11. Se aplica una fuerza de 20 N durante 5 segundos, sobre un bloque de 45 N de peso para desplazarlo sobre una superficie horizontal con un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.27$. Suponiendo que parte del reposo, calcular:

a) La aceleración del bloque.

b) La velocidad que llevará a los 5 segundos.

c) La distancia que recorre el bloque al cabo de los 5 segundos.

12. Una motocicleta cuyo peso es de 1,470 N se mueve a velocidad de 72 km/h. Al aplicar los frenos se detiene en una distancia de 25 metros. Calcula la fuerza de fricción que la lleva al reposo.

13. Sobre un bloque de 80 N se aplica una fuerza de 30 N formando un ángulo de 25° con la horizontal. Si el bloque adquiere una aceleración de 1.5 m/s^2, calcular el coeficiente de fricción cinética (μ_k).

14. Supóngase que una fuerza de 200 N a un ángulo de 30⊃ con la horizontal, empuja una caja de 22 kilogramos de masa. Si el coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0.5$, calcular la aceleración de la caja.

15. Calcular la fuerza que se debe aplicar para deslizar un bloque de 147 N con velocidad constante sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción $\mu_k = 0.4$, al presentarse las siguientes situaciones:

a) Se empuja el bloque con un ángulo de 30°.

b) Se jala el bloque con un ángulo de 30°.

16. Una caja de 49 N de peso se empuja sobre una tabla. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$, calcular la fuerza paralela al movimiento que se debe aplicar a la caja para que se mueva con velocidad constante en los siguientes casos:

a) La tabla se encuentra en posición horizontal.

b) La tabla forma un ángulo de 30° con respecto a la horizontal y la caja se mueve hacia arriba.

17. Cuando una fuerza de 600 N empuja hacia arriba una caja de 30 kg sobre un plano inclinado 40⊃ con la horizontal, le produce una aceleración de 0.75 m/s^2. Calcular el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano .

18. Un esquiador de 80 kg con los esquíes puestos parte del reposo desde el punto más alto de una pendiente de 30°, siendo el coeficiente de fricción entre los esquíes y la nieve $\mu_k = 0.12$ .Si el esquiador se desliza hacia abajo.

a) ¿Cuál es la fuerza de fricción.

b) ¿Cuál es la aceleración?

c) ¿Cuál será su velocidad a los 30 segundos de iniciado su deslizamiento, sin tomar en cuenta la fricción del aire?

19. El número de una casa está colgado de un poste, como se ve en la figura. Si el rótulo pesa 4.9 N. ¿Cuál será la tensión en la cadena?

20. Encuentra la tensión de los cordeles A y B en cada uno de los ejemplos que se ilustran a continuación.

UNIDAD IV
GRAVITACIÓN

INTRODUCCIÓN

En el análisis matemático que realizamos en el movimiento de proyectiles, la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección, pero la velocidad del proyectil cambia tanto en magnitud como en dirección. En el presente capítulo, examinaremos el movimiento de un punto material(partícula), que describe una trayectoria circular bajo la acción de una fuerza central que varía solamente el sentido de la velocidad, pero cuya magnitud permanece constante al que llamaremos **MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME**. Como veremos más adelante, en este tipo de movimiento tanto la velocidad como la aceleración son de magnitud constante pero ambas cambian de dirección constantemente.

La fuerza gravitatoria desempeña un papel importante en la caracterización de los movimientos de los planetas, dado que suministra la fuerza que les permite mantener sus órbitas casi circulares. En este capítulo se considerará **LA LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON**, que describe esta fuerza fundamental, y se analizaran los movimientos de los planetas en términos de ciertas leyes fundamentales llamadas **LAS LEYES DE KEPPLER**. Conocer y comprender la cinemática del movimiento circular nos ayudará a comprender los movimientos que describen los planetas, así como de los satelites de la tierra, de los cuales hay uno natural (la luna) y muchos artificiales

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Un objeto se acelera siempre que actúe sobre él una fuerza resultante diferente de cero, si esta fuerza se encuentra a lo largo de la dirección de la velocidad, la rapidez cambia, pero no así la dirección de la velocidad. Por otro lado, si una fuerza constante se encuentra en ángulo recto con la velocidad, la dirección cambia, pero no la rapidez. Un cuerpo se mueve en un círculo con rapidez constante, cuando la fuerza resultante es perpendicular a la velocidad y es de magnitud constante.

