostración:</u> Si en la matriz asociada al sistema, efectuamos transformaciones elementales en hileras, obtenemos una matriz equivalente y el efecto de cada transformación elemental en hileras sobre el sistema correspondiente es el siguiente:

1. El intercambio de 2 hileras produce un intercambio de las 2 correspondientes ecuaciones en el sistema.
2. La multiplicación de una hilera por un número real diferente de cero equivale a multiplicar la ecuación correspondiente por ese número.
3. La suma de un múltiplo de una hilera a otra hilera, equivale a sumar un múltiplo de una ecuación a otra del sistema.

Puesto que éstas transformaciones conducen a sistemas equivalentes en el sentido de tener las mismas soluciones, se concluye que matrices equivalentes corresponden a sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Con la ayuda del lema que acabamos de demostrar, el método de Gauss puede realizarse de la siguiente manera:

1. Se ordenan las incógnitas en las ecuaciones para obtener la matriz asociada al sistema.
2. Por transformaciones elementales en hileras se encuentra la forma reducida inferior.
3. Se establece el sistema correspondiente a la forma reducida inferior que tendrá las características de la forma reducida de Gauss de un sistema de ecuaciones.
4. Se resuelve como antes, determinando los valores de las incógnitas de atrás para adelante, es decir, empezando con X_n y terminando con X_1. Este último paso del proceso puede efectuarse directamente de la matriz en su forma reducida inferior eliminando el paso 3.

<u>Ejemplo:</u> Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 - X_2 - 2X_3 = 5 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

La matriz A, asociada al sistema es:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Encontramos ahora su forma reducida inferior:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = B \text{ (forma reducida inferior).}$$

De la ecuación correspondiente a la última hilera, se obtiene: $X_3 = -3$. De la hilera anterior:

$$X_2 + X_3 = -1$$

Sustituyendo $X_3 = -3$

$$\therefore\ X_2 - 3 = -1$$

$$X_2 = 2$$

De la primera hilera:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 2$$

$$X_1 = 2 - 2X_2 - X_3$$

Sustituyendo X_2 y X_3:

$$X_1 = 2 - 4 + 3$$

$$X_1 = 1$$

Entonces la solución es $X_1 = 1$; $X_2 = 2$; $X_3 = -3$.

11.6 Método de Gauss-Jordán. Si el sistema general cuadrado (I) es consistente y la matriz asociada al sistema se transforma a su

forma reducida en escalón, entonces se obtienen los valores de las incógnitas en la última columna porque la matriz asociada se reduce a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 1 & k_n \end{array}\right)$$

Entonces, el sistema correspondiente a esta forma reducida es precisamente:

$$X_1 = K_1 \ ; \ X_2 = K_2 \ ; \ \ldots\ldots \ ; \ X_n = K_n$$

Esta variante del método de Gauss se conoce como el método de Gauss-Jordán y aparentemente es mejor que el primero. Se puede demostrar que el método de Gauss-Jordán generalmente requiere mayor número de operaciones numéricas que el método de Gauss. Sin embargo, todas las operaciones numéricas se hacen sistemáticamente a través de las transformaciones elementales en hileras y se obtienen los valores de las incógnitas directamente de la forma reducida en escalón.

Ejemplo: Consideremos el sistema que resolvimos en el ejemplo anterior. Aprovechando la forma reducida inferior, encontremos la forma reducida en escalón:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

De la forma reducida en escalón, se obtienen los valores de las incógnitas en la última columna:

$$X_1 = 1 \ ; \ X_2 = 2 \ ; \ X_3 = -3$$

<u>11.7 Sistemas rectangulares</u>. Los sistemas rectangulares de <u>m</u> ecuaciones lineales con <u>n</u> incógnitas pueden resolverse con la ayuda de la matriz asociada y sus formas reducidas. Consideremos primeramente el sistema general con mayor número de incógnitas que de ecuaciones. $(m < n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema es la siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Supongamos que en la forma reducida inferior resultan <u>r</u> hileras diferentes de cero, con $r \leq m$. Entonces, si denotamos por <u>B</u> a la matriz equivalente a <u>A</u> y correspondiente a la forma reducida inferior, eliminando las hileras de ceros, se tiene:

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & C_{12} & C_{13} & \cdots\cdots & C_{1n} & d_1 \\ 0 & & C_{23} & \cdots\cdots & C_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots C_{r\,r+1} & \cdots & C_{rn} & d_r \end{array}\right)$$

<u>Nota</u>: Las hileras de ceros se eliminan porque corresponden a ecuaciones de la forma o = o que no contribuyen a la solución del sistema. De la última ecuación correspondiente a esta forma reducida se obtiene <u>x_r</u> en términos de x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n. De la

misma manera se obtienen las demás incógnitas en términos de las que le siguen. Entonces la fórmula general para las incógnitas resulta:

$$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} C_{ij}\, x_j \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Ahora, si la matriz asociada al sistema se transforma a su forma reducida en escalón <u>C</u>, se tiene:

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots\cdots & e_{1r+1} & \cdots\cdots\; e_{1n} & f_1 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & e_{2r+1} & \cdots\cdots\; e_{2r} & f_2 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 1 & e_{r\,r+1} & \cdots\cdots\; e_{rn} & f_r \end{array}\right)$$

Entonces, de las ecuaciones correspondientes a esta forma reducida se obtienen las incógnitas x_1, x_2 ....., x_r en términos de las incógnitas x_{r+1}, x_{r+2}, ... x_r, las cuales pueden tomar valores arbitrarios. La fórmula general para las incógnitas resulta la siguiente:

$$x_i = f_i - \sum_{j=r+1}^{n} e_{ij}\, x_j \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n \text{ : Arbitrarias.}$$

En este caso, se dice que el sistema es <u>indeterminado</u> porque tiene una infinidad de soluciones. Si en el sistema asociado a la forma reducida aparece una contradicción, por ejemplo o = 5, entonces el sistema no tiene solución y se dice que es <u>imposible</u>. (Ver ejemplo 2).

<u>Ejemplo 1</u>.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>Solución</u>. Consideremos la matriz asociada para obtener su forma reducida en escalón:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
-2 & 1 & 2 & 1 & 15 \\
 & 2 & -1 & -1 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 15 \\
-1/5 & 0 & -5 & -3 & -27 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 15 \\
-2 & 0 & 1 & 3/5 & 27/5 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1/5 & 21/5 \\
 & 0 & 1 & 3/5 & 27/5 \\
\hline
\end{array}
$$

Entonces: $x_1 = \frac{21}{5} + \frac{1}{5}\, x_3$ $\qquad x_3$: arbitrario

$$x_2 = \frac{27}{5} - \frac{3}{5}\, x_3$$

El sistema es indeterminado porque para cada valor de $\underline{x_3}$, encontramos una solución. Por ejemplo. Para $x_3 = 4$:

$$x_1 = \frac{21}{5} + \frac{4}{5} = 5$$

$$x_2 = \frac{27}{5} - \frac{12}{5} = 3$$

Entonces, $x_1 = 5$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$ forman una solución del sistema.

Ejemplo 2. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

Solución:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
-2 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
 & 2 & 2 & -2 & 12 \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

De la última ecuación correspondiente a esta forma reducida se tiene: $0 = 2$. Entonces el sistema es <u>imposible</u> porque no tiene solución debido a la contradicción obtenida. En este ejemplo, las ecuaciones del sistema corresponden a dos planos paralelos en el espacio de 3 dimensiones y por lo tanto no tienen puntos en común.

Consideremos ahora los sistemas de ecuaciones lineales con mayor número de ecuaciones que de incógnitas. En este caso también podemos utilizar la matriz asociada y las formas reducidas, para resolver el sistema o decidir que es imposible.

<u>Ejemplo</u>. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$$

<u>Solución</u>. La matriz asociada es la siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Encontremos su forma reducida inferior:

$$
\begin{array}{rr|rr|r}
-2 & -1 & 1 & 1 & 5 \\
 & & 1 & -1 & 3 \\
 & & 2 & 3 & 15 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 5 \\
 & -1/2 & 0 & -2 & -2 \\
 & & 0 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 5 \\
 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 5 \\
 & & 0 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 0 & 4 \\
\end{array}
$$

De la última ecuación se obtiene la contradicción $0 = 4$. Entonces, el sistema es imposible, es decir, no tiene solución. En este ejemplo, las ecuaciones del sistema corresponden a 3 líneas rectas en el plano que no tienen punto en común.

Observación. El rango de una matriz se define como el número de hileras no-cero en una forma reducida de la matriz. Entonces, el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales es menor o igual que el rango de la matriz asociada al sistema y se obtiene la siguiente conclusión:

a) El sistema no tiene solución, si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la matriz asociada al sistema.

b) El sistema tiene solución, una o una infinidad, si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz asociada.

11.8 Algebra de matrices. Hasta ahora, hemos definido las matrices, las transformaciones elementales en hileras y las formas reducidas de una matriz. Definiremos ahora el concepto de igualdad y operaciones entre las matrices para formar propiamente el álgebra de las matrices.

Igualdad de matrices. Dos matrices son iguales si sus elementos semejantemente dispuestos son iguales:

Si $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$, entonces:

$A = B$ si $a_{ij} = b_{ij}$; para todo i, j.

Observación: La definición de igualdad implica que para que 2 matrices sean iguales, deben ser de las mismas dimensiones y además idénticas. La relación de igualdad entre matrices es propiamente una relación de equivalencia, es decir, satisface las leyes reflexiva simétrica y transitiva.

1. Ley reflexiva: $A = A$ para cualquier matriz A. Esta ley es inmediata de la definición.

2. Ley simétrica: Si $A = B$, entonces $B = A$. Esta ley también es trivial de la definición y de la ley simétrica en el álgebra ordinaria de los números reales.

3. Ley transitiva. Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

Demostración.

Hipótesis: $A = B$, es decir $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y j. Además $B = C$, es decir $b_{ij} = c_{ij}$ para todo i y j.

Entonces, por la ley transitiva de las igualdades en el álgebra ordinaria de los números reales: $a_{ij} = c_{ij}$ para todo i y j.

Es decir, de acuerdo con la definición de igualdad: $A = C$.

Operaciones.

I. Suma. La suma de 2 matrices $m \times n$ A y B es otra matriz $m \times n$ cuyos elementos se encuentran sumando los elementos correspondientes de A y B.

En símbolos: Si $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$

$$A + B = ((a_{ij})) + ((b_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij}))$$

Nótese que para que 2 matrices sean sumables, es necesario que sean de las mismas dimensiones.

Propiedades de la suma. La suma de matrices tiene las mismas propiedades que la suma de los números reales.

1. Ley asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ para cualquier matrices A, B y C, que sean sumables.

Demostración. Sean: $A = ((A_{ij}))$; $B = ((b_{ij}))$; $C = ((C_{ij}))$

Entonces; $$\begin{aligned}(A + B) + C &= \left[((a_{ij})) + ((b_{ij}))\right] + ((C_{ij}))\\ &= ((a_{ij} + b_{ij})) + ((C_{ij}))\\ &= (((a_{ij} + b_{ij}) + C_{ij}))\\ &= ((a_{ij} + (b_{ij} + C_{ij})))\end{aligned}$$

$$= ((a_{ij})) + ((b_{ij} + c_{ij}))$$

$$= ((a_{ij})) + (((b_{ij})) + ((c_{ij})))$$

$$= A + (B + C)$$

2. Ley conmutativa. $A + B = B + A$ para cualquier 2 matrices $m \times n$ A y B. La demostración es semejante a la anterior.

3. Matriz nula. Para cualquier matriz. A $m \times n$, existe otra matriz 0 mxn tal que : $A + 0mxn = 0mxn + A = A$.

A la matriz 0 mxn se le llama matriz nula y hace las veces del cero en la suma del álgebra ordinaria de los números reales.

4. Inversa de suma. Para cualquier matriz. A mxn existe otra matriz $-A$, mxn cuyos elementos son los negativos de los elementos de A tal que:

$$A + (-A) = 0mxn$$

Demostración: $A + (-A) = ((a_{ij})) + ((-a_{ij}))$

$$= ((a_{ij} - a_{ij})) = ((0_{ij})) = 0mxn$$

Observación. El sistema algebraico de las matrices tiene, hasta ahora, las mismas características del álgebra ordinaria de los números reales. El álgebra moderna llama Grupo a una estructura matemática con las características hasta ahora establecidas, es decir, el álgebra de matrices es un grupo conmutativo bajo la operación de suma. Se le llama conmutativo porque satisface la ley conmutativa que no es una condición necesaria para ser grupo.

