Suponiendo que tenemos un cuerpo realizando un movimiento circular uniforme, con velocidad angular constante ω_o, en un círculo de radio R. Vamos a analizar la proyección de este movimiento en un eje cualquiera, por ejemplo el eje x.. Esto sería lo mismo que sí iluminamos el cuerpo en movimiento, a lo largo del plano del círculo, y observamos el movimiento de la sombra del cuerpo en una pantalla, (ver fig. 4). Lo anterior lo podemos obtener en un plato giratorio (tocadiscos) y colocando cuatro monedas sobre el borde e iluminando el aparato con una linterna colocada a la misma altura, de tal manera que la dirección del eje del rayo de luz de la linterna pase por el centro del plato giratorio. Al utilizar una pared como pantalla para proyectar la sombra del plato y las monedas. Se hace girar el plato a razón de 331/3 r.p.m. observando el movimiento de las monedas de la posición A a la B como un péndulo y la proyección en la pantalla como un movimiento armónico simple.

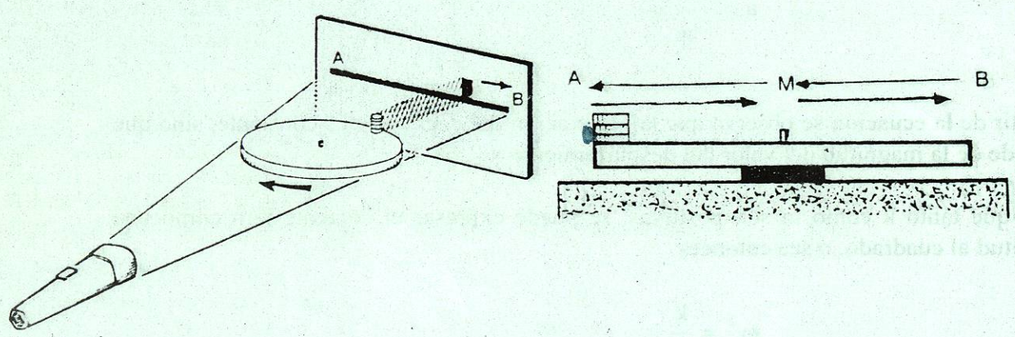

Figura 4. La sombra de las monedas colocadas sobre el borde del plato giratorio describe, sobre la trayectoria AB, un movimiento armónico simple.

Por lo anterior podemos interpretar un movimiento armónico simple como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de uno de sus diámetros. Esta interpretación es otra de las contribuciones hechas por Galileo, quien concluyó lo anterior al analizar el movimiento de una de las lunas de Jupiter en el año 1610. Tomando en cuenta esta analogía, determinaremos el período de oscilación de un péndulo simple.
A partir de la figura 5, se considera el plato giratorio como círculo de referencia, en donde la posición de la proyección del cuerpo, queda en función del radio R y del ángulo θ, como:

$$x = R\cos\theta$$

La aceleración a_x de la proyección del cuerpo, en función de la aceleración centrípeta a_c y el ángulo θ será: $a_x = -a_c\cos\theta$ donde el signo indica que el sentido de la aceleración es contrario al desplazamiento.

Recordemos que la aceleración centrípeta, en función de la velocidad angular es:

$$a_c = \omega_o^2 R$$

sustituyendo

$$a_x = -\omega_o^2 R\cos\theta$$

sustituyendo

$$x = R\cos\theta$$

nos queda

$$a_x = -\omega_o^2 x$$

que coincide con la expresión de la aceleración del **MAS**, o sea que la proyección del movimiento circular uniforme de un cuerpo en un eje cualquiera, es un movimiento armónico simple. A este círculo se le denomina círculo de referencia, ver figura 5.

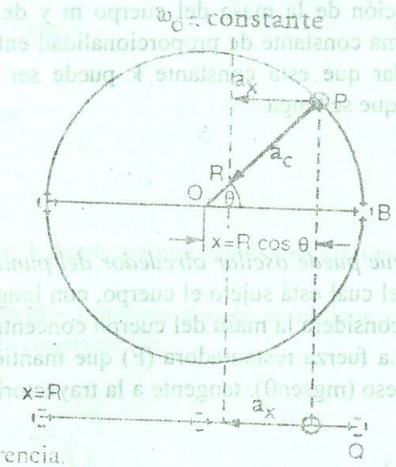

Figura 5. Circulo de referencia.

Ya podemos ver que la magnitud ω_o, es la velocidad angular del movimiento circular uniforme del círculo de referencia.

De este análisis vamos a obtener una expresión para el período del MAS. Recordemos del movimiento circular que

$$\omega_o = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donde f es la frecuencia y T es el período.

