Suponiendo que tenemos un cuerpo realizando un movimiento circular uniforme, con velocidad angular constante ω_o, en un círculo de radio R. Vamos a analizar la proyección de este movimiento en un eje cualquiera, por ejemplo el eje x.. Esto sería lo mismo que sí iluminamos el cuerpo en movimiento, a lo largo del plano del círculo, y observamos el movimiento de la sombra del cuerpo en una pantalla, (ver fig. 4). Lo anterior lo podemos obtener en un plato giratorio (tocadiscos) y colocando cuatro monedas sobre el borde e iluminando el aparato con una linterna colocada a la misma altura, de tal manera que la dirección del eje del rayo de luz de la linterna pase por el centro del plato giratorio. Al utilizar una pared como pantalla para proyectar la sombra del plato y las monedas. Se hace girar el plato a razón de 331/3 r.p.m. observando el movimiento de las monedas de la posición A a la B como un péndulo y la proyección en la pantalla como un movimiento armónico simple.

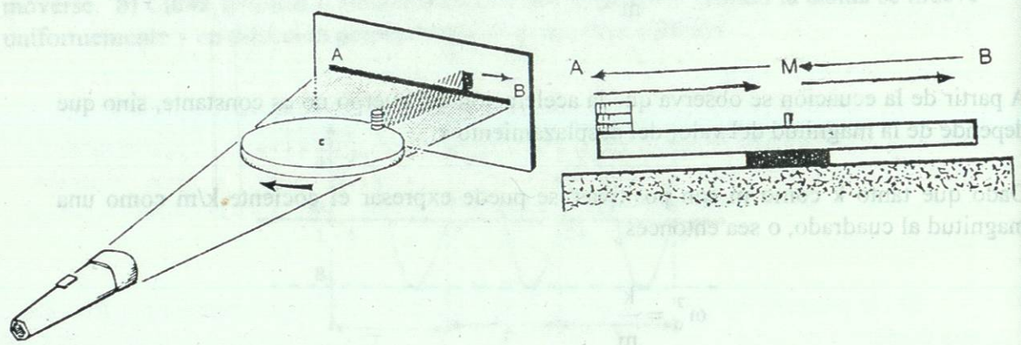

Figura 4. La sombra de las monedas colocadas sobre el borde del plato giratorio describe, sobre la trayectoria AB, un movimiento armónico simple.

Por lo anterior podemos interpretar un movimiento armónico simple como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de uno de sus diámetros. Esta interpretación es otra de las contribuciones hechas por Galileo, quien concluyó lo anterior al analizar el movimiento de una de las lunas de Jupiter en el año 1610. Tomando en cuenta esta analogía, determinaremos el período de oscilación de un péndulo simple.
A partir de la figura 5, se considera el plato giratorio como círculo de referencia, en donde la posición de la proyección del cuerpo, queda en función del radio R y del ángulo θ, como:

$$x = R\cos\theta$$

La aceleración a_x de la proyección del cuerpo, en función de la aceleración centrípeta a_c y el ángulo θ será: $a_x = -a_c \cos\theta$ donde el signo indica que el sentido de la aceleración es contrario al desplazamiento.

Recordemos que la aceleración centrípeta, en función de la velocidad angular es

$$a_c = \omega_o^2 R$$

sustituyendo

$$a_x = -\omega_o^2 R\cos\theta$$

sustituyendo

$$x = R\cos\theta$$

nos queda

$$a_x = -\omega_o^2 x$$

que coincide con la expresión de la aceleración del **MAS**, o sea que la proyección del movimiento circular uniforme de un cuerpo en un eje cualquiera, es un movimiento armónico simple. A este círculo se le denomina círculo de referencia, ver figura 5.

