PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Efectúa las siguientes conversiones de unidades.

a) 40 horas a minutos	b) 15 minutos a horas	c) 7 kilómetros a metros
d) 0.05 m^2 a cm^2	e) 55 m^3 a cm^3	f) 6, 598 millas a metros
g) 470,000 milímetros a pulg.	h) 80 kilogramos a libras	i) 490 libras a kilogramos
j) 72 km/h a m/s	k) 42 kg/m^2 a g/cm^2	l) 60 mi/h a m/s

E. VECTORES

En la vida diaria aparentemente lo que más manejamos son las cantidades escalares en nuestras expresiones y cálculos. Por ejemplo: troté 4 kilómetros, compré 3 kilogramos de azúcar o la distancia de Monterrey a Saltillo es de 84 kilómetros.

Como puedes observar con estas simples expresiones te puedes dar una idea clara de la medición establecida en cada uno de los tres casos.

A estas mediciones que sólo con la magnitud acompañada de una unidad de medida pueden fácilmente describirlas se le llama *cantidad escalar*. Por lo tanto podemos definir:

Cantidad escalar es una cantidad que sólo tiene magnitud y va acompañada de la unidad correspondiente.

Existen otro tipo de cantidades, que no son tan poco usuales como parece, denominadas *cantidades vectoriales*.

Las cantidades vectoriales además de la magnitud y la unidad para poder describirlas requieren también la dirección y el sentido.

Son ejemplos: Un auto se desplazó 30 kilómetros hacia el norte; la velocidad de un proyectil es de 30 m/s a 30° de la horizontal; sobre un cuerpo actua una fuerza de 100 N a 50° de la horizontal, etc.

Para distinguir en su manejo las dos cantidades, usaremos letras mayúsculas en negritas o mayúsculas con una flecha en la parte superior para denotar un vector. Y la representación gráfica será por medio de una línea proporcional a su magnitud (a escala) terminada en punta de flecha que nos indicará el sentido del vector y el ángulo de inclinación sobre el eje de referencia, la dirección. (Observa las siguientes 4 figuras).