II. Multiplicación por escalar. Si c es un escalar (número real cualquiera) y A es una matriz mxn, entonces la multiplicación de c por A es otra matriz mxn, cuyos elementos son los de A multiplicados por c.

En símbolos: $c\,A = c\,((a_{ij})) = ((c\,a_{ij}))$

Propiedades de la multiplicación por escalar.

1. Ley asociativa: $c_1\,(c_2\,A) = (c_1\,c_2)\,A$.
2. Ley distributiva. a) $c\,(A + B) = c\,A + c\,B$ para cualquier 2 matrices mxn A y B y cualquier escalar c.

   b) $(c_1 + c_2)\,A = c_1\,A + c_2\,A$ para cualquier 2 reales c_1 y c_2.
3. Cero: $0\,A = 0mxn$ para cualquier A mxn.
4. Identidad: $1\,A = A$ para cualquier A mxn.

Las demostraciones de éstas propiedades son inmediatas de la definición y de las propiedades algebraicas de los números reales. El estudiante puede hacerlas como ejercicio.

Ejemplos:

1. Dadas las siguientes matrices, encontrar el resultado de las operaciones indicadas cuando la expresión tenga sentido:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

1.1 $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.2 $A + D + C$. Resp.: No son sumables.

1.3 $A + B + D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 11 & -7 \end{pmatrix}$

1.4 $B - D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

1.5 $5C = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -15 & 20 \end{pmatrix}$

1.6 $3A - 2C$. Resp. No tiene sentido.

1.7 $$4A - 6D + 3B = 4\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 5 & 8 & -3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 12 & 8\\ 8 & 4 & -16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6 & -6 & 12\\ -30 & -48 & 18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & -3 & 0\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-5 & 3 & 20\\ -22 & -38 & 2\end{pmatrix}$$

III. Multiplicación de matrices. El producto de una matriz A $\underline{mxn}$ por otra matriz B $\underline{nxp}$ es otra matriz C $\underline{mxp}$ en la que cada elemento se encuentra sumando los productos de los elementos de la hilera que lo contiene en el primer factor por los correspondientes elementos de la columna que lo contiene en el gundo factor.

En símbolos, sean:

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$B = ((b_{jk})) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np}\end{pmatrix}$$

Entonces: $AB = C = ((c_{ik}))$ donde: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$

$= a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \cdots + a_{in}\, b_{nk}$

En particular, si $\underline{D}$ es una matriz hilera y $\underline{E}$ es una matriz columna se tiene: $D = (d_{11}\; d_{12}\; \cdots\; d_{1n})$ $\underline{1 \times n}$

$$E = \begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{21}\\ \vdots\\ e_{n1}\end{pmatrix} \quad \underline{n \times 1}$$

$$DE = (d_{11}\; d_{12}\; \cdots\; d_{1n}) \begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{21}\\ \vdots\\ e_{n1}\end{pmatrix} = d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} - \cdots + d_{1n}\, e_{n1} = \sum_{j=1}^{n} d_{1j}\, e_{j1}$$

Entonces si expresamos nuestra matriz general A $\underline{mxn}$ denotando sus hileras con la notación establecida, es decir $A_i = (a_{i1}\; a_{i2}\; \cdots\; a_{in})$ y la matriz B $\underline{nxp}$ denotando sus columnas de manera semejante, es decir $B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{k1}\\ b_{k2}\\ \vdots\\ b_{kp}\end{pmatrix}$ resulta, de acuerdo con la definición:

$$AB = ((a_{ij}))\;((b_{jk})) = \begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} (B^{(1)}\; B^{(2)} \cdots B^{(k)} \cdots B^{(p)})$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B^{(1)} & A_1 B^{(2)} & \cdots & A_1 B^{(p)}\\ A_2 B^{(1)} & A_2 B^{(2)} & \cdots & A_2 B^{(p)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_m B^{(1)} & A_m B^{(2)} & \cdots & A_m B^{(p)}\end{pmatrix}$$

De este resultado se deducen las siguientes observaciones importantes respecto a la multiplicación de matrices:

1. La primera hilera del primer factor "genera" la primera hilera del producto al multiplicarse por las columnas del segundo factor. En general, la hilera $\underline{i}$ del primer factor "genera" de manera semejante la hilera $\underline{i}$ del producto.

2. Si A es $\underline{mxn}$ y B es $\underline{nxp}$, entonces A B = C es $\underline{mxp}$. Es decir el producto tiene tantas hileras como el primer factor y tantas columnas como el segundo factor.

3. Para que 2 matrices sean multiplicables, es necesario que el número de columnas del primer factor sea igual al número de hileras del segundo factor.

Ejemplo.

Si:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Encontrar C = A B

Resp.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 8 & 10 & -1 \\ -4 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

La multiplicación puede organizarse convenientemente para comprobar los resultados de la siguiente manera:

							Σ	
				1	3	1	5	
				2	1	3	6	(2o. Factor)
				5	1	-4	2	
	2	-1	1	5	6	-5	6	
	3	0	1	8	10	-1	17	
(1er.Factor)	4	1	-2	-4	11	15	22	(Resultado)
	Σ 9	0	0	9	27	9		

Las comprobaciones pueden hacerse sumando las columnas del 1er. factor para formar otra hilera como se indica en el ejemplo y multiplicando esta nueva hilera por las columnas del segundo factor para obtener una hilera adicional en el producto que debe ser la suma de las columnas del producto. La base de esta comprobación son las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales. Otra comprobación semejante puede hacer sumando las hileras del segundo factor para formar una nueva columna y multiplicando las hileras del primer factor por esta nueva columna para obtener una columna adicional en el producto que debe ser la suma de las hileras del producto.

Propiedades de la multiplicación.

1. Ley asociativa: A (BC) = (AB) C para cualquier matrices A, B y C que sean multiplicables en orden indicado.

2. Ley distributiva. A (B + C) = A B + A C para cualquier matrices B y C que sean sumables y multiplicables por la izquierda por la matriz A.

3. Cero. Si A es $\underline{mxn}$, entonces:

$$A\ 0_{nxp} = 0_{mxp}$$

4. Identidad. Si A es una matriz cuadrada $\underline{nxn}$ entonces:

$$A\, I_n = I_n\, A = A \quad \text{donde}$$

I_n es una matriz $\underline{nxn}$ con unos en la diagonal principal y ceros fuera de la diagonal principal. Es decir:

$$I_n = ((\delta_{ij})) \text{ donde: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad i = j \\ 0 & \text{Si} \quad i \neq j \end{cases}$$

La demostración de estas propiedades se dejan como ejercicio.

Observación. La multiplicación de matrices no tiene todas las propiedades de la multiplicación en el álgebra ordinaria de los números reales. Por ejemplo, la ley conmutativa no es cierta, en general para la multiplicación de matrices. Es decir: A B $\neq$ B A, en general.

Esta y otras propiedades del álgebra ordinaria que no se cumplen en el álgebra de matrices debilitan su estructura y es importante tener plena conciencia de sus limitaciones para evitar errores.

Potencias de matrices. Habiendo definido la multiplicación de matrices en general, podemos concentrar nuestra atención en las matrices cuadradas para definir el concepto de potencia entera positiva.

Def. Si A es una matriz cuadrada nxn y p es un número entero positivo:

$$A^p = \underbrace{A\,A\,A\,.....\,A}_{p \text{ factores}}$$

Las propiedades inmediatas de esta definición son las siguientes:

1. $A^p \; A^q = A^{p+q}$
2. $(A^p)^q = A^{pq}$

Nótese que estas propiedades corresponden a 2 de las 5 leyes fundamentales de exponentes en el álgebra de los números reales. Por otra parte la potencia de matrices cuadradas que hemos definido tiene la siguiente falla, que es una consecuencia de la no conmutatividad de la multiplicación:

$$(AB)^p \neq A^p B^p, \text{ en general.}$$

El concepto de potencia tiene importancia para ciertos modelos dinámicos en economía, en los que se utilizan conceptos como los siguientes:

Def. Si $A^p = 0$, entonces A es Nul-potente de índice p.

Def. Si $A^2 = A$, entonces se dice que A es idem-potente.

Def. Si $A^{k+1} = A$, entonces A es periódica de periodicidad k.

11.9 Traspuesta de una matriz cuadrada. Es otra matriz cuadrada cuyas columnas son las correspondientes hileras de la matriz original. En símbolos: Si $A = ((a_{ij}))$ es nxn, entonces.

$$\text{Traspuesta de } A = A' = ((a_{ji}))$$

Nótese que A' puede obtenerse de la matriz A reflejando todos sus elementos sobre la diagonal principal.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Las propiedades de la traspuesta son las siguientes:

1. La traspuesta de la traspuesta de A es igual a A. Es decir $(A')' = A$.

Dem. Si $A = ((a_{ij}))$ es nxn, entonces por la definición:

$A' = ((a_{ji}))$ y reaplicando la definición se obtiene:

$(A')' = ((a_{ij})) = A$

2. $(kA)' = kA'$ para cualquier número real k.

Dem. Sea $A = ((a_{ij}))$ nxn

$kA = ((ka_{ij}))$ por definición.

Ahora: $(kA)' = ((ka_{ij}))' = ((ka_{ji}))$; por definición

Entonces $(kA)' = k\,((a_{ji})) = kA'$

3. La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas de los sumandos. Es decir. $(A + B)' = A' + B'$.

Dem: Sea $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{ij}))$, dos matrices nxn.

$$A + B = ((a_{ij} + b_{ij})) \text{ por definición de suma}$$

$$(A + B)' = ((a_{ji} + b_{ji})) \text{ por definición de traspuesta.}$$

$$= ((a_{ji})) + ((b_{ji})) = A' + B'$$

4. La traspuesta de un producto es igual al producto de las traspuestas de los factores en orden inverso. Es decir: $(AB)' = B'\,A'$.

Dem. Sea $A = ((a_{ij}))$ y $B = ((b_{jk}))$, dos matrices nxn. El elemento general del producto $C = AB$ es, por definición:

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

$$\text{Ahora: } (AB)' = C' = ((C_{ik}))' = ((C_{ki})) = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji}\right)\right)$$

Por otra parte desarrollando $B'\,A'$ y observando que los subíndices i y k varían ambos de 1 a n, se encuentra que:

$$(A\,B)' = B'\,A'$$

11.10 Matriz simétrica. Es aquella en la que los elementos semejantemente situados con respecto a la diagonal principal, son iguales. Es decir:

$A = ((a_{ij}))$ es simétrica, si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & -5 \end{pmatrix} \text{ es una matriz}$$

simétrica 3 x 3.

Corolario. Si A es simétrica, entonces $A' = A$.

Matriz anti-simétrica. Es aquella en la que los elementos semejantemente situados con respecto a la diagonal principal son iguales pero de signo contrario. Es decir:

$A = ((a_{ij}))$ es anti-simétrica si:

$a_{ij} = -\,a_{ji}$ para todo i y j

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ Es una matriz anti-simétrica } \underline{4 \times 4}$$

Corolario. Si A es anti-simétrica; entonces: $A' = -A$. Inmediatamente se deduce que si A es anti-simétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros.

11.11 Inversa de una matriz. La matriz inversa A^{-1} de una matriz cuadrada A nxn es otra matriz cuadrada tal que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$

La inversa de una matriz cuadrada no siempre existe según veremos adelante.

La propiedad fundamental de la inversa es la siguiente:

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

Nótese el cambio de orden en el producto de las inversas (lado derecho de la ecuación). Además, es necesario que A y B tengan inversas para que ésto tenga sentido.

El problema de la determinación de la inversa de una matriz cuadrada A es uno de los temas fundamentales del álgebra de matrices por sus múltiples aplicaciones. Existen diversos métodos para resolverlo, de los cuales serán considerados los 2 métodos que utilizan los conceptos establecidos, además de la teoría de determinantes que condensaremos en seguida. (Capítulo 12).

Antes de atacar el problema de la determinación de la inversa, veamos una motivación en nuestro objetivo fundamental que es la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

El sistema general de n ecuaciones con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,X_1 + a_{12}\,X_2 + \cdots + a_{1n}\,X_n = b_1 \\ a_{21}\,X_1 + a_{22}\,X_2 + \cdots + a_{2n}\,X_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\,X_1 + a_{n2}\,X_2 + \cdots + a_{nn}\,X_n = b_n \end{cases}$$

Esta expresión general para el sistema lineal puede compactarse utilizando sumatorias simples:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}\,X_j = b_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}\,X_j = b_2 \\ \qquad \vdots \quad \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}\,X_j = b_n \end{cases}$$

Esto puede expresarse en forma más compacta utilizando una sola sumatoria, de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,X_j = b_i \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Consideremos ahora, la matriz del cuadro de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si las incógnitas las expresamos en una matriz columna :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Los términos independientes los reunimos también en una matriz columna:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema puede expresarse en términos de matrices de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O sea: $\underline{AX = B}$

Supongamos que la inversa A^{-1} de la matriz cuadrada A existe. Entonces multiplicando ambos lados de la ecuación por A^{-1} por la izquierda, se tiene:

$$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B$$

Por la ley asociativa y las definiciones de inversa e identidad, se tiene:

$$(A^{-1}\,A)\,X = A^{-1}\,B$$
$$I\,X = A^{-1}\,B$$
$$\underline{\underline{X = A^{-1}\,B}}$$

Entonces, la solución del sistema general de $\underline{n}$ ecuaciones lineales con $\underline{n}$ incógnitas, es igual al producto de la inversa de la matriz del cuadro de coeficientes por la matriz columna de términos independientes.

