La velocidad media o promedio de un móvil es una cantidad vectorial, la cual se define como el cociente del desplazamiento realizado por éste entre el tiempo transcurrido.

$$\vec{v}_m = \frac{\text{vector desplazamiento}}{\text{Cambio de tiempo}}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La velocidad media tiene la misma dirección que el desplazamiento. En general $\Delta \vec{r} \neq \Delta s$, por lo que el módulo de la velocidad media no siempre es igual a la rapidez media.

Para muchos eventos de la mecánica, las dos cantidades físicas anteriores, no tienen gran significancia, sino que adquieren mayor importancia, las cantidades relacionadas en un instante preciso, es decir, se requiere saber la velocidad o rapidezde un objeto en un instante determinado de su trayectoria, la variación de la posición en un instante de tiempo dado, a lo que llamaremos *velocidad instantánea* y *rapidez intantánea.*

Para ello utilizaremos las definiciones dadas de velocidad media y rapidez media e ir reduciendo el intervalo de tiempo (Δt) haciéndolo tender a cero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \textit{velocidad instantánea}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \textit{rapidez instantánea}$$

Bajo un análisis matemático de las dos definiciones se llega a dos resultados importantes:

a) El módulo de la velocidad instantánea es igual a la rapidez instantánea,

b) El vector velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria que describe el móvil.

Las unidades correspondientes a las definiciones de velocidad y rapidez son unidades de longitud entre unidades de tiempo; ejemplos: metros por segundo (m/s), kilómetros por hora (km/h), millas por hora (mill/h), centímetros por segundo (cm/s), etc.

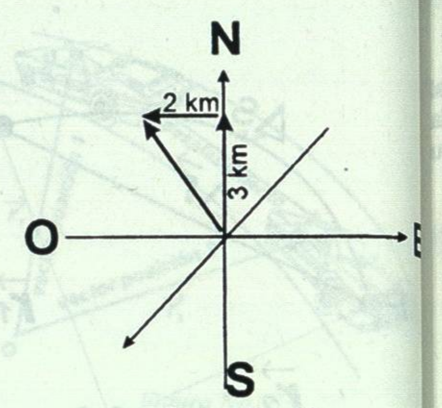

Figura No. 13

Ejemplo 1.
Un automóvil recorre 3 kilómetr hacia el Norte y luego 2 kilómetr hacia el Poniente en 2 minutos. C cular su rapidez y su velocidad.

$$v_m = \frac{5\ km}{3\ min} = 1.67\ \frac{km}{min}$$

$$v_m = \frac{5{,}000\ m}{180\ s} = 27.78\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_m = \frac{3.65\ km}{3\ min} = 1.22\ \frac{km}{min}\ NO$$

$$\vec{v}_m = 20.3\ \frac{m}{s}\ NO$$

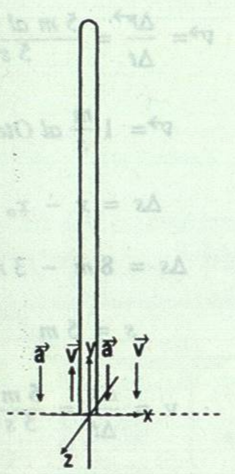

Figura No. 14

ACELERACIÓN MEDIA Y ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Si la velocidad de una partícula varía con el tiempo, entonces es necesario analizar este cambio. A la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo determinado se le denomina *aceleración media*

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{t - t_o}$$

donde $\Delta \vec{v}$ representa la variación de la velocidad durante el intervalo Δt y la aceleración instantánea se define como el límite de la aceleración cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Para este curso manejaremos principalmente el caso de aceleración constante (a = k).

Es importante señalar que en general la velocidad y la aceleración de una partícula no tienen necesariamente la misma dirección y sentido. Por ejemplo, una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, al salir del punto de lanzamiento, posee una dirección cuyo sentido es hacia arriba, sin embargo, el sentido de la aceleración es hacia abajo.