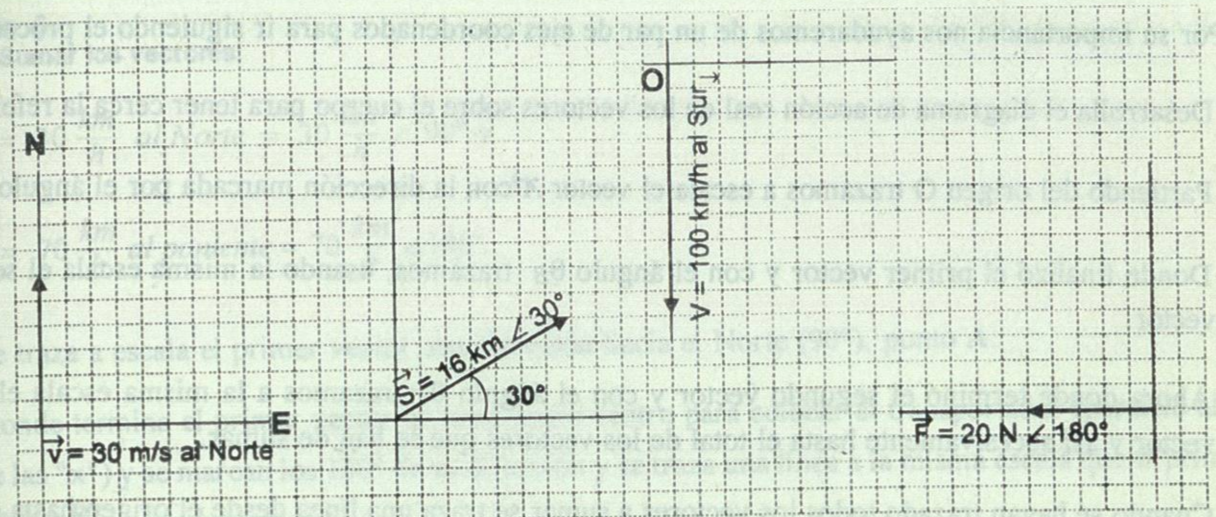

Figura No. 1

Al especificar que es una línea proporcional quiere decir que se puede manejar una escala para darle un tamaño de fácil manejo al trabajarlo en forma gráfica. Por ejemplo la cantidad vectorial 100 N ángulo de 0° puede ser representada por una línea de 100 centímetros en la escala 1N: 1cm dibujada sobre el eje de las "x" (difícil de dibujar). Pero también puede ser una línea de 50 centímetros sobre el eje de las "x" en la escala 2N: 1cm (1 cm de dibujo representará 2 newtons) ó 10 centímetros en la escala 10N: 1cm (1 cm representará 10 newtons). La práctica te dictará cual escala deberás de usar siendo tus límites las dimensiones del papel que estés usando en tus gráficos.

Debido a la propiedad de la dirección de los vectores, estos se suman y restan en forma muy diferente a la de las cantidades escalares. Para realizar estas operaciones se pueden usar métodos gráficos y analíticos. Los métodos gráficos se emplean para darnos una idea del concepto de suma y resta de vectores, pero es más frecuente usar los métodos analíticos porque son más exactos y rápidos.

A) MÉTODOS GRÁFICOS.

1) Método del polígono.

Método del polígono. Recibe este nombre porque al desarrollar todo el proceso de la suma o resta de vectores, resulta la figura de un polígono cerrado. Por supuesto el polígono de menos lados es el triángulo que resulta cuando se suman o restan dos vectores.

Veamos el proceso en los siguientes ejemplos:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

donde $\vec{A} = A \angle\theta_A$; $\vec{B} = B \angle\theta_B$; $\vec{C} = C \angle\theta_C$

Por su importancia nos ayudaremos de un par de ejes coordenados para ir siguiendo el proceso.

1º Desarrolla el diagrama de acción real de los vectores sobre el cuerpo para tener cerca la referencia.

2º Partiendo del origen O trazamos a escala el vector $\vec{A}$ con la dirección marcada por el ángulo θ_A.

3º Donde finalizó el primer vector y con el ángulo θ_B trazamos, usando la misma escala el segundo vector.

4º Ahora donde terminó el segundo vector y con el ángulo θ_C trazamos a la misma escala el tercer vector y así sucesivamente hasta el total de los vectores que se han de sumar.

5º Cuando se hayan trazado todos los vectores a sumar se traza una línea desde el origen hasta el final del último vector del sistema.

6º Se mide dicho segmento y se multiplica por la escala que estés usando. Esta es la respuesta de la magnitud de la resultante.

7º Por último con el transportador mides el ángulo formado por esta línea y el eje "x" positivo y obtendrás la dirección de este vector.