Ejercicio 42.

Tema: Matrices. Transformaciones elementales y formas reducidas.

1. Encontrar la forma reducida inferior de las siguientes matrices:

1.1 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 1.4 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1.5 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

2. Encontrar la forma reducida en escalón de las siguientes matrices.

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2.2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

2.3 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 10 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 2.4 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

2.5 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2.6 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 43.

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de Gauss y de Gauss-Jordán.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss:

1.1 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 14 \\ -3x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 14 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss-Jordán:

2.1 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 4 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$ 2.6 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \\ 7x_1 + 7x_2 = 12 \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 2.8 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

Ejercicio 44.

Tema: Matrices. Operaciones fundamentales.

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar el resultado de las siguientes operaciones cuando la expresión tenga sentido:

1.1 $A + B$	1.2 $A + C$
1.3 $B + C$	1.4 $A + B + C$
1.5 $A - B - C$	1.6 $A + B + D$
1.7 $A + B + C + D$	1.8 $A + D + E$
1.9 $3A + 2B$	1.10 $5B - 3D$
1.11 $3E - 2F$	1.12 $D - E + 2F$

2. Utilizando las matrices del problema anterior, encontrar la matriz X, tal que:

$$2A + 3C - B - 5X + 4C = C - A$$

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones cuando la expresión tenga sentido:

3.1 $A\,B$	3.2 $E\,A$
3.3 $A\,D$	3.4 $B\,D$
3.5 $A\,B\,C$	3.6 $A\,B\,D$
3.7 $C\,A\,B$	3.8 $A\,(B + D)$
3.9 $3\,A\,B - 2\,A$	3.10 $D\,B + B\,D - C$
3.11 $4\,C\,A\,(B - D)$	3.12 $(B + D)\,(B - D)$

Sugestión: Pueden utilizarse las propiedades de las operaciones y los resultados que se van obteniendo en los primeros problemas para resolver los últimos.

Ejercicio 45.

Tema: Potencias de matrices. Traspuesta. Matrices simétricas y anti-simétricas.

1. Verificar que la siguiente matriz es idem-potente.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Verificar que la siguiente matriz es nul-potente y determinar su orden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Encontrar: $A^3 - A^2 + 3A - 2I$, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Verificar que la siguiente matriz es periódica y determinar su periodicidad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y k = 6, verificar que $(k\,A)' = k\,A'$.

6. Verificar que $(A\,B\,C)' = C'B'A'$ para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada <u>nxn</u>, entonces:

7.1 $A + A'$ es una matriz simétrica

7.2 $A - A'$ es una matriz anti-simétrica

7.3 $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$. Es decir, cualquier matriz <u>nxn</u> puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una anti-simétrica.

8. a) Expresar el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Verificar que la siguiente matriz es la inversa del cuadro de coeficientes y resolver el sistema aplicando la fórmula $X = A^{-1}B$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

CAPITULO 12

<u>DETERMINANTES. INVERSA DE UNA MATRIZ</u>

12.1 <u>Determinantes</u>. Los determinantes son arreglos cuadrados de números en hileras y columnas que tienen un valor numérico de acuerdo con su definición. Las fórmulas para resolver los sistemas de ecuaciones lineales sugieren la definición de los determinantes, que simplifican notablemente la expresión para la solución general de los sistemas lineales.

Consideremos el sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquiera de los métodos de eliminación, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $k = 6$, verificar que $(k\ A)' = k\ A'$.

6. Verificar que $(A\ B\ C)' = C'B'A'$ para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada nxn, entonces:
   - 7.1 $A + A'$ es una matriz simétrica
   - 7.2 $A - A'$ es una matriz anti-simétrica
   - 7.3 $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$. Es decir, cualquier matriz nxn puede expresarse como la suma de una matriz simétrica y una anti-simétrica.

8. a) Expresar el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

   b) Verificar que la siguiente matriz es la inversa del cuadro de coeficientes y resolver el sistema aplicando la fórmula $X = A^{-1}\ B$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

CAPITULO 12

DETERMINANTES. INVERSA DE UNA MATRIZ

12.1 Determinantes. Los determinantes son arreglos cuadrados de números en hileras y columnas que tienen un valor numérico de acuerdo con su definición. Las fórmulas para resolver los sistemas de ecuaciones lineales sugieren la definición de los determinantes, que simplifican notablemente la expresión para la solución general de los sistemas lineales.

Consideremos el sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 = b_2 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquiera de los métodos de eliminación, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1\ a_{22} - b_2\ a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}\ b_2 - a_{21}\ b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Consideremos ahora el sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquiera de los métodos de eliminación, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{23}a_{12} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}a_{23}b_1 - a_{31}b_2a_{13} - a_{21}b_1a_{33} - a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}b_2a_{12} - a_{31}a_{22}b_1 - a_{21}a_{12}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}$$

La deducción de estas fórmulas y el tamaño de los sistemas considerados indican que las expresiones para determinar las incógnitas se extienden rápidamente a medida que aumentamos el número de incógnitas. Para el sistema general de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, las fórmulas para cada una de las incógnitas son cocientes de sumas de 24 productos cuádruples. Sin embargo, observando la estructura de las fórmulas en cada uno de los sistemas, se encuentran características comunes como las siguientes: a) El denominador es el mismo para todas las incógnitas de un sistema; b) El número de términos positivos es igual al número de términos negativos en cada uno de los numeradores y denominadores; etcétera. Estas observaciones sugieren la definición del concepto de determinante.

Consideremos primeramente las definiciones particulares de los determinantes de orden dos y tres, para aplicarlas a las fórmulas para los sistemas cuadrados de 2 y 3 incógnitas.

Determinante de orden 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

De acuerdo con esta definición, las fórmulas para el sistema cuadrado de 2 incógnitas, resultan:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Determinante de orden 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Nota. Los diagramas indican los caminos y los signos para la formación de los productos cuya suma define a los determinantes.

De acuerdo con la definición del determinante de orden 3, las fórmulas para el sistema cuadrado de 3 incógnitas resultan:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad ;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

De estas fórmulas para las incógnitas, se deduce la siguiente regla práctica para resolver por determinantes, los sistemas cuadrados de 2 y 3 incógnitas.

Regla. Las incógnitas son cocientes de determinantes con las siguientes características:

a) El denominador es el mismo para todas las incógnitas e igual al determinante del cuadro de coeficientes.

b) E l numerador de cada incógnita es el determinante que resulta del determinante denominador común, cambiando la columna de coeficientes de la incógnita en cuestión, por la columna de términos independientes.

Observaciones.

1. Es importante observar que las incógnitas deben estar ordenadas en columna y si falta alguna incógnita en una ecuación, su coeficiente debe considerarse como cero.

2. Esta regla para resolver por determinantes sistemas cuadrados de 2 y 3 incógnitas, es válida también para sistemas cuadrados de cualquier número de incógnitas, según se verá después.

Ejemplo. Resolver por determinantes el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Solución. Aplicando la regla establecida y evaluando los determinantes de acuerdo con su definición, se obtiene:

Denominador común de las incógnitas = D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 +8 +3 +2 -2 -6 = 4$$

Numerador de $x_1 = N_{x_1}$:

$$N_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 -12 + 12 +8 +3 -6 = 4$$

Numerador de $x_2 = N_{x_2}$:

$$N_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 +16 +3 +6 -2 -12 = 8$$

Numerador de $x_3 = N_{x_3}$:

$$N_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 +4 -3 +1 -8 +6 = -4$$

Sustituyendo los valores encontrados, se tiene:

$$x_1 = \frac{N_{x_1}}{D} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{N_{x_2}}{D} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{N_{x_3}}{D} = \frac{-4}{4} = -1$$

Entonces, la solución del sistema es:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{array}\right.$$

<u>Generalización del concepto de determinante.</u> Consideremos ahora la definición del determinante general de orden <u>n</u> para aplicarla a la determinación de la inversa de una matriz y a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas. Debe entenderse y desde luego puede verificarse, que la definición que daremos a continuación no contradice las definiciones particulares de los determinantes de orden 2 y 3.

<u>Determinante general de orden n.</u> Es la suma algebraica de todos los productos que pueden formarse tomando como factores uno y sólo un elemento de cada hilera y de cada columna, con signo positivo o negativo de acuerdo con lo siguiente:

El determinante general de orden <u>n</u> tiene la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tomando en cuenta que los a_{ij} son números reales, podemos cambiar el orden de los factores en cada uno de los sumandos de la definición general de manera que los primeros sub-índices queden ordenados 1, 2, 3, ..., n. Entonces, cualquier término de la suma tiene la forma:

$$a_{1j_1},\ a_{2j_2} \cdots\cdots\ a_{nj_n}$$

donde $j_1\ j_2 \ldots\ldots j_n$ es una permutación de los números 1, 2, ..., n. Ahora, un intercambio de 2 números consecutivos de una permutación se llama una <u>trasposición</u>. Si el número de trasposiciones

necesarias para que la permutación $j_1\ j_2 \ldots\ldots j_n$ quede ordenada del 1 al <u>n</u>, es par, entonces el producto es positivo. Si es impar, el producto será negativo.

<u>Observación</u>. La evaluación de determinantes a partir de la definición general es más laboriosa y complicada, a medida que aumenta el orden del determinante. Sin embargo, los determinantes tienen propiedades de las que se deducen métodos para su evaluación sin necesidad de encontrar los n! productos de <u>n</u> factores cada uno que establece la definición. (El estudiante puede intentar evaluar el determinante general de orden 4 a partir de la definición).

Consideremos las definición de menor y cofactor de un elemento de un determinante:

<u>Def</u>. El <u>menor</u> de un elemento a_{ij} de un determinante es el determinante que resulta eliminando la hilera y columna que contienen al elemento en cuestión, es decir, eliminando la hilera <u>i</u> y la columna <u>j</u> del determinante original. Utilizaremos la siguiente notación:

Menor de $a_{ij} = M_{ij}$

<u>Def</u>. El <u>cofactor</u> de a_{ij} es igual a $(-1)^{i+j}$ por el menor de a_{ij}. En símbolos:

Cofactor de $a_{ij} = C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$

<u>12.2 Desarrollo de Laplace</u>. El valor de un determinante es igual al de la suma de los elementos de cualquier hilera o columna multiplicados por sus respectivos cofactores. En símbolos:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij} \;; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$ó \quad D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij} \;; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Laplace demostró que estas expresiones son equivalentes e iguales precisamente al valor del determinante. Por otra parte, el desarrollo de Laplace proporciona una alternativa para definir el determinante general de orden n.

Ejemplo. Evaluar el siguiente determinante desarrollándolo por los cofactores de la primer columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(20 - 6) + 3\,(5 + 9) + 1\,(2 + 12)$$

$$= 28 + 42 + 14 = \underline{84}$$

Propiedades fundamentales de los determinantes. Para obtener mejores métodos de evaluación, se demuestran las propiedades de los determinantes que ahora sintetizamos. Estas propiedades se deducen de la definición del determinante general y las propiedades de los números reales. El estudiante puede demostrarlas como ejercicio.

1. Si en un determinante se intercambian las hileras con las correspondientes columnas, el valor del determinante no se altera. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

o, utilizando matrices: $|A| = |A'|$. De acuerdo con esta propiedad, lo que sea establecido para hileras, será cierto también para columnas.

