APENDICE A

El siguiente análisis pretende mostrar en forma explícita el modelo de Becker (2) aplicado a una unidad familiar compuesta de dos miembros, extendiendo el modelo presentado en el punto &I.6 de este trabajo y analizando los efectos sobre la participación en el mercado de trabajo de los cambios en los precios, en los salarios y en las oportunidades que ofrece el mercado de trabajo. Dicho análisis se realiza para el efecto sustitución, considerando que los bienes se producen en proporciones fijas, en los puntos &A.1 a &A.11. A partir del punto &A.12 se abandona este supuesto para analizar la sustitución entre tiempo e insumos del mercado (&A.12) y las relaciones de sustituibilidad y complementariedad (&A.13) del efecto sustitución. En el punto &A.14 se permiten las variaciones en las componentes del vector salarios y en el punto &A.15 se estudia el efecto ingreso.

&A.1 Si se extiende el modelo de Becker a una familia con dos miembros, donde la familia maximiza una función de utilidad (1) que depende del consumo de m bienes (Z_i), cada uno de los cuales tiene una función de producción f(2) que depende de la cantidad de bienes o insumos del mercado (X_i) y del trabajo dedicado a su producción (T_i) por ambos miembros, se obtienen las siguientes expresiones:

$$(1) \quad U = U(Z_1, \ldots, Z_m)$$

$$(2) \quad Z_i = f_i\ (X_i,\ T_{i1},\ T_{i2})\ ,$$

donde los subíndices 1 y 2 indican los dos miembros de la familia. La compra de bienes en el mercado (X_i) estará sujeta a las disponibilidades de ingreso (I) de la familia:

$$(3) \quad \sum_{1}^{m} P_i\ X_i = I,$$

donde P_i indica el precio de los bienes del mercado. Si se supone que la producción de bienes se hace en proporciones fijas de los factores, se obtiene:

$$(4a)\ T_{ij} \equiv t_{ij}\ Z_i\ ,\ (j = 1,\ 2),$$

$$(4b)\ X_i \equiv b_i\ Z_i\ ,$$

donde t_{ij} es un vector que da la cantidad de tiempo necesario para producir el bien Z_i por el individuo j y b_i es un vector similar para la cantidad de bienes del mercado.

Además de la restricción (3), la familia enfrenta una restricción de tiempo referente a que cada individuo sólo dispone de un tiempo fijo T para dedicarlo a la producción de bienes en casa (T_c) o al trabajo en el mercado (T_w):

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{m} T_{ij} = T_{cj} = T - T_{wj} \quad \text{para } j = 1,\ 2$$

donde se está sumando la cantidad de tiempo dedicado a la producción de los bienes por cada persona.

Si en la producción del bien Z_i los miembros de la familia requieren de diferentes cantidades de insumos del mercado, la ecuación (2) cambia:

$$(6a) \quad Z_i = f_i \left((X_{i1},\ T_{i1}),\ (X_{i2},\ T_{i2}) \right) ,$$

y las ecuaciones (3) y (4b) cambian a:

$$(6b) \quad \sum_{i=1}^{m} P_i\ (X_{i1} + X_{i2}) = I$$

$$(6c) \quad X_{ij} = b_{ij}\ Z_{ij} \quad \text{para } j = 1,\ 2$$

&A.2 Si llamamos S a la maximización del ingreso familiar por la familia (sujeta a (3), (4) y (5)) y llamamos L a los ingresos dejados de obtenerse por buscar la utilidad, la relación entre S, L e I vendrá dada por:

$$(7) \quad S \equiv L\ (Z_1,\ \ldots,\ Z_m) + I\ (Z_1,\ \ldots,\ Z_m)\ .$$

Descomponiendo la expresión anterior para los dos miembros de la familia y suponiendo que tal descomposición tome la forma de una suma, se obtiene:

$$(8) \quad S \equiv L_1\ (Z_1 \ \ldots\ Z_m) + L_2\ (Z_1 \ \ldots\ Z_m) + I\ (Z_1,\ \ldots\ Z_m),$$

y al sustituir las ecuaciones (3) y (4b) se obtiene:

$$(9a) \quad S \equiv L_1\ (Z_1 \ \ldots\ Z_m) + L_2\ (Z_1 \ \ldots\ Z_m) + \sum_{i=1}^{m} P_i\ b_i\ Z_i\ ,$$

que es la ecuación que representa la restricción de recursos totales que enfrenta la familia.

Si en vez de utilizar las restricciones (3) y (4) en la maximización de S, se utilizan las restricciones (6), la restricción de recursos totales cambia a:

$$(9b) \quad S \equiv L_1 (Z_1,\ldots,Z_m) + L_2(Z_1\ldots,Z_m) + \sum_{i=1}^{m} P_i(b_{i1}+b_{i2})Z_i$$

y para n miembros de una familia se obtendría:

$$(9c) \quad S \equiv \sum_{j=1}^{n} (L_j (Z_1,\ldots Z_m) + \sum_{i=1}^{m} P_i\, b_{ij}\, Z_i)$$