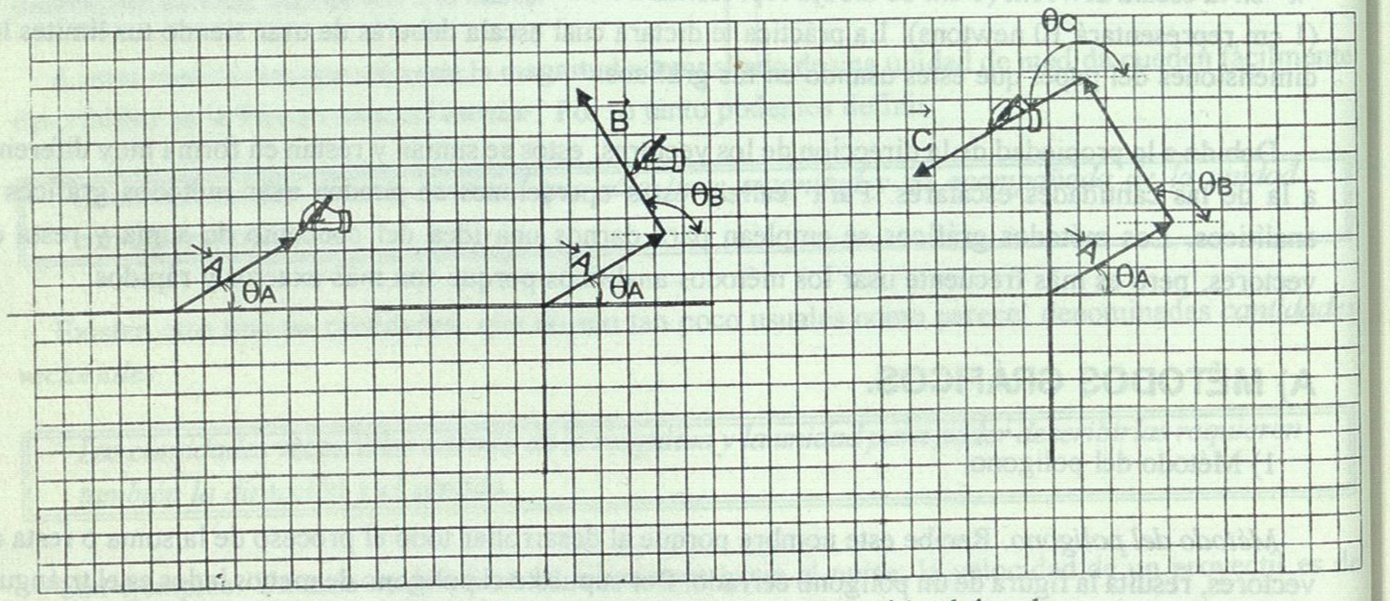

Figura No. 2. Completa el último trazo y mide el ángulo.

Respuesta: $R \angle \theta_R$

Ejemplo 6.
Sumar los vectores:

$$\vec{A} = 30\ \frac{km}{h}\ al\ Norte\ =\ 30\ \frac{km}{h} \angle 90° \text{ y}$$

$$\vec{B} = 70\ \frac{km}{h}\ al\ poniente = 70\ \frac{km}{h} \angle 180°$$

1º Se traza a escala el primer vector con dirección hacia el Norte (90°), punto **A**.

2º Donde termina el primer vector se toma como centro para colocar el transportador (paralelo al eje de las "x") y se marcan los 180° de su dirección y se traza una línea a la misma escala que el primero (punto **B**).

3º Se traza una línea (puede ser punteada para distinguirla) desde el origen hasta el punto final del segundo vector y se le coloca una punta de flecha en esta intersección (punto **B**).

4º Se mide la longitud de esta última línea y se multiplica este valor por la escala empleada para obtener la magnitud del vector resultante.

5º Colocando el transportador (centro en el origen) se lee en él el valor de la dirección.

