A partir de estas conclusiones, Newton asumió que la fuerza gravitacional se presenta entre dos cuerpos cualesquiera, ya que ésta depende solamente de sus masas y de la distancia entre ellas, llegando a enunciar la Ley de la Gravitación Universal, en los siguientes términos:

Dos masas cualesquiera se atraen entre si , con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

$$F \quad \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

en donde m_1 y m_2 son las masas que se atraen entre sí y r es la distancia entre ellas. Esta fuerza de atracción gravitacional es sumamente pequeña, ya que sólo es perceptible cuando al menos uno de los cuerpos es muy grande, como por ejemplo la Luna, la Tierra o el Sol. Cuando uno de los cuerpos que interaccionan es muy grande, generalmente tiene forma esférica, en este caso, Newton descubrió que para efectos de cálculo, su masa se puede considerar como si estuviera concentrada en su centro. También supuso que la fuerza de atracción gravitacional se presenta entre todos los objetos del Universo.

DEMOSTRACIÓN DE QUE LA FUERZA GRAVITACIONAL VARÍA EN FUNCIÓN DEL INVERSO DEL CUADRADO DE LA DISTANCIA

Debido a que Newton no contaba con los instrumentos necesarios para comprobar que la fuerza gravitacional variaba en función del inverso del cuadrado de la distancia entre dos masas pequeñas, decidió considerar a la Tierra y a la Luna como las masas interactuantes. Para llevar a cabo este análisis, se basó en la información que tenía acerca del movimiento de la Luna, el valor de la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra y de la aceleración centrípeta en el movimiento circular.

Newton razonó de la siguiente forma

a) Calculó la aceleración centrípeta que ejerce la Tierra sobre la Luna, de acuerdo a los datos con los que contaba

v = 55,200 millas/día(velocidad tangencial de la Luna)

r = 240,000 millas (distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna)

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Sustituyendo datos en la expresión de la aceleración centrípeta

$$v = \frac{\left(55{,}200\ \dfrac{millas}{dia}\right)^2}{240{,}000\ millas}$$

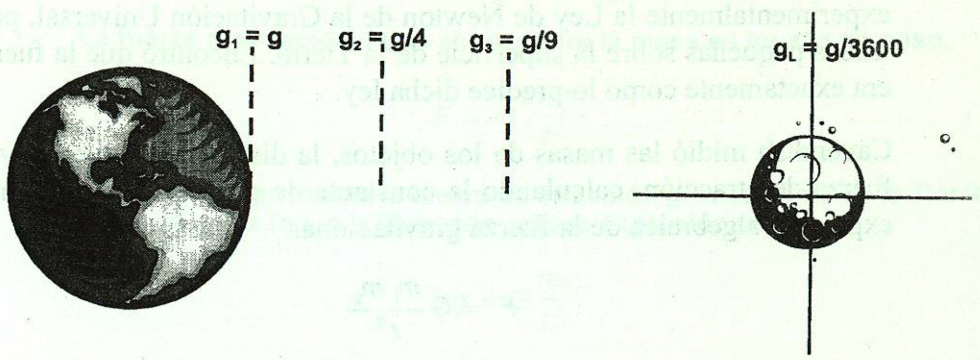
$$a = 0.0089\ \frac{ft}{s^2}$$

Considerando las equivalencias

1 milla = 5,280 ft

1 día = 86,400 s

ésta sería la aceleración centrípeta producida por la Tierra sobre la Luna.



b) Posteriormente calculó la aceleración de la gravedad de la Tierra, a la distancia en que se encontraba la Luna. Para esto, consideró que si la fuerza gravitacional variaba con el inverso del cuadrado de la distancia, la aceleración gravitacional (*g* también debería variar de la misma forma, como lo predice su Segunda Ley del movimiento (la aceleración es directamente proporcional a la fuerza aplicada). Como dato tenía que la distancia de la Luna a la Tierra era igual a 60 veces el radio de la Tierra.

Al analizar esta gráfica se observa que la aceleración de la gravedad varía con el inverso del cuadrado de la distancia, de tal forma que si la Luna se encuentra a una distancia de 60 veces el radio de la Tierra (60 R), la magnitud de la aceleración de la gravedad en la posición de la Luna (g_L) viene dada por

$$g_L = \frac{g}{(60)^2}$$

$$g_L = \frac{g}{3600}$$

$$g_L = 32\ \frac{ft}{s^2} \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)$$

Donde = 32 ft/s^2 representa la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. y Sustituyendo *g*.

$$g_L = 0.0088\ \frac{ft}{s^2}$$

Los resultados de los incisos a y b indican que el valor obtenido de la aceleración centrípeta de la Luna era muy cercano al predicho por la Ley de la Gravitación Universal (la aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de

La distancia). Esto sirvió a Newton como evidencia de que la ley estaba correcta.

LA CONSTANTE GRAVITACIONAL (G)

Aproximadamente cien años después, Henry Cavendish (1731-1810) calculó la fuerza de atracción entre dos masas, confirmando experimentalmente la Ley de Newton de la Gravitación Universal, para masas pequeñas sobre la superficie de la Tierra. Encontró que la fuerza era exactamente como lo predice dicha ley.

Cavendish midió las masas de los objetos, la distancia entre ellos y la fuerza de atracción, calculando la constante de proporcionalidad en la expresión algebraica de la fuerza gravitacional.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

en donde la constante gravitacional (G) es igual a $6.67 \times 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$. Esta constante es universal, y se calcula en forma experimental.