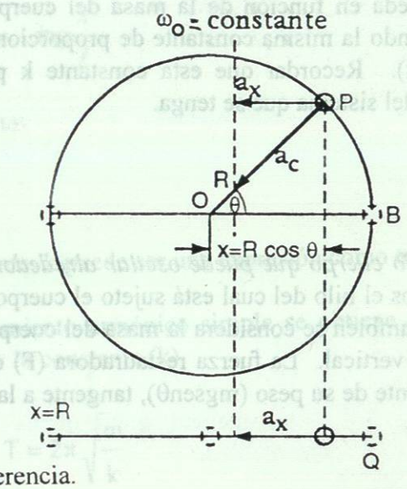

Figura 5. Circulo de referencia.

Ya podemos ver que la magnitud ω_o, es la velocidad angular del movimiento circular uniforme del círculo de referencia.

De este análisis vamos a obtener una expresión para el período del **MAS**. Recordemos del movimiento circular que

$$\omega_o = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donde f es la frecuencia y T es el período.

Como el período del movimiento circular uniforme del círculo de referencia y del MAS asociado son iguales podemos obtener

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

y como

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

por lo cual nos queda que al sustituir el período del MAS será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El período del MAS queda en función de la masa del cuerpo m y de la constante de proporcionalidad (k), siendo la misma constante de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento (F=–kx). Recordar que esta constante k puede ser un valor o una expresión, dependiendo del sistema que se tenga.

4.- El péndulo simple

El péndulo es todo cuerpo que puede oscilar alrededor del punto de suspensión. Es simple si consideramos el hilo del cual está sujeto el cuerpo, con longitud constante y de masa despreciable. También se considera la masa del cuerpo concentrada en un punto y oscilando en un plano vertical. La fuerza restauradora (F) que mantiene al cuerpo en oscilación es la componente de su peso (mgsenθ), tangente a la trayectoria. La fricción se considera despreciable.

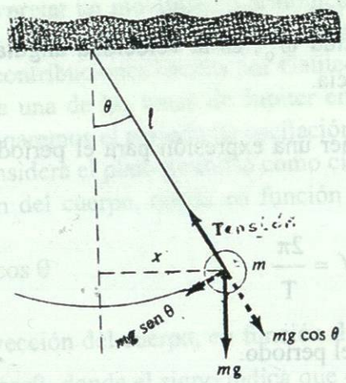

Figura 6. Péndulo simple.

Como F= –mg senθ, entonces, se observa que la fuerza no es proporcional al desplazamiento, lo cual es necesario para el MAS.

Si θ es menor a 12°, entonces, los valores de sen θ y θ rad son aproximadamente iguales, por lo tanto

$$\text{sen}\,\theta = \theta\ \text{rad} = \theta$$

entonces $\quad F = -mg\,\theta$

observándose que la fuerza es proporcional al desplazamiento (θ), por lo cual es un MAS

en donde $\quad \theta = \frac{x}{l}$ de la figura 6.

sustituyendo

$$F = -mg\frac{x}{l}$$

como m, g, l son constantes

entonces $\quad k = \frac{mg}{l}$

como se dijo anteriormente, k puede ser una expresión como es este caso.

En el análisis del movimiento armónico simple se obtiene que el período (T) está en función de la masa (m) y la constante (k)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

sustituyendo $\quad k = \frac{mg}{l}$

se tiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}}$$

quedando

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

De este análisis se concluye que:

1) Si la longitud del péndulo es mayor, mayor será su período.

2) El período del péndulo no depende de su masa ni de la amplitud de oscilación, siempre que el ángulo sea pequeño ya que en la expresión de período no aparecen estas magnitudes.

El péndulo se aplica en geología, para determinar la aceleración de la gravedad la cual cambia por irregularidades en la superficie. Para un determinado lugar, se usa un péndulo de diseño especial para obtener con precisión el valor de la gravedad.

Ejemplo 4. Un péndulo simple de un geólogo tiene 37.10 cm de longitud y 0.8190 Hz de frecuencia en determinado lugar de la Tierra. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en ese lugar?