Como el período del movimiento circular uniforme del círculo de referencia y del **MAS** asociado son iguales podemos obtener

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

y como $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$ $\quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

por lo cual nos queda que al sustituir el período del **MAS** será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El período del **MAS** queda en función de la masa del cuerpo m y de la constante de proporcionalidad (k). siendo la misma constante de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento (F=–kx). Recordar que esta constante k puede ser un valor o una expresión, dependiendo del sistema que se tenga.

4.- El péndulo simple

El péndulo es todo cuerpo que puede oscilar alrededor del punto de suspensión. Es simple si consideramos el hilo del cual está sujeto el cuerpo, con longitud constante y de masa despreciable. También se considera la masa del cuerpo concentrada en un punto y oscilando en un plano vertical. La fuerza restauradora (F) que mantiene al cuerpo en oscilación es la componente de su peso (mgsenθ). tangente a la trayectoria. La fricción se considera despreciable.

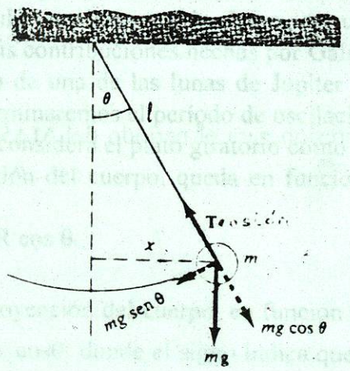

Figura 6. Péndulo simple.

Como F= –mg senθ. entonces, se observa que la fuerza no es proporcional al desplazamiento, lo cual es necesario para el **MAS**.

Si θ es menor a 12°, entonces, los valores de sen θ y θ rad son aproximadamente iguales, por lo tanto

$$\text{sen}\,\theta = \theta\ \text{rad} = \theta$$

entonces $\quad F = -mg\,\theta$

observándose que la fuerza es proporcional al desplazamiento (θ), por lo cual es un **MAS**

en donde $\quad \theta = \frac{x}{l}$ de la figura 6.

sustituyendo

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

como m, g, l son constantes

entonces $\quad k = \frac{mg}{l}$

como se dijo anteriormente, k puede ser una expresión como es este caso.

En el análisis del movimiento armónico simple se obtiene que el período (T) está en función de la masa (m) y la constante (k)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

sustituyendo $\quad k = \frac{mg}{l}$

se tiene $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}}$

quedando $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

De este análisis se concluye que:

1) Si la longitud del péndulo es mayor, mayor será su período.

2) El período del péndulo no depende de su masa ni de la amplitud de oscilación, siempre que el ángulo sea pequeño ya que en la expresión de período no aparecen estas magnitudes.

El péndulo se aplica en geología, para determinar la aceleración de la gravedad la cual cambia por irregularidades en la superficie. Para un determinado lugar, se usa un péndulo de diseño especial para obtener con precisión el valor de la gravedad.

Ejemplo 4. Un péndulo simple de un geólogo tiene 37.10 cm de longitud y 0.8190 Hz de frecuencia en determinado lugar de la Tierra. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en ese lugar?

$f = 0.8190\ \text{Hz} = 0.8190\ \frac{1}{s}$ Como $f = \frac{1}{T}$

$\ell = 37.10\ \text{cm} = 0.371\text{m}$ entonces $T = \frac{1}{f}$

sustituyendo $T = \frac{1}{0.8190\ \frac{1}{s}} = 1.22\text{s}$

entonces $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

despejando g, nos queda $g = \frac{4\,\ell\,\pi^2}{T^2}$

sustituyendo $g = \frac{4\,(0.371\text{m})\,(3.14)^2}{(1.22\text{s})^2}$

$g = 9.83\ \text{m/s}^2$

Ejemplo 5. En el aeropuerto del Norte, en Monterrey, el valor de la aceleración de la gravedad reportado es de 9.7886 m/s^2. Si se quiere construir un péndulo que tenga un período de oscilaciones de 2 segundos, determina que largo deberá tener el péndulo.

$g = 9.78\ 86\text{m/s}^2$ Como

$T = 2\text{s}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

despejando ℓ, nos queda

$\ell = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$

sustituyendo

$\ell = \left(\frac{2\text{s}}{2(3.14)}\right)^2 (9.7886\ \text{m/s}^2)$

$\ell = 0.992\ \text{m}$

Ejemplo 6. Un péndulo de 2m de longitud está situado en un lugar donde $g = 9.81\ \frac{m}{S^2}$

Determine el periodo y la frecuencia de las oscilaciones

$\ell = 2\ \text{m}$ Como

$g = 9.81\ \text{m/s}^2$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

sustituyendo

$T = 2(3.14)\sqrt{\frac{(2\text{m})}{9.81\text{m/s}^2}}$

$T = 2.837\text{s}$

Como

$f = \frac{1}{T}$

sustituyendo

$f = \frac{1}{2.837\text{s}}$

$f = 0.352\text{Hz}$