En la segunda unidad se estudió la cinemática del movimiento circular uniforme [illegible] una partícula moviéndose con una rapidez [illegible] tiene una aceleración radial, o centrípeta, [illegible] dirección [illegible] el centro del arco y cuya magnitud [illegible]

[illegible] donde [illegible] es la rapidez angular (en radianes por unidad de tiempo).

Entonces, si un objeto se mueve en movimiento circular uniforme, la fuerza resultante a lo largo de la dirección radial no puede ser cero, por lo tanto, por la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$F_c = ma,$$

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

[illegible]

A la fuerza dirigida hacia el centro [illegible] para mantener el movimiento circular uniforme se conoce como *fuerza centrípeta* [illegible] hacia el centro del círculo.

Es esencial que apliquemos [illegible] desde el punto de vista de un observador en un marco *inercial*. [illegible] especial énfasis cuando se trata con objetos que se mueven en círculos. Por ejemplo, si uno considera el movimiento de un hombre en un automóvil que se mueve en un círculo, debe ver su movimiento como un observador fijo [illegible] con la tierra (o uno que se mueva con velocidad constante relativa a ella). No es posible aplicar la segunda ley de Newton desde el punto de vista del [illegible] observador como ese (el ocupante), se encuentra en un marco [illegible] por ello no inercial, la ley de la inercia no se verifica en un marco de referencia como ese.

Analizando la ecuación (1) se ve que la fuerza centrípeta F_c es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad [illegible]

[illegible]

Cuando estudiamos las fuerzas [illegible] circular [illegible]

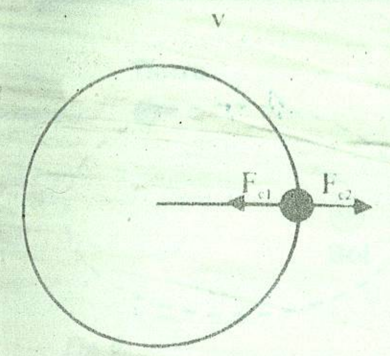


Fig. 2. Si la esfera estuviera bajo la acción de las fuerzas centrípeta y centrífuga se encontraría en equilibrio

la figura 2, tenemos una pequeña esfera en movimiento circular uniforem, bajo la acción de una fuerza F_{c1} ejercida por el cordón. A veces se acostumbra suponer que también actúa sobre la esfera otra fuerza F_{c2} dirigida radialmente hacia fuera de la trayectoria. Esta fuerza estaría equilibrando la fuerza centripeta Figura 2).

Esta fuerza centrífuga es una pesudo fuerza o fuerza ficticia, ya que como se dijo anteriormente, el moivmiento se realiza en un marco de referencia inercial, por otro lado, si esta fuerza exisitiera, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera sería igual a cero y no podría estar moviéndose en una trayectoria circular y su moivmiento sería rectilíneo y constante, lo cual sabemos que no es así. A este tipo de fuerzas (centrifuga) se les denominan ***fuerzas inerciales*** y no son newtonianas, es decir, que no se les aplica la tercera ley del movimiento. Esto es, no hay una fuerza de acción a la fuerza inercial (reacción). También es conveniente mencionar que en un referencial acelerado, las fuerzas (centrípeta y centrífuga) actúan sobre el mismo cuerpo y no forman pareja de acción y reacción. Ahora, si la cuerda se reventara la esfera describiría una trayectoria tangencial y no en la dirección de esa supuesta fuerza centrífuga.