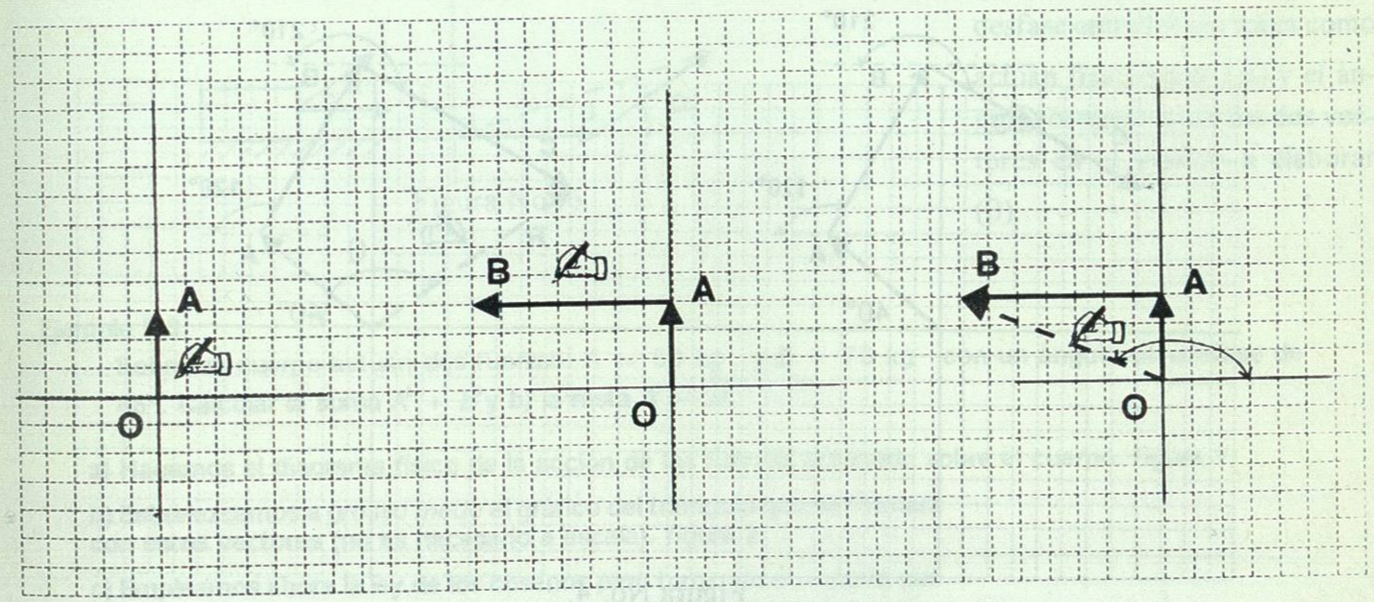

Figura No. 3. Secuencia de la suma de vectores.

Respuesta: 76 km/r Á 157É

Ejemplo 7.

Sumar los vectores:

$\vec{A} = 30\ N \angle 40°;\ \vec{B} = 40\ N \angle 120°;\ \vec{C} = 50\ N \angle 210°$

En los siguientes diagramas se muestra el proceso para calcular la resultante y su dirección.

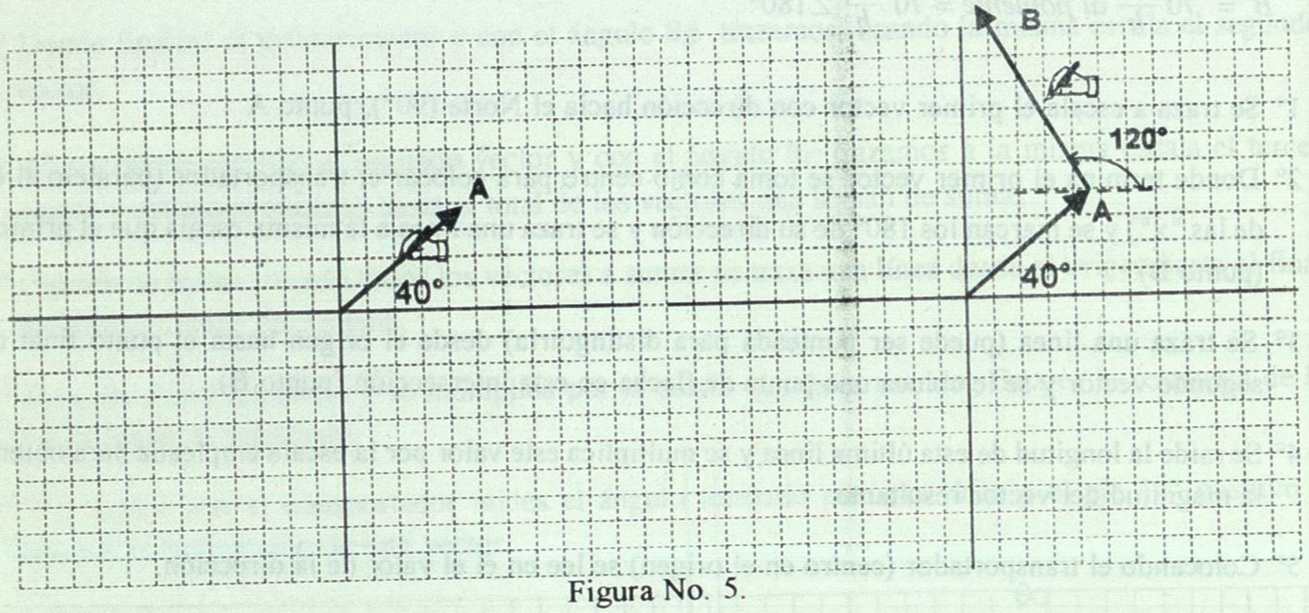

Figura No. 5.

