El gasto másico está relacionado con el volumétrico por la siguiente expresión:

$$Q = G\rho = A\,v\,\rho \qquad \text{donde } \rho \text{ es la densidad del fluido.}$$

Analizando las unidades el gasto volumétrico tiene unidades de m^3/s y la densidad de kg/m^3 por lo que las unidades del gasto másico son kg/s, correspondientes con la definición de gasto másico como masa del fluido por unidad de tiempo.

Ejemplo No. 12
Una tubería que comunica la presa de La Boca con la planta de distribución de agua del Municipio de Guadalupe tiene un área de la sección transversal de 0.5 m^2. Si la velocidad del flujo de agua es de 2 m/s, calcule el gasto volumétrico de agua que suministra la tubería.

Datos:
$A = 0.5\ m^2$
$v = 2\ m/s$

Solución:
$G = A\,v$
$G = 0.5\ m^2 \times 2\ m/s$
$G = 1\ m^3/s$

$G = 1\ m^3/s \times 1\,000\ litros/m^3$ Teniendo en cuenta que 1 m^3 = 1000 litros el gasto volumétrico, en litros por segundo.
$G = 1\,000\ litros/s$

Calcule el gasto másico del flujo por la tubería, del problema anterior.

Datos:
$G = m^3/s$
$\rho_{agua} = 1\,000\ kg/m^3$

Solución:
$Q = \rho = 1\ m^3/s \times 1\,000\ kg/m^3$
$Q = 1\,000\ kg/s$

Ejemplo No. 13
Se desea hacer la instalación de entrada de agua a una casa. Si se conoce que el agua llega a la entrada de la casa con una velocidad de 1.5 m/s y el gasto de los habitantes de la casa será de 1 litro/s, ¿cuál debe ser el área de la sección transversal de la tubería que se coloque?

Datos:
$G = 1\ litro/s$
$v = 1.5\ m/s$
$1\,000\ litros = 1\ m^3$

Solución:
$G = A\,v$

$A = G/v$
$A = 1\ litro/s\ /\ 1.5\ m/s$
$A = 10^{-3}\ m^3/s/1.5\ m/s$
$A = 0.00077\ m^2$

De aquí se puede calcular el diámetro de la tubería, que es el parámetro por el que se compran normalmente, en la ferretería.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Analicemos un tubo a través del cual fluye un líquido determinado. En la sección 1 del tubo el gasto másico es Q_1 (figura 28) supongamos 2 kg/s. ¿Cuál será el gasto en la sección 2 del tubo? La respuesta la podemos hallar si pensamos que si al tubo entran 2 kg de fluido por segundo, debe salir la misma masa de fluido por segundo, pues de lo contrario se desaparecería o se crearía fluido dentro del tubo, lo cual no es posible. O sea en el caso analizado:

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1\,v_1\,\rho_1 = A_2\,v_2\,\rho_2$$

Es importante notar que el área de la sección transversal del tubo puede ser diferente.

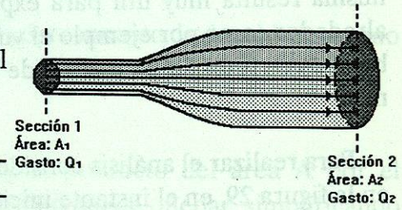

Figura No. 28

Con este razonamiento llegamos a una ecuación fundamental de la dinámica de fluidos: la ecuación de continuidad, que expresa que el gasto másico debe ser el mismo para cualquier sección del tubo de fluido, siempre que no haya desviaciones, por supuesto.

Esta ecuación puede escribirse:

$$Q = A\,v\,\rho = \text{constante}$$

Como puede verse la ecuación de continuidad es una consecuencia de la ley de conservación de la masa.

Si el fluido es incompresible, o sea que la densidad es constante, se puede hablar de que el gasto volumétrico también será constante a lo largo del tubo de fluido. O sea para fluidos incompresibles:

$$G = A\,v = \text{Constante}$$

De esta expresión se puede ver que si disminuye el área de la sección transversal A, por donde fluye el fluido, la velocidad v debe aumentar, pues el gasto G, debe ser constante. A partir de este análisis podemos obtener la explicación de por qué la velocidad de la corriente, en los ríos, aumenta cuando el cauce se hace más estrecho debido a la configuración del terreno por donde pase el río. De la misma forma cuando un chorro de agua cae libremente, de cierta altura, se puede observar como el diámetro del chorro va disminuyendo a medida que se acerca al punto donde choque con el piso; aquí la explicación se da a partir de que la velocidad del agua aumenta, bajo la acción de la fuerza de gravedad, y por tanto el área de la sección transversal del chorro debe disminuir, o sea disminuye el diámetro del chorro.