En resumen, si un sistema de referencia todas las fuerzas son de intercambio, o sea, tienen reacción, el sistema es inercial. En cambio, si hay alguna fuerza que no tenga reacción, el sistema es no inercial; esto último ocurre en los sistemas acelerados. Recordemos, finalmente que en un sistema inercial un cuerpo que está moviéndose "libre" de fuerzas, por la ley de la inercia sigue un movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo 1.

Una masa de 0.4 kilogramos atada al extremo de una cuerda de 0.8 metros de largo se hace girar horizontalmente y completa una vuelta en 0.42 segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad tangencial de la masa?

b) ¿Cuál es la fuerza centripeta que actúa sobre la masa?

Datos: $m = 0.4$ kg; $r = 0.8$ m; $T = 0.42$ s; $\theta = 1$ rev $= 2\pi$ *rad*.

a) Para calcular la velocidad tangencial, primero se calcular la velocidad angular con la ecuación:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\omega = \frac{2\pi\ rad}{0.42\ s}$$

$$\omega = \frac{2(3.14)\ rad}{0.42\ s}$$

$$\omega = 14.95\ \frac{rad}{s}$$

$$v = (0.8\,m)\,14.95\,\frac{rad}{s} = 11.96\,\frac{m}{s}$$

b) La fuerza centrípeta se obtiene a partir de:

$$F_c = m\,\frac{v^2}{r}$$

$$F_c = 0.42\,kg\,\frac{\left(11.96\,\frac{m}{s}\right)^2}{0.8\,m}$$

$$F_c = 71.52\,N$$

LEYES DE KEPLER

En la antigüedad, nuestros antepasados consideraban que la Tierra era el centro del Universo, la cual permanecía estática y las estrellas se encontraban sobre una esfera de cristal, que giraba alrededor de la Tierra. Los planetas estaban colocados en esferas internas y describían movimientos más complicados. A esta propuesta se le conoce como la Teoría Geocéntrica del Universo y fue concebida por Aristóteles (384-322 a.C.) y perfeccionada por Ptolomeo (s. II d. C.). En el siglo XV, Copérnico (1473-1543) descubrió que el movimiento de los planetas se describía de una manera más simple, si se consideraba que éstos giraban en torno al Sol y en órbitas circulares, a esta propuesta se le conoce como la Teoría Heliocéntrica del Universo. Estas dos teorías, la Geocéntrica (la Tierra como centro del Universo) y la Heliocéntrica (el Sol como centro del Universo) fueron muy debatidas en el siglo XVI desde una perspectiva filosófica, con gran acentuación religiosa, basándose en las Sagradas Escrituras, en donde se consideraba al hombre como la coronación de la creación y a la Tierra el centro del Universo.

Por su parte, el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), en lugar de participar en esta discusión especulativa, se dedicó a observar el movimiento de los planetas y de las estrellas, registrando sus trayectorias y posiciones exactas durante más de 20 años. Para lograr una mayor precisión en sus observaciones, mejoró el equipo de astronomía ya existente, obteniendo una gran exactitud en sus registros, los cuales todavía se utilizan en la actualidad. Es decir, Brahe prefirió dedicar esfuerzos a la observación de hechos y a efectuar mediciones cuidadosas en lugar de participar en la especulación filosófica. Tycho Brahe cedió todos sus registros al alemán Johannes Kepler (1571-1630). Kepler por su parte, estudió y analizó detenidamente estos registros de los planetas, tratando de ajustarlos en órbitas circulares perfectas, lo cual le fue imposible conseguir. Después de abandonar esta idea, de que los planetas se mueven en órbitas circulares, encontró que en realidad describen órbitas elípticas. Llegó a esta conclusión porque los registros se ajustaban mejor a las

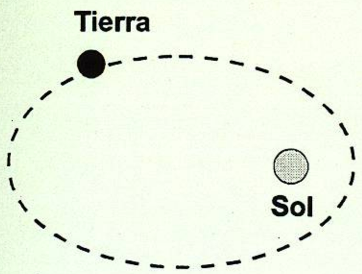


Fig. 6.