2. Si se intercambian 2 hileras (columnas) cualquiera, el determinante cambia de signo. En símbolos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Si se multiplica una hilera (columna) cualquiera por un número real diferente de cero, el determinante resulta multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Si dos determinantes difieren por los elementos de una hilera, digamos la hilera i, entonces pueden sumarse de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & a_{i2}+b_2 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. Si un determinante tiene 2 hileras (columnas) iguales, entonces su valor es cero. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

6. Si se suma a una hilera (columna) un múltiplo cualquiera de otra hilera (columna), el valor del determinante no se altera. En símbolos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ba_{j1} & a_{i2}+ba_{j2} & \cdots & a_{in}+ba_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

b

<u>12.3 Evaluación de determinantes</u>. Utilizando las propiedades fundamentales de los determinantes y el desarrollo de Laplace, puede establecerse un proceso sistemático para reducir de orden un determinante hasta obtener un determinante de orden 2 ó 3 que se evalúa de acuerdo con su definición particular. El proceso puede describirse de la siguiente manera:

1. Se localiza un <u>uno</u> en el determinante. Si no hay unos, se transforma el determinante, de acuerdo con sus propiedades, para obtener un elemento igual a uno.

2. Se hacen ceros los elementos de la hilera o la columna que contenga al elemento <u>uno</u> seleccionado, utilizando para esto la propiedad 6.

3. Se desarrolla por menores (desarrollo de Laplace) de la hilera o columna que contiene el <u>uno</u> y en la que los demás elementos se han transformado en ceros.

4. El determinante de orden <u>n - 1</u> obtenido, se transforma de la misma manera que el determinante original siguiendo los pasos 1, 2 y 3 y así sucesivamente hasta obtener un determinante de orden 2 ó 3 cuyo valor se encuentra aplicando directamente su definición particular.

<u>Ejemplo</u>. Encontrar el valor del siguiente determinante, reduciéndolo a un determinante de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

-1 2 -2

$$= \begin{vmatrix} 12 & 5 & -7 \\ -8 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 12 & -7 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 12 & -7 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(12 - 56) = 44$$

12.4 Método de Chiò. En un proceso de reducción de orden para evaluación de determinantes. Este método, ideado recientemente por Chiò, es una simplificación del anterior y consiste en lo siguiente:

1. Se localiza un uno en el determinante. En caso de que no haya unos, se transforma el determinante en otro equivalente que contenga un elemento igual a uno. (Este primer paso es idéntico al del método anterior).

2. Se eliminan la hilera y columna que contienen al elemento uno seleccionado para formar un nuevo determinante de orden $n - 1$ en el que cada elemento es igual al elemento actual del determinante, menos el producto de los elementos que están sobre la columna e hilera eliminados y en la hilera y columna del elemento en cuestión.

En símbolos, sea D el determinante que contiene un elemento uno en la hilera k y columna p. Es decir:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Entonces, el determinante reducido y equivalente a D es:

$$D = (-1)^{k+p} \begin{vmatrix} a_{11} - a_{k1}a_{1p} & a_{12} - a_{k2}a_{1p}, & \cdots & a_{1n} - a_{kn}a_{1p} \\ a_{21} - a_{k1}a_{2p}, & a_{22} - a_{k2}a_{2p} & \cdots & a_{2n} - a_{kn}a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{k1}a_{np}, & a_{n2} - a_{k2}a_{np}, & \cdots & a_{nn} - a_{kn}a_{np} \end{vmatrix}$$

3. Se repiten los pasos 1 y 2 en este determinante de orden $n - 1$ y así sucesivamente hasta obtener un determinante de orden 2 ó 3 que se evalúa directamente de acuerdo con su definición.

Observación. El método de Chiò que acabamos de describir corresponde al primer método de reducción de orden que describimos antes. Si se observan las operaciones efectuadas, se puede explicar el método de Chiò de la siguiente manera: Localizado el elemento uno en la hilera k y columna p se hacen ceros los demás elementos de la columna p sumando a cada hilera A_i, la hilera A_k multiplicada por $(-a_{ip})$. Entonces al hacer el desarrollo de Laplace por los menores de la columna p se obtiene el determinante reducido. El mismo resultado se obtiene si se sigue el camino de hacer ceros los demás elementos de la hilera k.

Ejemplo. Consideremos el determinante del ejemplo anterior y escojamos el elemento uno de la primera hilera y segunda columna para hacer la reducción de orden por el método de Chiò:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2-(1)(0), & 3-(1)(0), & 1-(1)(0) \\ 1-(1)(-1), & -2-(1)(-1), & -4-(1)(-1) \\ 3-(1)(1), & 4-(1)(1), & 5-(1)(1) \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2-(-2)(-3), & -1-(3)(-3) \\ 2-(-2)(4), & 3-(3)(4) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} = -(36-80) = \underline{44}$$

12.5 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes. Los sistemas cuadrados de ecuaciones lineales, pueden ser resueltos por determinantes de acuerdo con la regla de Cramer que proporciona una fórmula para la solución del sistema. La demostración de la regla de Cramer puede deducirse de la fórmula para resolver un sistema cuadrado por matrices y la fórmula que encontraremos adelante para determinar la inversa por determinantes. Por ahora, nos limitaremos a establecer la regla para aplicarla a la solución de sistemas lineales cuadrados.

Regla de Cramer. Las incógnitas de un sistema lineal cuadrado son cocientes de determinantes. El denominador es el mismo para todas las incógnitas e igual al determinante del cuadro de coeficientes de las incógnitas. El numerador de cada incógnita es el determinante que se obtiene del cuadro de coeficientes de las incógnitas, sustituyendo la columna correspondiente a la incógnita que se está encontrando por la columna de términos independientes.

En símbolos, sea el sistema general cuadrado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Entonces:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}};\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo. Resolver por determinantes el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Solución. Para aplicar la regla de Cramer, encontremos el denominador común de las incógnitas y cada uno de los numeradores:

a) Denominador común $= D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Aplicando el método de Chiò, con el elemento en primer hilera y primer columna como pivote:

$$D = \begin{vmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -10 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$

Ahora, desarrollando por los cofactores de la tercer columna:

$$D = -4\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4\,(20 + 8)$$

$$\therefore\ D = -112$$

b) Numerador de $x_1 = N_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Aplicando el método de Chiò, con el elemento en primer hilera y última columna como pivote:

No. de hilera del pivote + No. de columna = 1 + 4 = 5. Entonces, le corresponde signo negativo.

$$N_{x_1} = -\begin{vmatrix} -5 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

1/4

Aplicando de nuevo el método de Chiò, con el elemento en 2a. hilera y primer columna como pivote: (le corresponde signo negativo):

$$N_{x_1} = 4\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = 4\,(-56) = -224$$

Entonces, $x_1 = \dfrac{-224}{-112} = 2$

c) Numerador de $x_2 = N_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Por el método de Chiò, con pivote encerrado en círculo:

$$N_{x_2} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la última columna:

$$N_{x_2} = -4\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4\,(20 + 8) = -112$$

Entonces: $x_2 = \dfrac{-112}{-112} = 1$

d) Numerador de $x_3 = N_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Por el mismo camino que el anterior:

$$N_{x_3} = \begin{vmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4\,(-5 + 5) = 0$$

Entonces, $x_3 = \dfrac{0}{-112} = 0$

e) Sustituyendo x_1, x_2 y x_3 en la primera ecuación:

$$2 + 2 + 0 + x_4 = 1$$

$$\therefore\ x_4 = -3$$

Entonces, la solución es:

$$x_1 = 2\ ;\ \ x_2 = 1$$
$$x_3 = 0\ ;\ \ x_4 = -3$$

<u>12.6 Inversa de una matriz por determinantes.</u> Una aplicación interesante de los determinantes al álgebra de matrices es la determinación de la inversa de multiplicación A^{-1} de una matriz A.

El teorema fundamental de determinantes para obtener la fórmula de la inversa es el siguiente:

Teorema: El producto de los elementos de una hilera cualquiera de un determinante, por los correspondientes cofactores de otra hilera, es cero.

En símbolos, si:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ entonces:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{kj} = 0 \quad \text{para todo } i \neq k$$

Dem. La expresión $\Sigma\, a_{ij}\, C_{kj}$ es el desarrollo de Laplace de un determinante que tiene 2 hileras iguales. Entonces, por una de las propiedades fundamentales de los determinantes, su valor es cero.

Definamos ahora lo que se llama la <u>matriz adjunta</u> A^* de una matriz cuadrada A.

Def. La adjunta A^* de una matriz cuadrada A es la matriz de cofactores del determinante de la traspuesta de la matriz A.

En símbolos, sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La traspuesta de A es:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, por definición, la matriz adjunta A^* es:

$$A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

En notación compacta:

Si $A = ((a_{ij}))$; $A' = ((a_{ji}))$; $A^* = ((C_{ji}))$

Ejemplo. Encontrar la adjunta A^* de la matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 14 & -6 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el producto de una matriz cuadrada A por su adjunta A^*.

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots\cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots\cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots\cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,C_{1j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,C_{2j}, & \cdots\cdots, & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,C_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,C_{1j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,C_{2j}, & \cdots\cdots, & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,C_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,C_{1j}, & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,C_{2j}, & \cdots\cdots, & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,C_{nj} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son todos iguales desarrollo de Laplace por cofactores de las diferentes hileras del determinante de A, mientras que todos los demás elementos son desarrollos de determinantes que valen cero por el teorema fundamental que acabamos de demostrar. (Tienen 2 hileras iguales).

Entonces:

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= |A|\ I$$

Suponiendo que $|A|$ es diferente de cero, podemos dividir ambos lados entre $|A|$ para obtener:

$$\frac{A\,A^*}{|A|} = I$$

Asociando convenientemente:

$$A\ \left(\frac{1}{|A|}\ A^*\right) = I$$

Entonces por definición de la inversa A^{-1} de una matriz A, se tiene:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ A^*}$$

Entonces, la inversa de una matriz puede ser determinada, encontrando el valor del determinante de la matriz $|A|$ y los valores de los determinantes cofactores de la matriz traspuesta que proporcionan la adjunta A^*. Este es un método práctico para encontrar A^{-1} cuando A es una matriz de pequeño orden ya que el cálculo de los determinantes cofactores se complica rápidamente cuando el orden de $|A|$ aumenta.

<u>Corolario</u>: Una condición necesaria para que A tenga inversa, es que $|A|$ sea diferente de cero.

<u>Ejemplo</u>. Consideremos la matriz A del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Encontramos:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 14 & -6 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$|A| \overset{-1\quad -2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= +42 + 2 = +44$$

De acuerdo con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ A^* = \frac{1}{+44}\begin{pmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 14 & -6 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{44} & \frac{17}{44} & \frac{13}{44} \\ \frac{14}{44} & -\frac{6}{44} & \frac{2}{44} \\ \frac{5}{44} & \frac{1}{44} & -\frac{7}{44} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/44 & 17/44 & 13/44 \\ 14/44 & -6/44 & -2/44 \\ 5/44 & 1/44 & -7/44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

12.7 Demostración de la regla de Cramer. La regla de Cramer puede ahora ser deducida de la fórmula para resolver un sistema lineal cuadrado y la fórmula que acabamos de obtener para la inversa de la matriz del cuadro de coeficientes.

El sistema lineal cuadrado tiene la forma matricial: $Ax = B$. La solución general x está dada por: $x = A^{-1}B$. Sustituyendo $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, se tiene: $x = \frac{1}{|A|}A^*B$

Donde $A^* = ((C_{ji}))$; C_{ji} = Cofactor de a_{ji}.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Consideremos el producto A^*B:

$$A^*B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_{i1}\ b_i \\ \sum_{i=1}^{n} C_{i2}\ b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_{in}\ b_i \end{pmatrix}$$

Cada una de las sumatorias son desarrollos de Laplace de determinantes que se obtienen de A cambiando cada una de sus columnas por la matriz columna B. Ahora, en el enunciado de la regla de Cramer, estos determinantes son los numeradores de las incógnitas, que hemos designado por $N_{x_1}, N_{x_2}, \ldots, N_{x_n}$.

Es decir: $A^*B = \begin{pmatrix} N_{x_1} \\ N_{x_2} \\ \vdots \\ N_{x_n} \end{pmatrix}$. Sustituyendo en $x = \frac{1}{|A|}(A^*B)$.

se tiene la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} N_{x_1} \\ N_{x_2} \\ \vdots \\ N_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{x_1}}{|A|} \\ \frac{N_{x_2}}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{N_{x_n}}{|A|} \end{pmatrix}$$

12.8 Inversa por transformaciones elementales. La inversa de una matriz A puede ser determinada también utilizando transformaciones elementales en hileras. Empecemos con la siguiente definición:

Def. Las matrices elementales en hileras son las que se obtienen de la identidad por medio de una operación elemental en hileras.

<u>Ejemplo</u>. Para la identidad <u>3 x 3</u>: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices elementales: a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

etcétera.

Ahora, de esta definición, pueden verificarse los casos posibles del siguiente lema:

<u>Lema</u>. El efecto que produce una transformación elemental en hileras en una matriz cuadrada A, es el mismo que le produce la multiplicación por la izquierda por la correspondiente matriz elemental en hileras.