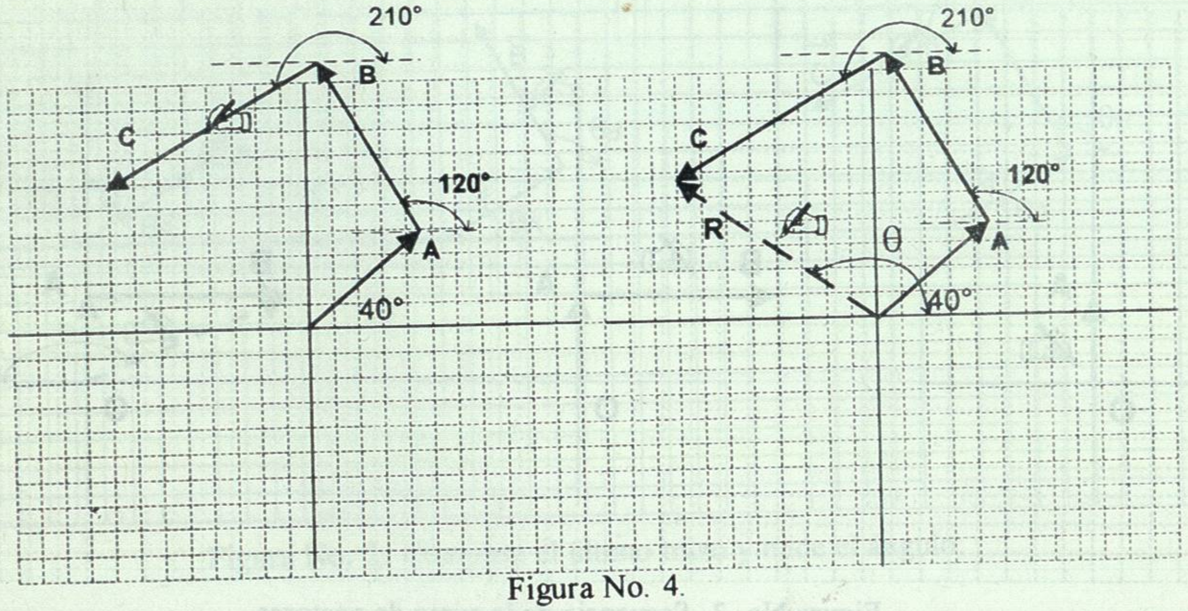

Figura No. 4.

Respuesta: $\vec{R} = \angle 144°$

B) MÉTODOS ANALÍTICOS

Los métodos analíticos para la suma de vectores son: el del *triángulo*, que se emplea cuando son dos vectores (tanto en suma como resta) y el más usual por lo sencillo y rápido, el *método de las componentes*.

Método del Triángulo. Como pudiste observar en el método gráfico del polígono, al sumar o restar vectores, se formaba al completarlo, un triángulo. También que se conocían dos lados y el ángulo formado por ellos. En matemáticas cuando tenemos un triángulo del cual conocemos dos lados y el ángulo formado entre ellos podemos obtener los datos faltantes del triángulo (el otro lado y los dos ángulos) por medio de la *ley de los cosenos* y la *ley de los senos*.

Ley de los Cosenos. El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

donde θ será igual a 180° menos el ángulo de desfase entre los dos vectores. (Observa las dos figuras anteriores para que no se confunda el ángulo de desfase entre los vectores como actúan físicamente (α) y el ángulo formado entre los dos vectores en el gráfico a elaborar (θ).