órbitas elípticas que a las circulares y sólo se apreciaba la diferencia entre ellas, gracias a la precisión en las observaciones de Tycho Brahe (figura 6). De lo anterior podemos enunciar lo que se conoce como la Primera Ley de Kepler:

> *Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos .*

Es decir, todos los planetas se mueven describiendo órbitas elípticas con un foco en común, el Sol. Los planetas conocidos hasta entonces eran: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Más tarde, cuando se descubrieron Urano, Neptuno y Plutón, se encontró que también describían órbitas con estas características. Aparte de que la trayectoria que describían los planetas era elíptica, Kepler encontró que al estar más cerca del Sol, un planeta aumentaba su rapidez y al alejarse de él, la disminuía. Esto le indicó que el movimiento de los planetas no era uniforme, ya que variaba según su distancia al Sol. Después de analizar estas observaciones hechas por Tycho Brahe, Kepler llegó a establecer su Segunda Ley:

> *Al moverse un planeta en su órbita, la línea que une al planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

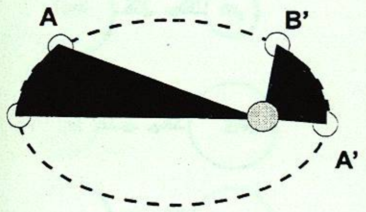


Fig. 7.

En la figura 7, se aprecia gráficamente este enunciado. En ella el planeta tarda el mismo tiempo en ir de A a B que en ir de A' a B', siendo iguales las áreas que barre la línea que une al planeta con el Sol. Una conclusión de esta Segunda Ley es que el planeta se mueve a mayor velocidad al estar más cerca del Sol (al ir de A' a B') que al estar más alejado de él (al ir de A a B).

En los años siguientes, Kepler buscó alguna relación entre los tamaños de las órbitas de los planetas y sus períodos (tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta alrededor del Sol). A partir de los datos de Brahe, encontró lo que se conoce como La Tercera Ley de Kepler:

> *Los cuadrados de los períodos (T) de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de su distancia promedio (r) al Sol.*

$$T^2 = k\,r^3$$

$$k = \frac{T^2}{r^3}$$

en donde esta constante k es la misma para todos los planetas, y tiene un valor de $300.46 \times 10^{-21}\ s^2/m^3$. Kepler encontró que la razón de T^2/r^3 era siempre la misma, para todos los planetas.

Realmente las órbitas planetarias son casi circulares, y no tienen la forma exagerada que se muestra en las gráficas. Estas leyes son aplicables a cualquier planeta en su movimiento alrededor del Sol, a cualquier luna que gire en torno a algún planeta, a los satélites naturales o artificiales.

Las Leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas, es decir, se refieren sólo a la Cinemática, ya que no hacen mención a las causas que producen este movimiento.

LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

Como ya hemos visto, Newton enunció sus tres leyes, mediante las cuales se podía explicar cualquier tipo de movimiento. Conocía perfectamente los estudios realizados por Kepler acerca del movimiento de los planetas. Dedujo que si los planetas y la Luna describían órbitas casi circulares, entonces, sobre ellos debía actuar una fuerza, la cual producía este tipo de movimiento, de lo contrario deberían moverse en línea recta (Primera Ley de Newton del movimiento).

Cuenta la leyenda que al ver caer una manzana se preguntó si la fuerza que la hacía caer, era la misma que mantenía a la Luna girando alrededor de la Tierra. Sabía que la fuerza que hacía caer a la manzana era la fuerza gravitacional de la Tierra. Así mismo se cuestionaba si esta fuerza gravitacional que ejercía la Tierra sobre la Luna y la manzana, la ejercía también el Sol sobre los planetas que giraban a su alrededor. Para tratar de responder a esto, tomó como base dos resultados importantes de los estudios de Kepler: 1) los planetas describen órbitas elípticas, muy cercanas a un círculo y 2) $T^2/r^3 = k$, es una misma constante (k) para todos los planetas.