Para maximizar la función de utilidad (1) sujeta a la restricción de recursos totales (9b) se forma el lagrangiano

$$Lag = U(Z_1,\ldots,Z_m) + \lambda (S - L_1 - L_2 - \Sigma\, P_i\, (b_{i1} + b_{i2})\, Z_i),$$

obteniéndose las condiciones de primer orden:

$$(10a) \quad U_i = \lambda\, (L_{i1} + L_{i2} + P_i\, (b_{i1} + b_{i2})\,).$$

Donde:

$U_i = \partial U/\partial Z_i$,

$$L_{i1} = \frac{\partial L_1}{\partial Z_i} = \frac{\partial L_1}{\partial T_{i1}} \frac{\partial T_{i1}}{\partial Z_i} + \frac{\partial L_1}{\partial X_{i1}} \frac{\partial X_{i1}}{\partial Z_i} = l_{i1}\, t_{i1} + C_{i1}\, b_{i1}$$

$$L_{i2} = \frac{\partial L_2}{\partial Z_i} = \frac{\partial L_2}{\partial T_{i2}} \frac{\partial T_{i2}}{\partial Z_i} + \frac{\partial L_2}{\partial X_{i2}} \frac{\partial X_{i2}}{\partial Z_i} = l_{i2}\, t_{i2} + C_{i2} b_{i2},$$

y donde:

l_{ij} = Ganancias marginales dejadas de obtenerse, por el miembro j, por usar más tiempo en producir Z_i.

C_{ij} = Ganancias marginales dejadas de obtenerse, por el miembro j, por usar más bienes en producir Z_i.

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (10a) se puede expresar:

$$(10b) \quad U_i = \lambda (l_{i1}\, t_{i1} + l_{i2}\, t_{i2} + b_{i1}(P_i + C_{i1}) + b_{i2}\, (P_i + C_{i2})).$$

Si se supone:

$$(11) \quad C_{i1} = C_{i2} = 0,$$

la expresión (10b) se convierte en:

$$(12) \quad U_i = \lambda \left(l_{i1}\, t_{i1} + l_{i2}\, t_{i2} + P_i\, (b_{i1} + b_{i2})\right),$$

en donde:

$P_i\, (b_{i1} + b_{i2})$ = costo marginal directo (en bienes)

$l_{i1}\, t_{i1} + l_{i2}\, t_{i2} = L_{i1} + L_{i2}$ = Costo marginal indirecto (en tiempo).

$L_{i1} + L_{i2} + P_i\, (b_{i1} + b_{i2})$ = Costo marginal del bien $Z_i = r_i$.

El término l_{ij} no sólo depende del vector de salarios $(W_1, \ldots, W_m)$ que el individuo j puede obtener en el mercado, sino también del grado en el que el bien i contribuya a que el individuo j obtenga mayores ganancias en el mercado, pudiéndose distinguir los bienes en productivos (con un bajo l_{ij}) e improductivos (con un

alto l_{ij}).

AUMENTO EN LOS PRECIOS.

&A.3 Supóngase un aumento d en los precios de los bienes del mercado, de tal forma que los nuevos precios P_i^* se expresan:

$$P_i^* = P_i (1 + d).$$

Llamando r_i al costo marginal de producir Z_i:

$$(13) \quad r_i = p_i (b_{i1} + b_{i2}) + L_{i1} + L_{i2} ,$$

a los nuevos precios dicho costo cambia a:

$$r_i^* = r_i + dP_i (b_{i1} + b_{i2}) ,$$

y el incremento porcentual en el precio total del bien i es:

$$\frac{(r_i^* - r_i) \cdot 100}{r_i} = \frac{d P_i (b_{i1} + b_{i2}) \cdot 100}{r_i} ,$$

obteniéndose el incremento porcentual del precio del bien i respecto al del bien h (a_{ih}):

$$(13a) \quad a_{ih} = \frac{P_i (b_{i1} + b_{i2})}{P_h (b_{h1} + b_{h2})} \frac{r_h}{r_i} .$$

Limitando el análisis al efecto susttitución, entre más grande sea el costo directo del bien Z_i respecto al del bien Z_h, mayor

será a_{ih} y menos consumirá la familia del bien Z_i que sube relativamente más de precio (el análisis en este apéndice se reduce al efecto sutitución, esto supone cambios con compensación del ingreso), significando que el consumo se retira de los bienes intensivos en insumos del mercado hacia los bienes más intensivos en tiempo, tendiendo por tanto (dada la restricción de tiempo (5)) a disminuir la oferta de trabajo.

Esta tendencia se da aún en el caso de que los costos directos sean iguales; así, en este caso:

$$a_{ih} = \frac{r_h}{r_i} = \frac{1 + (L_{h1} + L_{h2}) - (L_{i1} + L_{i2})}{r_i}$$

observándose que el aumento general de precios induce la sustitución del bien i por el bien h (menos de i y más de h) si este último tiene mayores costos marginales en ingresos dejados de obtenerse (ya sea que requiera un uso más intensivo en la producción del bien h, t_h, o bien, que se trate de un bien menos "productivo" l_h).

Lo anterior no es necesariamente cierto para ambos miembros de la familia, si al pasar de la producción del bien Z_i al del bien Z_h la intensidad en el uso del tiempo entre ambos miembros está negativamente correlacionada (esto es, si L_{hi}-L_{i1} y L_{h2}-L_{i2} tienen diferentes signos).

&A.4 En el análisis que se lleva a cabo, se separa el lado dere