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Una relación fundamental de la dinámica de los fluidos es la Ecuación de Bernoulli, formulada por primera vez por el físico Daniel Bernoulli (1700-1782) en el año 1738. La ecuación es obtenida a partir del análisis energético de una corriente de un fluido incompresible (densidad constante) y sin fricción (viscosidad despreciable), en flujo laminar (las líneas de corriente no se cruzan).

Independientemente de las consideraciones señaladas para la obtención de la ecuación, la misma resulta muy útil para explicar muchos fenómenos que nos encontramos a nuestro alrededor como por ejemplo el vuelo de los aviones, las trayectorias curvas que describen los balones de futból o las pelotas de beisból, la navegación de los barcos a velas, y otros muchos más.

Para realizar el análisis consideremos un tubo de corriente de un fluido, como se muestra en la figura 29, en el instante inicial T_1 y luego en el instante posterior T_2. Debemos tener en cuenta el trabajo realizado, la variación de energía potencial y la variación de energía cinética del fluido, entre los dos instantes analizados.

Así podemos tener:

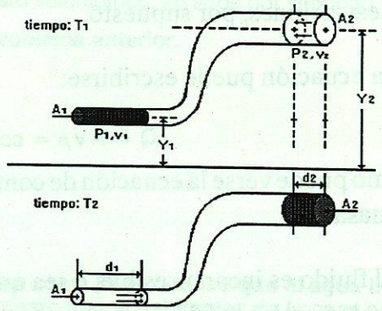

Figura No. 29

1) El trabajo realizado sobre el sistema por la fuerza de presión, en la sección 1 del tubo, será:

$$W_1 = P_1 A_1 d_1$$

recordando que el trabajo es igual a la fuerza por el desplazamiento y que la presión es la fuerza por unidad de área, por lo que la fuerza es presión (P) por el área (A) de la sección y d es el desplazamiento que tuvo el fluido.

2) El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de presión, en la sección 2 del tubo, será:

$$W_2 = -P_2 A_2 d_2$$

(2) o sea una expresión similar, pero con signo negativo, pues la fuerza actúa en sentido opuesto al desplazamiento del fluido en esa sección del tubo.

3) La variación de energía potencial está asociada al cambio de la altura del fluido entre las secciones 1 y 2 del tubo. Así, teniendo en cuenta que las alturas están dadas por Y_1 y Y_2, la variación de la energía potencial de un elemento de fluido de masa M será:

$$E_p = M g (Y_1 - Y_2)$$

4) La variación de energía cinética, del mismo elemento de fluido de masa M, está relacionada con las diferentes velocidades del flujo en la sección 1 y 2 del tubo. Así:

$$E_{cin} = \frac{M (V_1^2 - V_2^2)}{2}$$

agrupando todos los miembros descritos tenemos:

$$P_1 A_1 d_1 - P_2 A_2 d_2 + Mg (Y_1 - Y_2) + \frac{M}{2} (V_1^2 - V_2^2) = 0$$

Aquí podemos introducir un cambio de variables, a través del concepto de densidad ρ, como la masa de la unidad de volumen, por lo que:

$$M = \rho V$$

y podemos observar que en la expresión del trabajo, el producto del área A por el desplazamiento d, es el volumen V, por lo que toda la ecuación puede quedar, simplificando el volumen V, en función de la densidad:

$$P_1 + \rho g Y_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_2 + \rho g Y_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

y teniendo en cuenta que las secciones 1 y 2 del tubo fueron elegidas arbitrariamente, ésto es equivalente a decir que la expresión:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g Y = constante$$

tiene que ser constante para cualquier sección del tubo de fluido.

En esta expresión el segundo término es la energía cinética por unidad de volumen y el tercero es la energía potencial por unidad de volumen del fluido. De esta forma la ecuación de Bernoulli no es más que una expresión de la ley de conservación de la energía aplicada al caso de fluidos.

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli, como ya se dijo, tiene muchas aplicaciones en la explicación de muchas situaciones prácticas.

Analicemos el caso del vuelo de los aviones. La fuerza de sustentación, en las alas de los aviones, aparece debido a la configuración del ala. En la figura 30 se muestra el perfil del ala de un avión. Se observa que en la parte superior del ala el fluido recorre una mayor distancia, por lo que la velocidad

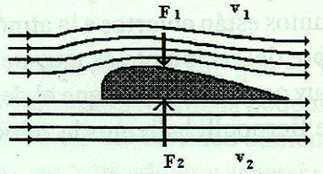

Figura No. 30

debe ser mayor, por lo que, según la ecuación, la presión debe ser menor en la parte superior que en la parte inferior del ala. Esto implica que la fuerza resultante sobre el ala está dirigida hacia arriba, y aplicada al ala, es la que sustenta el avión en vuelo.