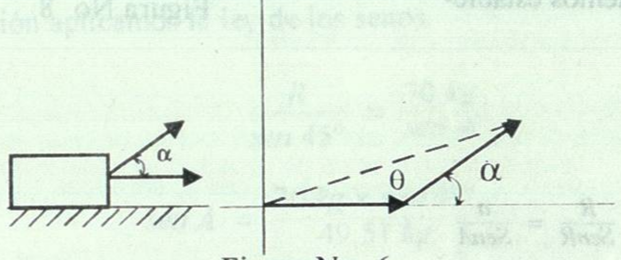

Figura No. 6.

Ejemplo E-3

Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas: $A = 50\ kg$ y $B = 70\ kg$ con un ángulo de desfase de 45°. Calcular la suma $\vec{A} + \vec{B}$ y b) la resta $\vec{A} - \vec{B}$.

a) Hagamos el diagrama físico de la acción de las fuerzas actuando sobre el cuerpo. figura 1

b) Establezcamos a *grosso modo* el gráfico del triángulo que se formará con estos vectores (no es necesario a escala). figura 2

c) Empleamos ahora la ley de los cosenos pero tomando en cuenta que el ángulo para la ecuación será θ = 180° - α = 180° - 45° = 135°.

$$R^2 = (50\ kg)^2 + (70\ kg)^2 - (50\ kg)(70\ kg) \times \cos 135°$$

$$R^2 = 2{,}500\ kg^2 + 4{,}900\ kg^2 + 7{,}000\ kg^2 \times (-0.707)$$

$$R^2 = 12{,}349\ kg^2$$

$$R = 111.13\ kg$$

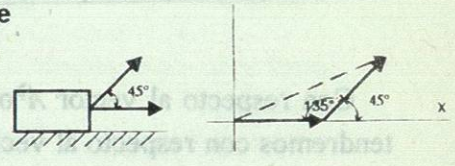

Figura No. 7.

Ya tenemos la magnitud de la resultante. Ahora nos interesa la dirección y para ello emplearemos a *ley de los senos*.

Ley de los senos. En cualquier triángulo, la razón que existe entre la magnitud de un lado y el seno del ángulo frente a él es igual a la razón de cualquiera de los otros lados al seno del ángulo frente a dicho ángulo.

$$\frac{a}{Sen\,A} = \frac{b}{Sen\,B}$$

ó

$$\frac{a}{Sen B} = \frac{c}{Sen\,C}$$

ó

$$\frac{b}{Sen\,B} = \frac{c}{SenC}$$

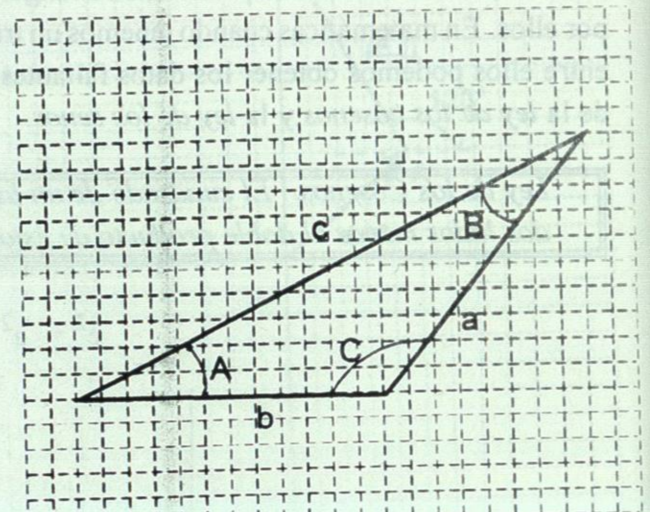

Figura No. 8.