<u>Aplicación del lema para la determinación de la inversa A^{-1}</u>. Supongamos que la matriz A tiene inversa. Entonces, por transformaciones elementales en hileras, encontramos su forma reducida en escalón que debe ser una matriz identidad I para que A^{-1} exista según se verá enseguida. Al mismo tiempo, se van encontrando las matrices elementales en hileras correspondientes a las transformaciones elementales efectuadas. Sean $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_r$, las matrices elementales encontradas. Entonces, de acuerdo con el lema:

$$E_r \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ E_3 \left[E_2 \left(E_1 A \right) \right] \right\} = I$$

Por la ley asociativa:

$$(E_r\ E_{r-1} \ldots\ldots\ E_3\ E_2\ E_1)\ A = I$$

Entonces:

$$A^{-1} = E_r\ E_{r-1} \ldots\ldots\ E_3\ E_2\ E_1$$

Ahora, multiplicando por I ambos lados:

$$A^{-1}\ I = (E_r\ E_{r-1} \ldots\ldots\ E_3\ E_2\ E_1)\ I$$

De nuevo, por la ley asociativa:

$$A^{-1} = E_r \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ E_3 \left[E_2 \left(E_1\ I \right) \right] \right\}$$

Es decir A^{-1} se obtiene aplicando a la matriz identidad, las transformaciones elementales en hileras que se necesitan para transformar la matriz A en la matriz identidad I.

Entonces, el cálculo de A^{-1} por transformaciones elementales puede hacerse de la siguiente manera:

1. Se empieza con la matriz A y la matriz I separadas por una línea vertical. $(A \mid I)$.

2. Se aplican transformaciones elementales en hileras a esta matriz doble tendiendo a encontrar la forma reducida en escalón de A hasta transformar A en I, lo cual siempre es posible cuando A^{-1} existe.

3. La inversa A^{-1} se encuentra en el lugar de la matriz I después de haber cumplido la condición anterior.

Es decir:

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$$

<u>Ejemplo</u>. Encontrar la inversa A^{-1} de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AI) = -1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$1 \quad -1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) -3 \quad 2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobación:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \quad - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 \qquad + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Solución. En notación matricial, el problema es resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ahora, hemos encontrado en el ejemplo anterior que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Entonces, la respuesta es:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 42 \\ x_2 &= -26 \\ x_3 &= -11 \end{aligned}}$$

<u>Comprobación.</u>

1a. ecuación : $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$42 - 26 - 11 = 5$

$5 = 5$

2a. ecuación : $-x_2 + 2x_3 = 4$

$26 - 22 = 4$

$4 = 4$

3a. ecuación : $x_1 + 4x_3 = -2$

$42 - 44 = -2$

$-2 = -2$

<u>12.9 Problemas de optimización.</u> En las aplicaciones de la derivada parcial (Capítulo VII), hemos considerado el problema de la determinación de máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales. El método de los multiplicadores de Lagrange nos permite encontrar, por lo menos teóricamente, los posibles máximos y mínimos de la función. Cuando la naturaleza del problema implica la existencia de un máximo y las ecuaciones de Lagrange se satisfacen en un solo punto, entonces se deduce lógicamente que ese punto es el máximo buscado. Si el sistema de ecuaciones de Lagrange puede ser resuelto y tiene un número finito de soluciones, entonces se pueden probar las soluciones encontradas para determinar

el máximo o el mínimo de la función, según el caso. Ahora, cuando el número de posibles máximos y mínimos es infinito, como sucede en los problemas de programación lineal, generalmente no es posible determinar el máximo o el mínimo de la función por medio del cálculo infinitesimal. Entonces, ha sido necesario idear nuevas técnicas para resolver el problema. El Algebra Lineal ha sido utilizada con éxito para resolver ciertos tipos de problemas de máximos o mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones laterales. Por ahora, nos limitaremos a establecer definiciones y a considerar algunos ejemplos de programación lineal para ilustrar la organización de los datos y el planteo matemático del problema. El tema será estudiado con detalle en un curso posterior de matemáticas aplicadas a economía.

Def. 1. Problema general de optimización: Maximizar o minimizar una función de varias variables sujetas a condiciones laterales.

En símbolos matemáticos:

Maximizar o minimizar: $z = f(x, y, \ldots, w)$ si las variables están sujetas a las condiciones laterales:

$$\begin{aligned} \phi_1 (x, y, \ldots, w) &= 0 \\ \phi_2 (x, y, \ldots, w) &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \phi_m (x, y, \ldots, w) &= 0 \end{aligned}$$

Def. 2. Modelo lineal. Maximizar o minimizar una función lineal de varias variables sujetas a condiciones laterales lineales.

Nota. Las condiciones laterales lineales en un modelo lineal pueden ser ecuaciones, desigualdades, ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, ecuaciones de diferencia, etc.

Def. 3. Programación lineal. Maximizar o minimizar una función lineal de varias variables sujetas a un sistema de ecuaciones y (o) desigualdades lineales.

En símbolos matemáticos, dos formas típicas de problemas de programación lineal son las siguientes:

(1) Maximizar: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeta a:
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0 \; ; \quad x_2 \geqslant 0 \; ; \ldots\ldots ; x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Utilizando notación matricial, sea:

$$C = (c_1, c_2, \ldots\, c_n) \; ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces el problema es:

Maximizar: $z = CX$

Sujeta a: $AX \leqslant b \; ; \quad X \geqslant 0$

(2) Minimizar: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeta a:
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0; \ldots\ldots ; \quad x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

o utilizando la misma notación matricial que antes:

$$\text{Minimizar} \quad Z = CX$$
$$\text{Sujeta a:} \quad AX \geqslant b \; ; \quad X \geqslant 0$$

<u>Breve historia.</u> Las nuevas técnicas de optimización son relativamente recientes. En 1929, el matemático alemán J. Von Newman publicó su primer ensayo sobre Teoría de Juegos, sugiriendo que sus ideas podían ser utilizadas para resolver problemas de economía. Sin embargo, el ensayo fue tan abstracto que solamente unas cuantas personas pudieron entenderlo. Esto provocó inquietud entre los economistas de la época que empezaron a preocuparse seriamente por el uso de las matemáticas en economía y de 1930 a 1940 se observa una influencia notable de las matemáticas en problemas de tipo económico y en la teoría económica misma. En 1944, habiendo emigrado a Estados Unidos, J. Von Newman y O. Margerstern publicaron su libro titulado "The Theory of Games and Economic Behavior". Este libro atrajo la atención de gran cantidad de investigadores economistas y matemáticos que reconocieron la importancia de las ideas de Von Newman. Se ha demostrado que los problemas de optimización que hemos definido como problemas de programación lineal tienen la misma estructura matemática que los juegos de dos personas. En 1947, el profesor Dantzig inventó un proceso numérico para resolver el problema general de programación lineal que se conoce como el <u>método Simplex</u>. El profesor Dantzig trabajaba entonces para la fuerza aérea de los Estados Unidos y el método Simplex fue utilizado primeramente para la optimización de técnicas militares. A partir de 1950 se han desarrollado notablemente nuevas técnicas de optimización y actualmente se trabajo en problemas no-lineales de optimización.

Consideremos algunos ejemplos de programación lineal para ilustrar la organización de los datos necesarios y el planteo matemático del problema, así como las limitaciones que resultan de las consideraciones teóricas establecidas.

<u>12.10 Problema de la dieta.</u> Supongamos que se desea obtener una dieta semanal para alimentar a un grupo de estudiantes en un internado de manera que el costo sea mínimo y al mismo tiempo se proporcionen los nutrientes necesarios (calorías, vitaminas, etc.) para que sea una dieta saludable.

Consideremos un grupo de alimentos básicos que llamaremos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Denotemos por $N_1, N_2, \ldots, N_m$, los componentes principales de los alimentos considerados, (calorías, proteínas, vitaminas, etc.). Sea a_{ij} el número de unidades del nutriente N_i contenidas en el alimento A_j. $(i = 1, 2, \ldots m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$. Llamaremos c_j el costo por unidad del alimento A_j y denotaremos por x_j al número de unidades del alimento A_j que debe contener la dieta óptima. Por último, sea b_i el número mínimo de unidades del nutriente N_i que proporcionan una dieta saludable al grupo de estudiantes.

<u>Organización de los datos.</u> En los problemas de programación lineal es muy conveniente organizar los datos en una tabla para facilitar el planteo del problema. Para el problema de la dieta, y, en general, para cualquier problema que tenga una estructura semejante, una presentación tabular conveniente es la siguiente:

Costo por Unidad de A_j	c_1	c_2	....	c_n	
Alimentos / Nutrientes	A_1	A_2	....	A_n	No. mínimo de unidades de N_i
N_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	b_1
N_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
N_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_m
No. de unidades de A_j en dieta óptima	x_1	x_2	....	x_n	

<u>Planteo del problema</u>. E l problema es encontrar las cantidades de los distintos alimentos de la dieta, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que satisfagan las condiciones establecidas. Es decir:

$$\text{Minimizar: } c = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\text{Sujeta a: } \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geqslant b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

<u>Nota</u>: Las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deben ser no-negativos por la naturaleza del problema. Entonces se tiene la condición adicional: $x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

En notación matricial, el planteo se reduce a:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & : \ c = CX \\ \text{Sujeta a} & : \ AX \geqslant b \\ & \quad X \geqslant 0 \end{array}}$$

Obsérvese que el problema de la dieta tiene una estructura semejante a la forma 2 considerada en la definición del problema general de programación lineal. A la función lineal, que se va a minimizar en este caso, se le llama función <u>objetiva</u> u <u>objetivo</u> del problema y al conjunto de relaciones entre las incógnitas, que son desigualdades en el problema de la dieta, se le llama conjunto de restricciones.

La solución del problema no será discutida por ahora, pero se pueden deducir algunas observaciones sobre la función objetivo (función de costo total de la dieta) y sobre los resultados de un problema específico. Por ejemplo, los costos de los alimentos dependen, en cierta forma, de las cantidades que se vayan a comprar para proporcionar la dieta. El resultado puede contener alimentos que no proporcionen una dieta apetecible, etc. Estos son aspectos prácticos del problema que no deben ser sub-estimados en los problemas de optimización.

<u>12.11 Problema de producción</u>. Una fábrica dispone de <u>m</u> máquinas $M_1, M_2, \ldots, M_m$, para la producción de <u>n</u> artículos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Sea a_{ij} el número de horas de la máquina M_i necesarias para fabricar una unidad del artículo A_j. Supongamos que el número de horas-máquina disponibles por semana es limitado de manera que b_i es el número máximo de horas que puede trabajar la máquina M_i por semana. Si P_j es el precio d del artículo A_j, incluyendo utilidad, determinar la producción semanal que proporcione el máximo ingreso total.

<u>Tabulación</u>.

Denotemos por x_j el número de unidades del artículo A_j que deberá fabricarse para obtener máximo ingreso total. En una tabla, los datos del problema pueden presentarse de la siguiente manera:

No. de Unidades de A_j	x_1	x_2	....	x_n	
Artículos / Máquinas	A_1	A_2	....	A_n	No. de horas-máquinas disponibles
M_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	b_1
M_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
M_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	b_m
Precio por unidad de A_j	P_1	P_2	....	P_n	

<u>Planteo</u>. De acuerdo con el enunciado, el planteo matemático del problema es el siguiente:

Maximizar: $I = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n$

Sujeta: $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leqslant b_m \end{cases}$

Puesto que los x_j deben ser no-negativos, se tiene la condición adicional:

$$x_j \geqslant 0 \; ; \; j = 1, 2, \dots, n.$$

En notación matricial, el problema se reduce a:

Maximizar: $I = PX$

Sujeta a: $\begin{cases} AX \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$

12.12 Problema de transporte. Una compañía que fabrica refrigeradores tiene 3 almacenes A_1, A_2, A_3, distribuidos en cierta zona geográfica. Supongamos que las existencias en los almacenes son 20, 40 y 40 unidades respectivamente, cuando sus cinco tiendas T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5, solicitan 20, 10, 15, 30 y 25 unidades respectivamente. Los costos de transporte por unidad de los almacenes a cada una de las tiendas son los siguientes:

Costos/ Unidad	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A_1	100	30	60	45	35
A_2	40	30	40	50	55
A_3	95	60	30	35	40

El problema es determinar cuántas unidades deberán transportarse de cada almacén a cada tienda de manera que el costo total de

transporte sea mínimo y que se satisfagan las demandas de las tiendas.

Tabulación. Además de la tabla de costos unitarios, podemos reunir los demás datos del problema en la siguiente tabla:

Tiendas → / Almacenes ↓	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Cantidad disponible en A_i
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	20
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	40
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	40
Cantidad demandada por T_j	20	10	15	30	15	

x_{ij} = No. de unidades que deberán transportarse de A_i a T_j de manera que el costo de transporte sea mínimo.