$f = 0.8190\ \text{Hz} = 0.8190\ \frac{1}{s}$ Como $f = \frac{1}{T}$

$\ell = 37.10\ \text{cm} = 0.371\text{m}$ entonces $T = \frac{1}{f}$

sustituyendo $T = \frac{1}{0.8190\frac{1}{s}} = 1.22\text{s}$

entonces $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

despejando g, nos queda $g = \frac{4\,\ell\,\pi^2}{T^2}$

sustituyendo $g = \frac{4\,(0.371\text{m})\,(3.14)^2}{(1.22\text{s})^2}$

$g = 9.83\ \text{m/s}^2$

Ejemplo 5. En el aeropuerto del Norte, en Monterrey, el valor de la aceleración de la gravedad reportado es de 9.7886 m/s^2. Si se quiere construir un péndulo que tenga un período de oscilaciones de 2 segundos, determina que largo deberá tener el péndulo.

$g = 9.7886\ \text{m/s}^2$

$T = 2\text{s}$

Como

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

despejando ℓ, nos queda

$\ell = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$

sustituyendo

$\ell = \left(\frac{2\text{s}}{2(3.14)}\right)^2 (9.7886\ \text{m/s}^2)$

$\ell = 0.992\ \text{m}$

Ejemplo 6. Un péndulo de 2m de longitud está situado en un lugar donde $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{S}^2}$ Determine el período y la frecuencia de las oscilaciones

$\ell = 2\ \text{m}$

$g = 9.81\ \text{m/s}^2$

Como

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

sustituyendo

$T = 2(3.14)\sqrt{\frac{(2\text{m})}{9.81\text{m/s}^2}}$

$T = 2.837\text{s}$

Como

$f = \frac{1}{T}$

sustituyendo

$f = \frac{1}{2.837\text{s}}$

$f = 0.352\text{Hz}$

5.- Cuerpo -resorte

El movimiento armónico simple se representa con un objeto que oscila en el extremo de un resorte, ver fig. 7. A continuación se analiza este tipo de movimiento, al considerar despreciable la masa del resorte, el movimiento es horizontal de tal forma que el objeto de masa (m) se desliza sin fricción sobre la superficie horizontal; en la dirección vertical la fuerza normal está en equilibrio con el peso (mg), por lo tanto no se consideran estas fuerzas. El resorte (en general) tiene una longitud determinada, la cual no ejerce fuerza sobre la masa (m), ver fig. 7 a, siendo la posición de equilibrio. Si la masa se mueve hacia la izquierda, comprimiendo el resorte, o hacia la derecha, estirándolo, el resorte ejerce una fuerza (F) sobre la masa que actúa en tal sentido que ésta trata de regresarlo a la posición de equilibrio; denominada fuerza de restitución. Se ha observado que la magnitud de la fuerza de restitución (F) es directamente proporcional al desplazamiento (x) en que se ha estirado o comprimido el resorte y de sentido contrario, o sea

$$F = -kx$$

en donde x es el desplazamiento que recorre el objeto cuando el resorte se estira o se comprime. Cuando su desplazamiento es máximo desde la posición de equilibrio, entonces, es igual a la amplitud (A) del movimiento y la constante de proporcionalidad (k) es la constante elástica del resorte, determinada por la rigidez del mismo.

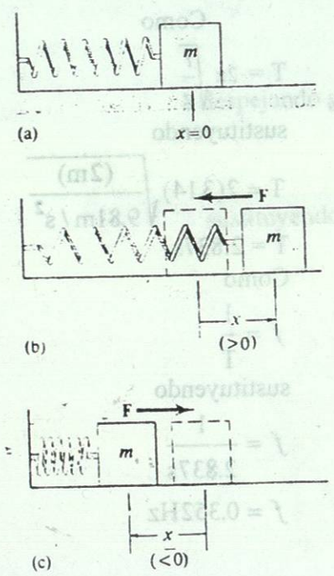

Figura 7. Movimiento armónico simple.

La ecuación F = –kx es una relación que se conoce como la Ley de Hooke. Fue descubierta por Robert Hooke (1635-1703), se aplica en el comportamiento de resortes y otros cuerpos elásticos, siempre que su deformación no sea muy grande.