Por lo tanto en nuestro problema podemos establecer:

$$\frac{R}{SenR} = \frac{a}{SenA}$$

$$\frac{R}{sen135°} = \frac{70}{sen\,A}$$

$$sen\,A = \frac{70\,kg \times sen\,135°}{R}$$

$$sen\,A = 0.4454$$

$$A = sen^{-1}\,(0.4454)$$

$$A = Z°$$

Siendo el resultado completo por ser un vector:

$$\vec{R} = 111.13\,kg \angle\, 26.45°$$

Con respecto al vector $\vec{A}$ o restándole este ángulo a 45É que es el ángulo de desfase entre los dos, tendremos con respecto al vector $\vec{B}$:

45É - 25.45É = 10.55É

b) En este caso se pide calcular la resta del vector $\vec{A}$ menos el vector $\vec{B}$ $\vec{A} - \vec{B}$ Para ello construyamos el triángulo que formarán estos estos vectores

El vector $\vec{A}$ es el mismo, en cambio en el vector $-\vec{B}$ la magnitud será igual al del vector $\vec{B}$ pero su sentido será contrario, es decir que lo tenemos que trazar girado 180° con respecto al vector $\vec{B}$.

Desde este momento el proceso para calcular la resultante será igual que en la suma. El ángulo entre los dos vectores ahora es de 45° (entre $\vec{A}$ y $-\vec{B}$).

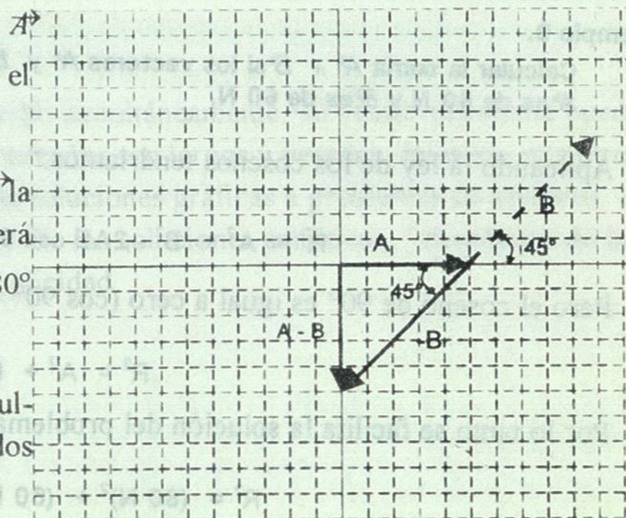

Figura No. 9.

$$R^2 = (50\,kg)^2 + (70\,kg)^2 - (50\,kg)(70\,kg) \times \cos 45°$$

$$R^2 = 2{,}500\,kg^2 + 4{,}900\,kg^2 - 7{,}000\,kg^2 \times (0.707)$$

$$R = \sqrt{2{,}451\quad kg^2}$$

$$R = 49.51\,kg$$

Para la direción aplicamos la ley de los senos.

$$\frac{R}{sen\,45°} = \frac{70\,kg}{sen A}$$

$$sen\,A = \frac{70\,kg \times sen\,45°}{49.51\,kg}$$

$$A = sen^{-1}\,0.9997$$

$$A = 88.71°$$

Por lo tanto

$$\vec{A} - \vec{B} = 49.51\,kg \angle 88.71° \text{ con respecto al vector } \vec{A}$$

Nota: Es importantísimo que observes, analices y comprendas bien el siguiente ejemplo, ya que por las características delk proceso serán de gran ayuda en procesos posteriores.

Ejemplo 9.

Calcular la suma $\vec{A} + \vec{B}$ si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están desfasados 90° uno de otro. La magnitud $\vec{A}$ es de 80 N y $\vec{B}$ es de 60 N.