Planteo: La estructura de este problema es diferente a la de los anteriores y su solución es, en general, más complicada debido al número de incógnitas que intervienen. Sin embargo, obsérvese que los artículos considerados son indivisibles, es decir los x_{ij} deben ser números enteros no-negativos. Entonces el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } C = {} & 100\, x_{11} + 30\, x_{12} + 60\, x_{13} + 45\, x_{14} \\ & + 35\, x_{15} + 40\, x_{21} + 30\, x_{22} + 40\, x_{23} \\ & + 50\, x_{24} + 55\, x_{25} + 95\, x_{31} + 60\, x_{32} \\ & + 30\, x_{33} + 35\, x_{34} + 40\, x_{35} \end{aligned}$$

Sujeta a:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leqslant 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leqslant 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leqslant 40 \\ x_{ij} \geqslant 0; \; i = 1,2,3, \; ; \; j = 1,2,3,4,5 \; ; \; x_{ij} : \text{Enteros} \end{cases}$$

<u>Solución por tanteos</u>. El problema puede resolverse por tanteos, en este caso particular, si se observa que la suma de las existencias en los almacenes es igual a la suma de las cantidades demandadas por las tiendas. Entonces, podemos intentar una solución que satisfaga las igualdades en el sistema de restricciones para las incógnitas. Si empezamos por satisfacer las demandas mayores al menor costo de transporte posible, encontramos la siguiente solución en la que se han tomando en cuenta las existencias en almacenes y los costos de transporte:

Tiendas / Almacenes	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Existencia en almacenes
A_1	0	0	0	0	20	20
A_2	20	10	10	0	0	40
A_3	0	0	5	30	5	40
Demanda en tiendas	20	10	15	30	25	

El cuerpo de la tabla contiene los valores de los x_{ij}. De la solución de este sencillo problema de transporte se deduce que no siempre será posible aplicar simple deducción lógica para cualquier problema de transporte porque la estructura del problema puede complicarse demasiado.

La generalización del problema de transporte para <u>m</u> almacenes A_1, A_2, ..., A_m y <u>n</u> tiendas T_1, T_2, ..., T_n, es inmediata del ejemplo considerado y puede hacerse como ejercicio.

<u>Ejercicio 46</u>.

Tema: Determinantes. Aplicación a sistemas de ecuaciones lineales.

1. Encontrar el valor de los siguientes determinantes:

1.1 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 16 & 5 \end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.4 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ -2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$

1.5 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 1.6 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

1.7 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. **Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por determinantes. (Regla de Cramer).**

2.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ **2.2** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = -6 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 9 \end{cases}$ *2.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 11 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -9 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

3. **Resolver los sistemas del problema anterior (2.1 a 2.4) por el método de Gauss y el método de Gauss-Jordán.**

Ejercicio 47.

Tema: Inversa de una matriz por determinantes.

1. Verificar, por comprobación directa que A A' es una matriz simétrica:

1.1 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

2. Demostrar que la adjunta de la adjunta de una matriz 2 X 2 es igual a la matriz dada.

3. Verificar el resultado del problema 2 para las matrices:

3.1 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 3.2 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

4. Verificar que la matriz adjunta de la siguiente matriz 3 X 3 es igual a la matriz dada.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Encontrar la inversa de las siguientes matrices por determinantes:

5.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ 5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 5.4 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

Ejercicio 48.

Tema. Inversa por transformaciones elementales. Solución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados por la inversa.

1. Encontrar la inversa A^{-1} de las siguientes matrices por transformaciones elementales en hileras:

1.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 1.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 1.4 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por la inversa de la matriz de coeficientes:

2.1 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_3 = 5 \end{cases}$, 2.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

NOTA: Se han omitido intencionalmente las respuestas a algunos de los problemas.

Ejercicio 1 (Pág. 15)

1.1 $d = 5$; 1.2 $d = 3\sqrt{2}$; 1.3 $d = 5$; 1.4 $d = 3$; 1.5 $d = 3\sqrt{2}$

2.1 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CA} = 5$

2.2 $\overline{AB} = \sqrt{13}$, $\overline{BC} = 4\sqrt{5}$, $\overline{CA} = \sqrt{29}$

2.3 $\overline{AB} = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{53}$, $\overline{CA} = \sqrt{26}$

3.1 $\overline{AB} = \sqrt{13}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$, $\overline{CD} = \sqrt{5}$, $\overline{DA} = 2\sqrt{10}$, $\overline{AC} = 7$, $\overline{BD} = 5$

3.2 $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = \sqrt{29}$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{DA} = \sqrt{29}$, $\overline{AC} = 5\sqrt{2}$, $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$

4.1 $\overline{AB} = BC = CA = 10$

5.1 Si ; 5.2 Si ; 6. A, C y D

7.1 $M(-\frac{1}{2}, 4)$; 7.2 $M(0, -1)$; 7.3 $M(-1, 1)$

8. $\overline{AM_1} = \sqrt{34}$; $\overline{BM_2} = 5$; $\overline{CM_3} = \sqrt{37}$

Ejercicio 2 (Pág. 17)

1.1 $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$; 1.2 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 14 = 0$

1.3 $4x^2 + 4y^2 + 8x + 24y + 31 = 0$; 1.4 $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

1.5 $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 1283 = 0$.

2. $x^2 + y^2 - 2x - 17 = 0$.

3. $x^2 + y^2 - 18 = 0$.

4. $4x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 27 = 0$.

5. $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 0$.

6.1 $C\ (1, -2)$; $r = 4$; 6.2 $C\ (-4,0)$, $r = 4$.

6.3 $C\ (3,5)$, $\gamma = 4$; 6.4 $C\ (-1,3)$, $\gamma = 1$.

6.5 $C\ (-1,\frac{3}{2})$, $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{7}$; 6.6 $C\ (6,-\frac{5}{2})$, $\gamma = \frac{13}{2}$.

7. Frontera: Círculo con centro en C(266.7,0) y radio $\gamma = 133.3$. Zonas de distribución: El exterior del círculo para una fábrica y el interior para la otra. (Considerando a la primera fábrica situada en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares).

8. Frontera: Línea recta vertical $x = 100$. Zonas de distribución: Semi-plano $x \leq 100$ para la primera fábrica y semi-plano $x > 100$ para la segunda.

Ejercicio 3 (Pág. 18)

1.1 $m = \frac{5}{2}$; 1.2 $m = -\frac{7}{2}$; 1.3 $m = -\frac{6}{5}$

1.4 $m = \frac{1}{7}$; 1.5 $m = -\frac{1}{3}$; 1.6 $m = -\frac{1}{3}$

3.1 $m - \frac{1}{3}$; 3.2 $m = \frac{1}{2}$; 3.3 $m = 7$; 3.4 $m = \frac{5}{2}$

4.1 Si ; 4.2 No.

5. $x = 16$.

6.1 $3y - 2x - 12 = 0$; 6.2 $5x + 2y - 4 = 0$.

6.3 $3y - 4x - 4 = 0$; 6.4 $y - 4x + 37 = 0$.

6.5 $y - 2 = 0$.

7.1 $x + 5y - 22 = 0$; 7.2 $y - 3x - 5 = 0$.

7.3 $52y - 4x - 25 = 0$; 7.4 $y - 3x = 0$.

7.5 $4y - 5x - 7 = 0$; 7.6 $5y - 3x + 2 = 0$.

8.1 $5x + 4y - 25 = 0$; 8.2 $7x + y - 5 = 0$.

8.3 $3y - 5x - 7 = 0$.

9.1 P(11,-6) ; 9.2 P(7,-5).

9.3 Son paralelas; 9.4 $P(\frac{6}{11}, \frac{45}{44})$.

Ejercicio 4 (pág. 32)

1.1 $f(0) = 2$; $f(-1) = 7$; $f(2) = -2$; $f(-\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}$.

1.2 $f(1 + h) = h^2 - 2h - 1$; $f(h - 1) = h^2 - 6h + 7$; $f(x + h) = x^2 - 4x + 2xh - 4h + h^2 + 2$.

2.1 $g(0) = -\frac{1}{2}$; $g(1) = 0$; $g(-2) = \infty$; $g(a^2) = \frac{a^4 - 1}{a^2 + 2}$

2.3 $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{x + 1}{x + 2}$

3.1 $x = 0$; $x = \frac{2}{3}$; 3.2 $x = \pm\sqrt{3}$

4.1 Dominio = {Nos. reales} ; Co-dominio = {Nos. reales.}

4.2 Dominio = {Nos. reales $x \geq 3$} ; Co-dominio = {Nos. reales $y \geq 0$}

4.3 Dominio = {Nos. reales $-2 \leq x \leq 2$} ; Co-dominio = {Nos. reales $0 \leq y \leq 2$}

4.4 Dominio = $\{$ Nos. reales $x \neq 2\}$; Co-dominio = $\{$ Nos. reales $y \neq 0\}$

4.5 Dominio = $\{$ Nos. reales$\}$; Co-dominio = $\{$ Nos. reales $y \geq 1\}$

Ejercicio 5 (Pag. 33)

4.1 No se intersectan.

4.2 $P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$; $Q\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} ; \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$.

Ejercicio 6 (Pág. 34)

1. Máximo ingreso total para $x \approx 4.4$

4. $a = 9{,}000$; $b = 7{,}500$; Precio del boleto que llenará el teatro $\approx$ \$ 0.86.

Ejercicio 7. (Pág. 54)

1.1 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots$

1.2 $2, 6, 12, 20, 30, \ldots\ldots\ldots$

1.3 $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\ldots$

1.4 $-1, -8, -27, -64, -125, \ldots\ldots\ldots$

1.5 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\ldots\ldots$

1.6 $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \ldots\ldots\ldots$

2. $\frac{2}{9}, \frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{21}, \frac{6}{25}, \ldots\ldots\ldots$

3.1 2 ; 3.2 49 ; 3.3 -3 ; 3.4 ∞ ;

3.5 10 ; 3.6 $-\frac{1}{3}$.

Ejercicio 8 (Pág. 55)

1.1 0 ; 1.2 0 ; 1.3 1 ; 1.4 0 ; 1.5 No existe.

1.6 5

2.1 2 ; 2.2 $-\frac{1}{3}$; 2.3 $\frac{1}{2}x$; 2.4 $\frac{5}{4}$

2.5 2 ; 2.6 ∞ ; 2.7 0 ; 2.8 $\frac{a_0}{b_0}$

2.9 $2x$; 2.10 1 ; 2.11 $-\frac{27}{2}$

3. $2x$

Ejercicio 9 (Pág. 57)

1.1 3 ; 1.2 $4x$; 1.3 $2x - 3$

1.4 $3x^2 - 2$; 1.5 $3x^2 - 2x$; 1.6 $\frac{-4x}{(x^2-2)^2}$

1.7 $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$; 1.8 $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; 1.9 $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

1.10 $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$; 1.11 $29x + b$; 1.12 $-\frac{1}{t^2}$

1.13 $3(t-4)^2$; 1.14 $2x + 2$; 1.15 $\frac{-1}{2(x-8)^{\frac{3}{2}}}$

2.1 $m = 8$; 2.2 $m = 1$; 2.3 $m = -2$; 2.4 $m = 1$

3. $P(2, -2)$

4. $P(1, 2)$; $Q(-1, 0)$

5. $y - 5x + 2 = 0.$

Ejercicio 10 (Pág. 85)

1.1 $4x^3$; 1.2 $6x^2 - 6x + 2$

1.3 $8x(x^2 - 2)^3$; 1.4 $\dfrac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}$

1.5 $5x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x - 2$; 1.6 $\dfrac{10x^2 + 4x - 4}{\sqrt{1 + 2x}}$

1.7 $\dfrac{-x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 4)^2}$; 1.8 $\dfrac{2x + 2}{3(x^2 + 2x - 4)^{\frac{2}{3}}}$

1.9 $-\dfrac{-x + 2}{2(1 - x)^{\frac{3}{2}}}$; 1.10 $(5x^3 - 10.5x^2)(x^2 - 3x)^{\frac{1}{2}}$

1.11 $5x^4 - 6x + 6$; 1.12 $(16x-12)(2x^2 - 3x + 1)^3$

1.13 $3\sqrt{2x + 5}$; 1.14 $\dfrac{-x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 8x - 12}{(x^3 - 4)^2}$

1.15 $\dfrac{5}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}(x - 3)^{\frac{1}{2}}}$; 1.16 $\dfrac{(15x + 155)(3x - 7)^4}{2(x + 4)^{\frac{7}{2}}}$