Del hecho de que los planetas describen aproximadamente una órbita circular, se tiene que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta determinado, vendría dada por la fuerza hacia el centro del círculo en donde se encuentra el Sol, es decir

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

donde esta fuerza (F) es la fuerza centrípeta que ejerce el Sol sobre el planeta de masa (m), en dirección hacia el centro, *r* representa el radio de la órbita circular del planeta y *v* la magnitud de su velocidad tangencial. Como la rapidez (*v*) está dada por

$$v = \frac{s}{t}$$

en este caso, si se toma el período (T), la distancia es la equivalente a una revolución, es decir $s = 2\pi r$, de donde

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$F = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

$$F$$

$$F = \frac{m r}{k r^3}$$

Dado que $T^2 = k r^3$ de acuerdo a la Tercera Ley de Kepler.

$$F = \frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}$$

si observamos $\frac{4\pi^2}{k}$ es una cantidad constante (K), ya que el valor de sus elementos es siempre el mismo. Sustituyendo esta expresión por K, se tiene que

$$F = K\frac{m}{r^2}$$

De este resultado, Newton dedujo que la fuerza centrípeta que ejerce el Sol sobre el planeta variaba con el inverso del cuadrado de la distancia entre ellos y que dicha fuerza dependía de la masa del planeta.

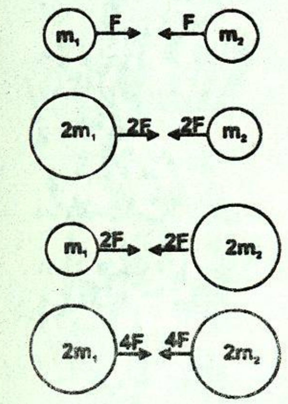
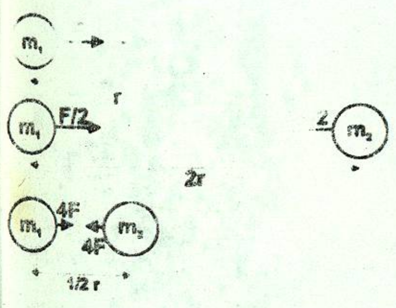


Fig. 8a. La fuerza depende directamente del producto de las masas

A partir del análisis de estos resultados, Newton supuso la existencia de una fuerza gravitacional entre el Sol y el planeta, la cual era inversamente proporcional al cuadra[illegible] la distancia entre ellos, de tal forma que si la distancia (r) entre ellos [illegible] al doble (2r), la fuerza disminuye a 1/4 de su valor inicial (F/4 [illegible] el contrario, la distancia (r) se disminuye a la mitad ($\frac{1}{2}r$), la fuerza aumen[illegible] a 4F.

De acuerdo a la Tercera Ley de Newton del movimiento, si el Sol ejerce una fuerza sobre el planeta, éste ejercerá una fuerza igual y opuesta sobre el Sol. Y puesto que el Sol y el planeta interaccionan entre sí, entonces la fuerza gravitacional entre ellos depende de las dos masas y no nada más de una, de tal forma que si la masa del planeta se duplica, la fuerza gravitacional también se duplica. Por otra parte, si la masa del Sol se duplica, la fuerza gravitacional también se duplica. Si ambas masas, planeta y Sol, se duplican, la fuerza gravitacional se incrementaría en un factor de cuatro (ver figura 8a). De este ra[illegible]nto Newton [illegible] la fuerza gravitacional era directamente [illegible] al [illegible]oducto [illegible]s masas.



[illegible]ig. 8b. La f[illegible] inversamen[illegible] proporciona[illegible] la dis[illegible]ncia entre [illegible]