El resorte se estira y si en un momento dado ya no recurpera su forma original, a este punto se le llama límite elástico. Todos los materiales elásticos, tienen su propio límite elástico.

A partir de la figura 7, se observa que al estirar el resorte una distancia x=A inicialmente (fig 7b) y al soltarlo el resorte ejerce una fuerza sobre el objeto que tira de él hacia la posición de equilibrio conforme el objeto se acerca a la posición de equilibrio, la fuerza va disminuyendo. Pero debido a que la fuerza ha acelerado el objeto, pasa por la posición de equilibrio con cierta velocidad.

En realidad, cuando el objeto alcanza la posición de equilibrio, la fuerza que actúa sobre el objeto es cero, pero su velocidad en ese punto es máxima (fig. 7a). Al moverse más hacia la izquierda, la fuerza que actúa sobre el objeto trata de desacelerarlo, deteniéndolo en forma momentánea en x=–A. A continuación empieza a moverse hacia la posición de equilibrio, pasando de nuevo hasta alcanzar el punto donde x=A. Después repite el movimiento, de un lado a otro, en forma simétrica entre x=A y x=–A. El objeto realizará un ciclo en su movimiento completo de ida y vuelta desde un punto inicial, por ejemplo desde x=A hasta x=–A, y regresa x=A. El período (T) se define como el tiempo necesario para un ciclo completo y la frecuencia es el número de ciclos completos por segundo, es decir

$$f = \frac{1}{T}$$

Recordando que el período (T), en el **MAS**, también se puede expresar como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. Un resorte está sujeto en uno de los extremos de la pared y del otro extremo tiene un objeto cuya masa es 0.300 kg. A continuación se estira 10 cm a partir del punto de equilibrio, aplicando una fuerza de 1.96 N. Calcula a) la constante elástica (k) del resorte b) El período del sistema c) La frecuencia del sistema

m = 0.300 kg
x = 10 cm = 0.10m
F= 1.96N

a) Como
F = kx

despejando

$$k = \frac{F}{x}$$

sustituyendo

$$k = \frac{1.96\ N}{0.10\ m}$$

$$k = 19.6\ N/m$$

b) Como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

sustituyendo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.300kg}{19.6N/m}}$$

$$T = 0.78s$$

c) Como

$$f = \frac{1}{T}$$

sustituyendo

$$f = \frac{1}{0.78s}$$

$$f = 1.28\ Hz$$

La energía potencial asociada con un objeto sujeto en el extremo de un resorte, es debido a que cuando se comprime o se estira el resorte y al soltarlo puede efectuar un trabajo sobre el objeto.

Para calcular la energía potencial del resorte comprimido, sólo se necesita calcular el trabajo necesario para comprimirlo, o el trabajo que efectúa al soltarlo. En ambos casos el trabajo efectuado es

$$W = Fx$$

siendo la fuerza (F), la fuerza de restauración o de restitución del resorte (F = –kx); x es el desplazamiento que se estira desde su posición de equilibrio.

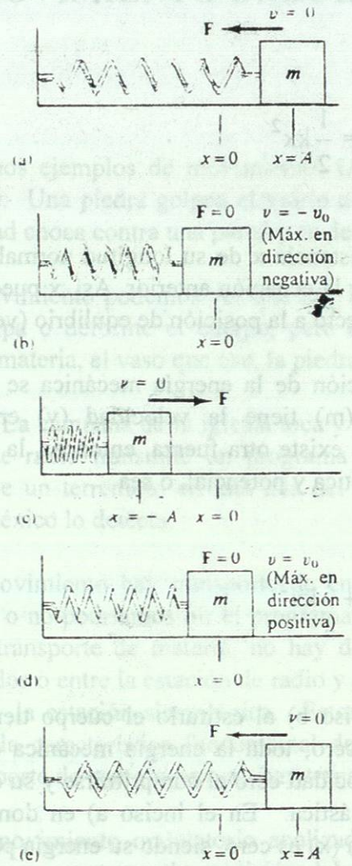

Figura 8. La energía cambia de cinética a potencial, y viceversa, al oscilar el resorte con el objeto.