> *Es frecuente decir que la Ley de la Gravitación Universal corresponde a la gran síntesis de la Mecánica Newtoniana, ya que antes de ella se creía que existían dos conjuntos de leyes: uno para el movimiento de los cuerpos celestes y otro para el movimiento terrestre. Esta ley, junto con las tres Leyes de Newton del movimiento generaron, en los grandes pensadores de aquella época, la idea de que la naturaleza se rige por leyes simples y armónicas.*

Ejemplo 1.

Las masas del electrón y del protón son 9.1×10^{-31} kg y 1.7×10^{-27} kg, respectivamente, en un átomo de hidrógeno y se encuentran separados una distancia de 1×10^{-10} m. ¿Cuál será la fuerza de atracción gravitacional entre ellos?

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$ $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg (masa del electrón) $m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg,(masa del protón) $r = 1 \times 10^{-10}$ m Datos

Para calcular la fuerza de atracción gravitacional se emplea la ecuación:

$$F = G\frac{m_e\, m_p}{r^2}$$

$$F = 6.67 \times 10^{-11}\, N\frac{m^2}{kg^2}\, \frac{(9.1 \times 10^{-31}\ kg)(17 \times 10^{-27}\ kg)}{(1 \times 10^{-21}\ m)^2}$$

$$F = 103 \times 10^{-47}\ N$$

Ejemplo 2.

Se ha establecido que el peso de un cuerpo es igual a la atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre todos los objetos que se encuentran en su cercanía. Considerando una masa (m) cualquiera, calcular la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. $G = 6.67 \times 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$

$m_t = 6 \times 10^{24}$ kg (masa de la Tierra)
$r_t = 6.4 \times 10^6$ m(radio de la Tierra)

$$F = w \quad y \quad w = mg$$

La fuerza gravitacional que actúa sobre la masa es igual a su peso.

$$F = G\frac{m_t\, m}{r_t^2}$$

En donde F representa la fuerza de atracción gravitacional de la Tierra sobre la masa (m), sustituyendo ambas expresiones

$$g = G\frac{m_t}{r_t^2}$$

$$g = 6.67 \times 10^{-11}\, N\frac{m^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \times 10^{24}}{(6.4 \times 10^6\ m)^2}$$

$$g = \frac{6.67 \times 6}{40.96} \cdot \frac{10^{-11} \times 10^{24}}{10^{12}} \cdot \frac{N\,m^2\,kg}{kg^2\,m^2}$$

$$g = 0.973 \times 10^1\, \frac{N}{kg}$$

$$g = 9.73\left(\frac{kg\,m}{s^2}\right)/\,kg$$

$$g = 9.73\,\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 3.

Un satélite se encuentra en una órbita circular, a una altura de 500 kilómetros sobre la superficie terrestre.

a) ¿Cuál es la rapidez orbital tangencial del satélite?
b) ¿Cuál es su periodo de revolución?

frft`2

a) Dado que la fuerza de atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre el satélite, proporciona la fuerza centrípeta para mantenerlo en su órbita circular, entonces

Fuerza gravitacional = Fuerza centrípeta

$$F = F_c$$

Donde:

m es la masa del satélite. m_t es la masa de la Tierra.

r es la distancia del centro de la Tierra al satélite
v es la rapidez tangencial

$$G\frac{m\,m_t}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{G\,m_t}{r} = v^2$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{Gm_t}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm_t}{(r+h)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6\ m + 0.5 \times 10^6\ m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{40.02 \times 10^{13}\ \frac{m^3}{s^2}}{6.9 \times 10^6}}$$

$$v = \sqrt{5.8 \times 10^7\ \frac{m^2}{s^2}}$$

$$v = 7.6 \times 10^3\ \frac{m}{s}$$

b) El período de revolución (T) será el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa (una revolución) alrededor de la Tierra. Al dar una vuelta completa, la distancia recorrida será $s = 2\pi\, r$.

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$T = \frac{2\pi\, r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi\,(r+h)}{v}$$

$$T = \frac{2(3.14)(6.4 \times 120^6\ m + 5 \times 10^5\ m)}{7.6 \times 10^3\ \frac{m}{s}}$$

$$T = 5.69 \times 10^3\ s = 94.83\ min$$

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL Y EL PESO

Como ya se ha mencionado, el peso de un cuerpo en la tierra, es la fuerza de atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre él. Esta fuerza gravitacional está dirigida hacia el centro de la Tierra y atrae a los objetos hacia su superficie. De esta consideración, se tiene que el peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra viene dado por la expresión

$$w = g\frac{m_o\, m_t}{r_t^2}$$

en donde m_o es la masa del objeto, m_t es la masa de la Tierra y r_t es el radio de la Tierra. Cuando se calcula la fuerza gravitacional, se considera la distancia entre los centros de las masas, en este caso sería el radio de la Tierra. Dado que el peso del objeto $w = m_o g$, resulta que

$$m_o\, g = G\frac{m_o\, m_t}{r_t^2}$$

$$g = G\frac{m_t}{r_t^2}$$

como G, m_t y r_t no cambian, entonces, la aceleración debida a la gravedad es la misma para todos los objetos que caen a distancias cercanas a la superficie de la Tierra. En general, la aceleración debida a la gravedad, producida por la Tierra, en un punto del espacio ubicado a una distancia (r) de su centro, viene dado por

$$g(r) = G\frac{m_t}{r^2}$$

en donde $g(r)$ indica que la aceleración debida a la gravedad está en función de la distancia al centro de la Tierra. El peso de un objeto de masa (m_o) colocado a una distancia (r) del centro de la Tierra, viene dada por la expresión

$$w(r) = m_o\, g(r)$$

$$w(r) = G\frac{m_o\, m_t}{r^2}$$

como puede observarse, el peso de un cuerpo (w) en la Tierra varía con el inverso del cuadrado de la distancia al centro de ella y además, siempre se encuentra dirigido hacia dicho centro.