Aplicando la ley de los cosenos tendríamos:

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos 90°$$

Pero el coseno de 90° es igual a cero (cos 90° = 0) entonces quedaría:

$$R^2 = A^2 + B^2 \quad \text{(TEOREMA DE PITÁGORAS).}$$

Por lo tanto se facilita la solución del problema.

$$R^2 = (80\ N)^2 + (60\ N)^2$$

$$R^2 = 6{,}400\ N^2 + 3{,}600\ N^2$$

$$R^2 = 10{,}000\ N^2$$

$$R = \sqrt{10{,}000\ N^2}$$

$$R = 100\ N$$

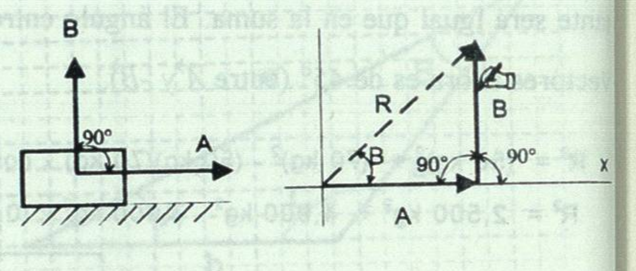

Figura No. 10

Para la dirección aplicaríamos la ley de los senos y obtendríamos:

$$\frac{A}{sen\ A} = \frac{B}{sen\ B}$$

$$\frac{sen\ b}{sen\ A} = \frac{B}{A} \quad \text{pero sen A = cos b, entonces}$$

$$\frac{sen\ B}{\cos B} = \frac{B}{A}$$

$$\text{y } \frac{sen\ B}{\cos B} = \tan B \quad \text{obtenemos:}$$

$$\tan B = \frac{B}{A}$$

$$\tan B = \frac{60\ N}{80\ N}$$

$$\tan B = 0.75$$

$$B = \tan^{-1} 0.75 = 36.87°$$

Conclusión: Si el ángulo formado por dos vectores es de 90° usaremos directamente las definiciones matemáticas:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

$$\tan B = \frac{b}{a}$$

MÉTODO DE LAS COMPONENTES.

Cuando varios vectores actúan sobre un mismo cuerpo simultáneamente, su vector resultante puede ser calculado por cualquiera de los métodos. Algunos métodos son largos y pesados, mientras que otros comprenden un mínimo de operaciones simples. De las soluciones gráficas a problemas de vectores, el método del polígono es indudablmente el más sencillo. De las soluciones analíticas, **"el método de las componentes"**, es el más corto y preferido pos su simplicidad.

Pero antes de componer hay que descomponer.

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR.

En los métodos analizados anteriormente, principalmente cuando sumabas o restabas dos vectores, de ellos formabas uno. Ahora vamos a partir de un vector obtener dos vectores, con la consideración básica de que formen entre ellos un ángulo de 90É Veamos un ejemplo.

Ejemplo

Descomponer una fuerza de 80 newtons a 45° sobre la horizontal (eje + x).

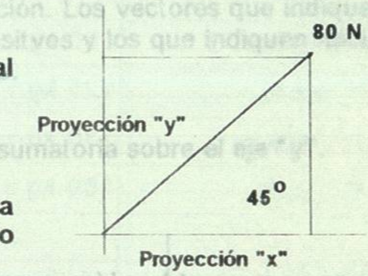

Figura No. 11

Solución:

Sabemos que tenemos que tomar la fuerza de 80 N como la hipotenusa de un triángulo rectángulo (ver figura) y que los catetos del triángulo serán las proyecciones de la fuerza en cada uno de los ejes.

$\cos \theta = \frac{F_x}{F}$ Por definición de la función coseno.

$F_x = F \times \cos \theta$ Despejando F_x.

$F_x = 80\ N \times \cos 45°$ Sustituyendo datos.

$F_x = 80\ N \times 0.707$ Obteniendo el coseno de 45° de tablas de funciones trigonométricas o calculadora.

$F_x = 56.56\ N$ Realizando operaciones y obtenemos la componente sobre el eje "x".

$sen\ \theta = \frac{F_y}{F}$ Por la definición de la función seno.

$F_y = F \times sen\ \theta$ Despejando la componente en y (F_y).

$F_y = 80\ N \times sen\ 45°$ Sustituyendo datos.

$F_y = 80\ N \times 0.707$ Obteniendo el valor del seno a 45° en tablas de funciones trigonométricas o calculadora.

$F_y = 56.56\ N$ Realizando las operaciones finales obtenemos la componente sobre el eje "y".