2.1 $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}} + \dfrac{4x}{3(2x^2)^{\frac{2}{3}}}$; 2.2 $\dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$

2.3 $4x^3 + 198x^2 + 2176x - 66$; 2.4 $\dfrac{2x^3 + 6x^2 - 8}{x^2}$

2.5 $2t + 2$; 2.6 $-15(5z + 4)^{-3} = \dfrac{-15}{(5z + 4)^3}$

2.7 $\dfrac{-9(2x - 4)}{(x^2 - 4x)^4}$; 2.8 $\dfrac{-4x}{(x^2 - 3)^3}$

3.1 $\dfrac{dy}{dx} = 108$; 3.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{5}$

3.3 $\dfrac{dy}{dx} = -5$; 3.4 $f'(0) = -48$

3.5 $f'(2) = 70$

Ejercicio 11 (Pág. 86)

1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{-9y^2+2y+2}$; 1.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y^2 + 3y - 5)^2}{-y^2 + 6y + 4}$

1.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y(1-5y)(1-2y)^2}$; 1.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sqrt{y^3-2y+3}}{3y^2 - 2}$

1.5 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(2y + 1)^3(12y^2 - 38y - 4)}$

2.1 $m = -\dfrac{1}{4}$; 2.2 $m = \infty$; 2.3 $m = -2$

2.4 $m = -1$; 2.5 $m = 3$

3.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3u^2 - 2}{\sqrt{2x + 3}}$; 3.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8u + 8}{x^3}$

3.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{16(2x - 1)^3}{(u + 1)^2}$; 3.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12u(u^2-2)^2(-x^2-x+2)}{(x^2 + +2)^2}$

3.5 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-6x - 31}{2(2x - 5)^2\sqrt{3x + 4}}$; 3.6 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2u^3}{\sqrt{x}}$

3.7 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{45}{(u - 4)^2(x - 5)^2}$; 3.8 $\dfrac{(3u^2 - 1)(2x - 3)}{4\sqrt{u(u^2-1)}(x^2 - 3x + 5)}$

4. $\frac{dx}{dt} = 0.5$; $\frac{dy}{dt} = 37.5$

Ejercicio 12 (Pág. 87)

1.1 $f'(x) = 2x - 8$; $f''(x) = 2$; $f'''(x) = 0$.

1.2 $f'(x) = 8x^3 - 6x + 6$; $f''(x) = 24x^2 - 6$; $f'''(x) = 48x$

1.4 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 16x - 11$; $f''(x) = 12x^2 - 6x + 16$; $f'''(x) = 24x - 6$.

1.6 $f'(x) = 4(x-4)^3$; $f''(x) = 12(x-4)^2$; $f'''(x) = 24(x-4)$

1.8 $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f''(x) = \frac{6}{x^4}$; $f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$

1.9 $g'(x) = 18x^2(x^3 - 1)^5$; $g''(x) = (306x^4 - 36x)(x^3 - 5)^4$

1.10 $g'(x) = \frac{5}{(x+5)^2}$; $g''(x) = \frac{-10}{(x+5)^3}$; $g'''(x) \; \frac{30}{(x+5)^4}$

2.1 $f'(x) = 0$; $f''(x) = 6$; $f'''(x) = 6$; $f^{n}(x) = 0$ para $n \geq 5$.

2.2 $f'(x) = 0$; $f^{(n)}(x)$ no existe para $n \geq 2$.

2.4 $f'(x) = -7$; $f''(x) = 12$; $f'''(x) = -24$; $f''''(x) = 24$

$f^{(n)}(x) = 0$ para $n \geq 5$.

3.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{4y}$; 3.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy}{3y^2 + 2x^2}$

3.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{2y + 2}$

4.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{6y - x}$; $\frac{d^2y}{dx} = \frac{78y^2 - 26x^2 - 26xy}{(6y - x)^3}$

4.3 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

5.2 $m = -6$; 5.4 $m = -\frac{2}{3}$

Ejercicio 13 (Pág. 88)

1. Dominio $\{1\}$; Co-dominio = {Nos. Reales} ; Gráfica ; Recta $x = 1$:

3.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x + 2}$; $f'(2) = \frac{13}{12}$

3.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{6(\mathrm{lu}\,x^2)^2}{x}$; $f'(2) = 3(\mathrm{lu}4)^2$

3.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 + 5x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 1)(x^3 + 2x - 1)}$; $f'(2) = \frac{2}{33}$

3.7 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{lu}\,2x}$; $f'(2) = \frac{1}{2\,\mathrm{lu}4}$

3.9 $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 + 6x^2 - 10x}{(x^3 - 5)(x^2 + 2}$; $f'(2) = \frac{14}{3}$

3.11 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2}{6x^2 + 2x}$; $f'(2) = \frac{2}{7}$

4.1 $f'(x) = f'(x)\left(\frac{2x+3}{x^2+3x-2} + \frac{3}{x-3} - \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\right.$

4.3 $f'(x) = f(x)\left(\frac{2}{x} + \frac{8}{2x-5} + \frac{3}{x-1}\right.$

5. $m = 5$

6. $3y - x = 0$

<u>Ejercicio 14</u> (Pág. 90)

2.1 $\frac{dy}{dx} = 5e^{5x}$; 2.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$

2.5 $\frac{dy}{dx} = 3(x+3)^2 e^{(x+3)^3}$; 2.7 $\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{(x-4)^2} e^{\frac{x+4}{x-4}}$

2.9 $f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x$; 2.12 $g'(x) = 2$

2.15 $f'(t) = \frac{-1}{t^2} e^{\frac{1}{t}}$; 2.16 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5y^4}\left(2e^{2x} + \frac{1}{x-1}\right)$

3. $P\left(\frac{1}{2} \ln 2, 2\right)$; 4. $m = 1$

5. $2y + x - 4 = 0.$

6.1 $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$

6.3 $f'(x) = e^x(\ln x) + \frac{1}{x})$; $f''(x) = e^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$

6.5 $f'(x) = 1$; $f''(x) = 0.$

6.7 $g'(x) = 2xe^{x^2} - 1 - \ln x$; $f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} - \frac{1}{x}$

6.9 $g'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$; $g''(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{(1-e^x)^4}$

7.1 $E = 2x + 1$; 7.3 $E = \frac{x}{x+2}$

7.5 $E = \frac{2x}{(2x+3)\ln(2x+3} + 2$

8. $\eta = -\frac{5}{4}$

<u>Ejercicio 15</u>. (Pág. 113)

1.1 Puntos críticos P (1,3)
Puntos de Inflexión: No hay.

1.5 Puntos críticos: Tangente vertical en $x = -2$
Puntos de inflexión: No hay.

1.7 Puntos críticos: $P\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$
Puntos de inflexión: $Q\left(-2, \frac{-2}{e^2}\right)$

1.9 Puntos críticos: P (0,-3)
Puntos de inflexión: No hay

2.1 Tangente: $y + 2x - 4 = 0$; Normal : $2y - x - 8 = 0$.

2.3 Tangente: $y = 0$; Normal: $x = 0$

2.5 Tangente: $2y - x - 8 = 0$; Normal: $y + 2x + 1 = 0$

2.7 Tangente: $y - x + 1 = 0$; Normal: $y + x - 1 = 0$.

3. Puntos de inflexión: $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{250}{27}\right)$ Cóncava hacia arriba para todo $x > -\frac{2}{3}$; Cóncava hacia abajo para todo $x < -\frac{2}{3}$

<u>Ejercicio 16</u> (Pág. 114)

1.1 Máximo relativo: $P\left(\frac{1}{6}\ \ \frac{1}{12}\right)$

1.6 Máximo relativo: P(0,6)
Mínimo relativo: Q(2,2)

1.8 Punto estacionario: $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2.1 Máximo relativo: P(0,1)
Mínimo relativo: Q(2, - 3)

2.5 Máximo relativo: P (-2,0)

Mínimo relativo $Q\left(-\frac{4}{5}, -\frac{26,244}{3,125}\right)$

Punto estacionario: R(1,0)

2.9 Mínimo relativo: P(1, -2)

3.1 Máximo relativo: P(-2, 12)

Mínimo relativo: $Q\left(\frac{4}{31}, -\frac{176}{27}\right)$

Ejercicio 17 (Pág. 115)

1. Ancho = 11.2 cms. ; Largo = 41.2 cms. ; altura = 4.4 cms.

2. No. de pasajeros = 500

3. Renta óptima = $ 110.00

5. $V = 5\sqrt[3]{2}$; $h = 10\sqrt[3]{2}$

6. Ancho = 200 Mts.; largo = 400 Mts. (Paralelo al río).

Ejercicio 18 (Pág. 116)

1.2 $I_t = \frac{60x}{x+10}$; $\lim_{x \to \infty} I_t = 60$ (Máximo)

1.3 $Img = \frac{60}{(x+10)^2}$

2. $P = \frac{391}{7} \approx 56$; $x = \frac{103}{7} \approx 14.7$

4.2 $I_t = 800x - 2x^3$; $Img. = 800 - 6x^2$

4.3 $E_p(x) = \eta = -\frac{3}{2}$; $E_x(P) = -\frac{2}{3}$

Ejercicio 19 (Pág. 146)

1.1 $\frac{\delta w}{\delta x} = 6x + 2y$; $\frac{\delta w}{\delta y} = 2x - 2y$

1.3 $\frac{\delta w}{\delta x} = 10y\,(2xy - 3)^4$; $\frac{\delta w}{\delta y} = 10\,x\,(2x\,y - 3)^4$

1.5 $\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{2x + 2y}{x^2 + 2xy - 3y}$; $\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{2x - 3}{x^2 + 2xy - 3y}$

1.6 $\frac{\delta w}{\delta x} = 2x - z$; $\frac{\delta w}{\delta y} = z^2$; $\frac{\delta w}{\delta z} = -x\,2\,y - 9z^2$

1.9 $\frac{\delta w}{\delta x} = 2xye^{x^2y}$; $\frac{\delta w}{\delta y} = x^2e^{x^2y}$; $\frac{\delta w}{\delta z} = -3e^z$

2.1 $\frac{\delta w}{\delta x} = 8$; $\frac{\delta w}{\delta y} = -5$

2.3 $\frac{\delta w}{\delta x} = 2$; $\frac{\delta w}{\delta y} = -2$

2.4 $\frac{\delta w}{\delta x} = 1$; $\frac{\delta w}{\delta y} = 1$

3.1 $m_x = 2$; $m_y = 2$

3.3 $m_x = e$; $m_y = e$

3.5 $m_x = 0$; $m_y = 3$

Ejercicio 20 (Pág. 147)

1.1 $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x$; $\frac{\delta u}{\delta y} = 2y$; $\frac{\delta^2 u}{\delta x} = 2$; $\frac{\delta^2 u}{\delta y} = 2$; $\frac{\delta u}{\delta x \delta y} = 0.$

1.4 $\frac{\delta u}{\delta x} = 5z^2 + 2y$; $\frac{\delta u}{\delta y} = 2x - 2y$ $\frac{\delta u}{\delta z} = 10\,xz$

$\frac{\delta^2 u}{\delta x} = 0$; $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -2$; $\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0$; $\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = 2$;

$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} = 10$; $\frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} = 0$

2.1 Dirección x : Decreciente y cóncava hacia abajo.

Dirección y: Recta creciente.

2.4 Dirección x: Decreciente y cóncava hacia arriba.

Dirección y: Creciente y cóncava hacia abajo.

2.6 Dirección x: Decreciente y cóncava hacia arriba.

Dirección y: Creciente y cóncava hacia arriba.

<u>Ejercicio 21</u> (Pág. 148)

1. $dy = -0.4$; $\Delta y = -0.392$

2.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$; 2.3 $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}}{3t^2 - 2}$

3.1 $dw = (2xy + 3y^3 - 4)\,dx + (x^2 + 9xy^2)\,dy$

4.1 $\frac{du}{dt} = 4xt + 6x + 6yt - 4y$

4.3 $\frac{du}{dt} = 4e^{2x} + 6e^{3y}$

4.5 $\frac{du}{dt} = 4x + 2z - 2y + 4ty$

5.1 $\frac{du}{dt} = 10y + x$; $\frac{du}{dx} = \frac{5}{2}y + \frac{1}{4}x$; $\frac{du}{dy} = 10y + x$

6. $\frac{du}{dt} = \frac{4}{5}\sqrt{5} + 1$; $\frac{du}{dx} = 2\sqrt{5} - 8$. $\frac{du}{dy} = 4 + \frac{16}{5}\sqrt{5}$

Ejercicio 22 (Pág. 149)

1.1 $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{y}{2z}$; $\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{x - 4y}{2z}$

1.3 $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{2zy - y^2}{-2x^2 - 2xy - 6z(2zx + y^2)^2}$; $\frac{\delta z}{\delta y} =$

$\frac{y^2 + 2xy - 2zx}{-2x^2 - 2xy - 6z(2zx + y^2)^2}$

2.1 $\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{15}{4}$; $\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{3}{4}$

2.3 $\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{5}{2}$; $\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{7}{2}$

3.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{6xy - 3x^2}{8y^3 - 3x^2}$; 3.3 $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{3e^y}$

3.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x}$

4.1 $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{6zx}{3z^2 - 3x^2 + 2y3}$; $\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-6zy^2}{3z^2 - 3x^2 + 2y^3}$

4.3 $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{xze^{2x} - z}{x}$; $\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-z}{2y}$

5.1 $\frac{dy}{dx} = 1$; 5.3 $\frac{dy}{dx} = -2$

6. Tangente: $2y - x + 1 = 0$; Normal : $y + 2x - 1 = 0$

Ejercicio 23 (Pág.