Una explicación similar se le puede dar al caso de las bolas de beisból, cuando el lanzador las envía hacia el home con una rotación. Supongamos que el lanzador le dió a la bola una rotación, como la indicada en la figura 31. En este caso la velocidad del fluido en la parte superior de la bola es menor que en la parte inferior y por tanto la presión en la parte superior es mayor haciendo que la bola "caiga" más rápidamente, ocasionando el lanzamiento llamado normalmente "curva" hacia abajo. El mismo caso ocurre con los balones de fotból cuando se les imprime una rotación al patearla, lo que hace que la trayectoria sea una curva.

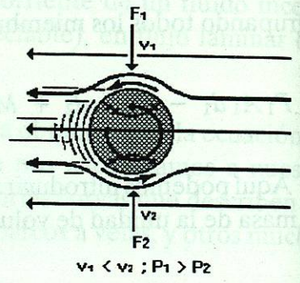

Figura No. 31

Ya habíamos señalado que la hidrostática puede considerarse un caso particular de la hidrodinámica. Consideremos un líquido en reposo de densidad ρ. Examinemos 2 puntos: uno en la superficie y el otro a una profundidad h, de la superficie. Como en ambos puntos la velocidad es cero, pues el fluido está en reposo, la ecuación de Bernoulli quedaría:

$$P_1 + \rho g Y_1 = P_2 + \rho g Y_2$$

$P_2 - P_1 = \rho g (Y_1 - Y_2)$ Despejando la diferencia de presiones entre ambos puntos:

$P_2 - P_1 = \rho g h$ Ya que $Y_1 - Y_2 = h$; la profundidad a la que se encuentra.

que es la misma ecuación que la obtenida anteriormente, para la presión en el interior de un líquido.

Analicemos un nuevo caso cuando un recipiente muy grande y abierto, tiene un orificio pequeño a una distancia "h" de la superficie libre del líquido.

La presión en la superficie libre y en el orificio, es igual a la presión atmosférica, pues estos puntos están abiertos a la atmósfera. Se considerará que la velocidad del fluido en la superficie libre del recipiente es muy pequeña (v_2) = 0, ya que el recipiente es muy grande y el orificio muy pequeño, por lo que el descenso del nivel del líquido es muy lento. Utilizando la ecuación de Bernoulli hallemos la velocidad de salida del líquido, por el orificio:

$$P_2 + \rho g Y_2 = P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g Y_1$$

$$\rho g (Y_2 - Y_1) = \rho \frac{v_1^2}{2} \qquad P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$2 g h = v_1^2 \qquad Y_2 - Y_1 = h$$

$$v_1 = \sqrt{2 g h}$$

Esta ecuación se conoce como el teorema de Torricelli.

Puede observarse que la velocidad de salida del líquido, es la misma que la de un cuerpo que cae libremente desde una altura h.

El gasto volumétrico a través del orificio puede calcularse como:

$G = A v$
$G = A \sqrt{2 g h}$ donde A es el área de sección transversal del orificio.

Otra aplicación de la ecuación de Bernoulli es la relacionada con los medidores de Venturi, que permiten medir la velocidad o el gasto de un fluido dentro de un tubo.

Supongamos un tubo horizontal, que tenga un estrechamiento (figura).

Planteando la ecuación de Bernoulli, para la sección 1 y 2 del tubo:

$$\rho + \rho g Y_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \rho_2 + \rho g Y_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2$$

dado que $Y_1 = Y_2$, pues el tubo es horizontal. De la ecuación de continuidad, para fluidos incompresibles, tenemos $A_1 v_1 = A_2 v_2$

de donde se ve que dado que A_2 es menor que A_1, la velocidad v_2 debe ser mayor que v_1. Por otra parte de la ecuación de Bernoulli se ve que si v_2 es mayor que v_1, la presión en 2 (P_2) deber ser menor que la presión en 1 (P_1).

$$\rho + \frac{\rho}{2} V_1^2 = \rho_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$ para mantener la igualdad

Colocando manómetros en las secciones 1 y 2, podemos medir la diferencia de presiones ($P_1 - P_2$) y con ayuda de la ecuación de continuidad y la de Bernoulli, podemos determinar la velocidad del líquido en cualquier sección (1 ó 2) del tubo.

Dispositivos basados en este principio se utilizan ampliamente en la técnica para determinar velocidades o gastos de fluidos en tuberías.

Obsérvese que en este dispositivo se pone de manifiesto la misma regularidad, que en los otros ejemplos de la aplicación de la ecuación de Bernoulli, y que en forma resumida podemos expresar como: la presión disminuye en las regiones del fluido, donde la velocidad aumenta. Esta regularidad se utiliza para crear zonas de baja presión, p. ej., en aspiradoras y aspersores, en zonas donde se provoca una alta velocidad del fluido.