La Fuerza (F) varía en esa distancia x, siendo mayor F cuando más se estira el resorte. La fuerza varía desde cero cuando el resorte no está estirado, su posición de equilibrio (ver fig.8a), hasta kx cuando está completamente estirado, la fuerza promedio se considera como $\frac{1}{2}kx$. El trabajo efectuado, entonces es

$$W = \left(\frac{1}{2}kx\right)(x)$$

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

Por consiguiente, la energía potencial elástica es proporcional al cuadrado del estiramiento

$$EP\ elástica = \frac{1}{2}kx^2$$

Si se comprime un resorte una distancia x de su longitud normal (ver fig. 8c), también tiene la energía potencial dada por la ecuación anterior. Así, x puede ser tanto la cantidad comprimida o la estirada con respecto a la posición de equlibrio (ver fig.8).

En este ejemplo, en la conservación de la energía mecánica se considera la masa del resorte despreciable. La masa (m) tiene la velocidad (v) en cualquier momento, despreciando la fricción y que no existe otra fuerza, entonces, la energía mecánica total (E) es la suma de las energías cinética y potencial, o sea

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

A partir de la figura 8 en el inciso b) al estirarlo el cuerpo tiene velocidad cero y la energía cinética por lo tanto es cero, toda la energía mecánica es la energía potencial elástica. En el inciso c) tiene velocidad cero al comprimirse y su energía cinética es cero y sólo tiene energía potencial elástica. En el inciso a) en donde se encuentra en su posición de equilibrio, la distancia (x) es cero, siendo su energía potencial elástica igual a cero y como lleva el cuerpo una velocidad (v) sólo tiene energía cinética en ese punto. Cuando la masa oscila para la izquierda y para la derecha, la energía se intercambia continuamente de energía potencial a energía cinética y viceversa.

B.- MOVIMIENTO ONDULATORIO

1.- Introducción

Analicemos algunos ejemplos de movimiento: Un vaso cae de una mesa y al golpear el piso, se rompe. Una piedra golpea el vidrio de una ventana y lo rompe. Un automóvil a gran velocidad choca contra una pared y se destruye.

En estos ejemplos de movimiento podemos ver que hay transporte de energía, que es lo que provoca que se rompa o deforme el cuerpo, pero este transporte de energía está asociado al transporte de materia, el vaso que cae, la piedra o el automóvil.

Veamos otros ejemplos: La campana de la iglesia toca y el sonido se escucha en todo el pueblo. Una estación de radio transmite un programa y nosotros lo escuchamos en nuestra casa. Se produce un terremoto en una isla del Océano Pacífico y la estación sismológica de Ciudad México lo detecta.

En estos ejemplos de movimiento hay transporte de energía, pues de lo contrario no escucharíamos el sonido, o no podríamos oír el programa de radio o no detectaríamos el terremoto, pero no hay transporte de materia, no hay desplazamiento neto de materia entre la campana y los oídos o entre la estación de radio y nuestro aparato receptor o entre el centro del terremoto y la estación sismológica. Estos son ejemplos de movimiento ondulatorio y se señala la característica fundamental de este tipo de movimiento que consiste en que hay transporte de energía pero no hay transporte de materia.

En todos los casos de movimiento ondulatorio analizados se presentan las siguientes características: una fuente, que provoca la aparición del fenómeno, y la propagación de energía en el espacio, que provoca que ésta pueda ser detectada en otro punto distante del espacio.

Podemos definir una onda como la propagación de una perturbación en el espacio sin que exista transporte de materia. La perturbación es la variación de una magnitud física en un punto del espacio, como puede ser la presión, la densidad, la intensidad del campo eléctrico, la posición de las partículas de un medio, etc.