2.2 $f_x = \frac{3y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2y^{\frac{4}{5}}}{5x^{\frac{4}{5}}}$; $f_y = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}} + \frac{8x^{\frac{1}{5}}}{5y^{\frac{1}{5}}}$

$x f_x + y f_y = f(x,y)$

3.1 $m = 2$; 3.3 $m = 3$; 3.4 $m = 2$

Ejercicio 24 (Pág. 186)

1.1 Mínimo relativo: P (- 1, 0, - 1)

1.3 No hay P($\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{31}$ $\frac{157}{3}$) máximo en la dirección y y mínimo en la dirección x.

2. $P_1 = 12$, $P_2 = 26.5$; $x_1 = 99$; $x_2 = 143.5$

3.1 P (2,2,6)

3.3 P(4,3,5,33)

Ejercicio 25 (Pág. 187)

1.1 $E_x(u) = 3$; $E_y(u) = 2$

1.3 $E_x(u) = \frac{2x^2 - xy}{(x^2 - xy + y^2)\ \mathrm{lu}\ (x^2 - xy + y^2)}$; $E_y(u) =$

$\frac{2y^2 - xy}{(x^2 - xy + y^2)\ \mathrm{lu}\ (x^2 - xy + y^2)}$

2. A_1 y A_2 son sustitutos ; A_1 y A_3 son sustitutos; A_1 y A_4 son complementarios; A_2 y A_3 son complementarios; A_2 y A_4 son sustitutos; A_3 y A_4 son sustitutos.

3. $E_{p1}(x_1) = -2$; $E_{p2}(x_1) = 3$; $E_{p1}(x_2) = 2$; $E_{p2}(x2) = -1$

A, y A2 son sustitutos.

Ejercicio 26 (Pág. 189)

1. $Z_{me} = -4x + 388 - \frac{1,200}{x}$; $Z_{mg} = -8x + 388$

3. $A = 1.5$; $\alpha = \frac{1}{2}$

5. Costo mínimo para $x = 20$; $y = 5$

Ejercicio 28 (Pág.213)

1.1 $\frac{1}{4}x^4 + C$; 1.3 $3x^{\frac{2}{3}} + C$; 1.5 $x^3 + C$

1.7 $\sqrt{2x} + C$; 1.9 $2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$; 1.11 $x^3 + \frac{2}{x} + C$

1.13 $\frac{1}{9}(3x+4)^3 + C$; 1.15 $\frac{1}{9}(x^3+2)^3 + C$

1.17 $-\frac{2}{3}(x^3-2)^{-2} + C = \frac{-2}{3(x^3-2)^2} + C$

1.19 $-\frac{1}{3}(1-3x^2)^{\frac{3}{2}} + C$; 1.21 $-\frac{3}{8}(1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C$

1.23 $\ln x + C$; 1.25 $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$

1.27 $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x+1) + C$

Ejercicio 29 (Pág. 214)

1.1 $\frac{1}{4}\ln(2x^2-1) + C$; 1.3 $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln(x+1) + C$

1.5 $\frac{1}{2}e^{2x} + C$; 1.7 $\frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$

1.9 $2^{x2} + C$; 1.11 $2e^{\sqrt{x}} + C$

1.13 $\frac{(2e)^x}{\ln 2 + 1} + C$

2.1 $e^{x^3} + C$; 2.3 $\ln(e^x - 1) + C$

2.5 $\frac{1}{6}e^{6x}$

<u>Ejercicio 30</u> (Pág. 216)

1.1 $\frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$

1.5 $\frac{1}{2}x^2 \text{lu}\, x + x\, \text{lu}\, x - \frac{1}{4}x^2 - x + C$

1.9 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1 + x^2} + C$

2.1 $\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x} + x e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + C$

2.5 $\frac{1}{2}\text{lu}(e^{2x} + 1) + C$

2.9 $\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{15}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$

<u>Ejercicio 31</u> (Pág. 216)

1.1 $\frac{1}{2}\text{lu}\, x + 1 + \frac{3}{2}\text{lu}(x - 1) + \text{lu}\, C = \text{lu}\, C\,(x + 1)^{\frac{1}{2}}(x - 1)^{\frac{3}{2}}$

1.5 $\text{lu}\, \frac{(x + 2)^{\frac{11}{9}}}{(x - 1)^{\frac{2}{9}}} + \frac{1}{3\,(x - 1)} + C$

1.9 $\text{lu}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3x - 1}{2\,(x^2 - 1)} + C$

1.11 $\text{lu}\, \frac{C\,(x + 1)^{\frac{7}{10}}(x - 1)^{\frac{5}{14}}}{(x + 6)^{\frac{37}{35}}}$

2.1 $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 24\, \text{lu}\,(x - 3) - \frac{20}{x - 3} + C$

<u>Ejercicio 33</u> (Pág. 249)

<u>Ejercicio 33</u> (Pág. 249)

1.1 $\frac{50}{3}$; 1.3 1. ; 1.5 $e - 1 \approx 1.72$

1.7 $6 - 2\sqrt{7}$; 1.9 11.75 ; 1.11 $-\frac{1}{2} + 9\, \text{lu}\, 6$

3.1 2 ; 3.3 21 ; 3.6 1

<u>Ejercicio 34</u> (Pág. 250)

1. $S^* = 7.5$; $S_* = 5$; $A = 6.25$; $A = \frac{S^* + S_*}{2}$

2. $S^* = 3.375$; $S_* = 2.125$; $A = 2.67$

3. $S^* = S_* = A = 15$

5.1 18 ; 5.3 $\frac{2}{3}$; 5.5 $e^2 - 1 \approx 6.39$

5.7 1

6.1 $\frac{76}{3}$; 6.3 2.5

<u>Ejercicio 35</u> (Pág. 251)

1.1 No existe ; 1.2 No existe; 1.5 No existe

1.7 No existe ; 1.9 1 ; 1.13 $\frac{1}{3}$

<u>Ejercicio 36</u> (Pág. 252)

1. $I_t = -15x + 250 - \frac{1000}{x + 4}$; $P = 15 + \frac{250}{x} - \frac{1000}{x^2 + 4x}$

2. $C_t = x^2 + 13x$; $C_{md} = x + 13$

3. (a) $C_t = 100{,}000\ (1.1)^t$; $C_{10} = 259{,}380$

4. $D_t = D_o + 50;000{,}000\ (\in^{t/s} - 1)$

Ejercicio 37. (Pág. 297).

1.1 Divergente ; 1.3 Convergente; 1.5 Divergente

2.1 $A_n = 2^n$ Divergente; 2.3 $A_n = \frac{1}{(n+1)!}$ Convergente.

2.5 $A_n = \frac{n+2}{2n-1}$ Convergente.

3.1 $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\ldots$ Convergente

3.3 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$ Convergente.

3.5 $\frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \frac{3}{625}, \ldots\ldots$ Convergente.

3.7 $-x, \frac{x^2}{2}, -\frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \ldots\ldots$

3.9 $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}, \frac{x^4}{24}, \ldots\ldots$

Ejercicio 38 (Pág. 299)

1.1 Convergente $S_\infty = \frac{3}{2}$; 1.3 Divergente.

1.5 Convergente $S_\infty = 16$

2.1 $\frac{85}{99}$; 2.3 $\frac{125}{999}$; 2.5 $\frac{799}{990}$; 2.7 $\frac{21{,}379}{99{,}900}$

3 $m = \frac{1}{1-\alpha}$; $m = 2.5$

4. $\alpha = 0.75$; $m = 4$

5.1 0 ; 5.3 ∞ ; 5.5 $-\infty$

Ejercicio 39 (Pág. 300)

1.1 $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$; 1.3 $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}$; 1.4 $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$

2.1 Divergente ; 2.3 Convergente ; 2.5 Convergente

2.7 Divergente ; 2.9 Convergente ; 2.11 Divergente

2.13 Divergente ; 2.15 Divergente.

Ejercicio 40 (Pág. 301)

1.1 Convergente (Condicionalmente)

1.3 Divergente.

1.5 Divergente.

2. 0.63212

4.1 $-1 < x < 1$; 4.3 $-\infty < x < \infty$

4.5 $0 < x < 2$; 4.9 $-1 < x < 1$

Ejercicio 41 (Pág. 303)

1.1 $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots - \frac{1}{n}x^n \ldots\ldots$

Intervalo de convergencia : $-1 \leq x \leq 1$

2.1 $\quad \text{lu}\, x = \text{lu}\, 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{(2)(3^2)}(x-3)^2 + \frac{1}{3(3^3)}(x-3)^3 - \frac{1}{4(3^4)}(x-3)^4 + \dots\dots\dots$

Intervalo de convergencia: $0 < x \leq 6.$

3. $\quad \text{lu}\, 0.98 = 0.020204$

Ejercicio 42 (Pág. 336)

1.1 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$; 1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2.3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{43}{11} & -\frac{211}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{11} & -\frac{29}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{11} & \frac{105}{22} \end{pmatrix}$

2.5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 43 (Pág. 337)

1.1 $\quad x_1 = -5$, $\quad x_2 = 8$; 1.3 $\quad x_1 = 0.5$, $\quad x_2 = -0.5$, $\quad x_3 = 2$, $\quad x_4 = -2$

2.1 $\quad x_1 = 5$, $\quad x_2 = -4$; 2.3 $\quad x_1 = \frac{1}{3}$, $\quad x_2 = \frac{1}{3}$, $\quad x_3 = \frac{1}{3}$

2.5 $\quad x_1 = \frac{18}{5} - \frac{2}{5}x_3$

$x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3$

$x_3 =$ Cualquier número real.

; 2.7 $\quad x_1 = 2$, $\quad x_2 = 3$, $\quad x_3 = 1$

Ejercicio 44 (Pág. 338)

1.1 $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 \\ 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; 1 $\begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

1.5 $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \\ -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; 1.7 No tiene sentido

1.9 $\begin{pmatrix} 15 & 3 & -4 \\ 15 & 8 & -4 \\ 22 & 1 & 17 \end{pmatrix}$; 1.11 $\begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

2. $x = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{9}{5} & -5 \\ 6 & \frac{11}{5} & \frac{32}{5} \\ 5 & \frac{13}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix}$

3.1 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 11 & 14 & 11 \end{pmatrix}$; 3.5 No tiene sentido.

3.9 $\begin{pmatrix} 16 & 15 & 31 \\ 29 & 34 & 35 \end{pmatrix}$

<u>Ejercicio 45</u> (Pág. 339)

3. $\begin{pmatrix} 14 & 8 & 23 \\ 23 & -3 & 14 \\ 31 & -7 & 11 \end{pmatrix}$; 4. Periodicidad = 2

8. (b) $x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 1$

<u>Ejercicio 46</u> (Pág. [illegible])

1.1 14 ; 1.3 - 57 ; 1.5 -648 ; 1.7 2,491

2.1 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$; 2.3 $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$

<u>Ejercicio 47</u> (Pág. 378)

1.1 $A\,A' = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 12 \\ 5 & 5 & 4 \\ 12 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

3.1 $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $A^* = (A^*)^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.1 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{5}{52} & \frac{3}{52} \end{pmatrix}$; 5.3 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} & \frac{13}{40} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$

5.5 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & - & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Ejercicio 48 (Pág. 379)

1.1 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; 1.3 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{11}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$

1.5 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 1.7 A^{-1} No existe.

2.1 $x_1 = \frac{1}{2}$; 2.3 $x_1 = 1$; 2.5 $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{3}$ $x_2 = 1$ $x_2 = \frac{1}{2}$

$x_3 = 1$ $x_3 = -\frac{1}{4}$

$x_4 = -\frac{1}{4}$