Las unidades para la aceleración, por su definición son: unidades de velocidad entre unidades de tiempo: ejemplos: metros por segundo cada segundo (m/s/s ó m/s^2), kilómetros por hora cada hora (km/h/h o km/h^2), (cm/s^2), (mm/s^2), (pies/s^2), etc.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Continuando con la descripción matemática del movimiento y considerando que el movimiento más frecuente en la naturaleza y la técnica es el movimiento en una trayectoria recta y además que la experiencia demuestra que cualquier movimiento en el espacio puede ser interpretado como una superposición de tres movimientos rectilíneos independientes, además considerando que el vector posición que determina el movimiento resultante es la suma vectorial de los vectores de posición de los movimientos componentes, el cual se conoce como el "Principio de la independencia del movimiento" de Galileo.

Luego, después de seleccionar el sistema de referencia, podemos analizar cada una de las componentes del movimiento sobre cada eje coordenado, independientes entre sí.

Analicemos ahora el movimiento de una partícula sobre uno de los ejes coordenados.

Ya vimos anteriormente que la velocidad media y la velocidad instantánea fueron definidas respectivamente como:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \text{ y } v = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v_m}$$

En el eje "x" particularmente tendríamos:

$$\vec{v_{m_x}} = \frac{\Delta \vec{r_x}}{\Delta t} \text{ y } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r_x}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{r_x} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

Por la simplificación lograda al colocar el movimiento sobre el eje "x".

Obtenemos que $\Delta \vec{r} = (\vec{r_2} - \vec{r_1})$

$$\textit{Velocidad media} = \vec{v_m} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\textit{Rapidez media} = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

La magnitud del vector $\vec{r_2}$ coincide con el valor de x_1 y la magnitud del vector $\vec{r_2}$ coincide con el valor de x_2 por lo que podemos concluir que en el movimiento rectilíneo el módulo de la velocidad es igual a la rapidez, es decir que con la definición algebraica de la rapidez media podemos calcular el módulo de la velocidad media, sin olvidar el carácter vectorial de la velocidad (su dirección).

Ejemplo: No.

Un móvil se encuentra a 3 metros Oriente y se mueve a 8 metros hacia el Oriente en 5 segundos. Calcular su velocidad y su rapidez.

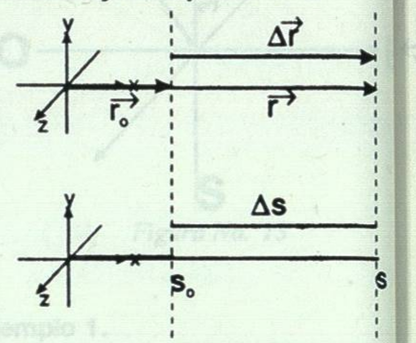

Figura No. 15

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r_o}$$

$$\Delta \vec{r} = (8\,m - 3\,m) \textit{ al Oriente}$$

Por ser vectores colineales

$$\Delta \vec{r} = 5\,m \textit{ al Oriente}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{5\,m \textit{ al Ote.}}{5\,s}$$

$$\vec{v} = 1\frac{m}{s} \textit{ al Ote}$$

$$\Delta s = x - x_o$$

$$\Delta s = 8\,m - 3\,m$$

$$s = 5\,m$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5\,m}{5\,s}$$

$$v = 1\frac{m}{s}$$

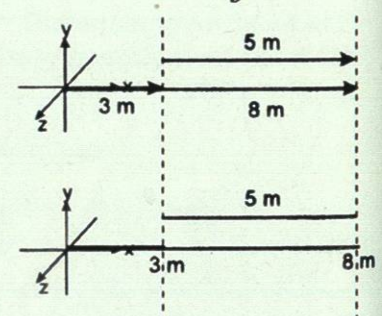

Figura No. 16

¿Qué variaciones puede haber en el caso particular del movimiento rectilíneo?

a) Que la velocidad sea constante ($\vec{v} =$ k y v = k), por lo tanto

$$\vec{v_m} = \vec{v} = \vec{v_o},\ v_m = v = v_o,\ \vec{a_m} = 0 \text{ y } a_m = 0$$

b) Que la velocidad sea variable (v Ö0)

1) Que la aceleración sea constante (a = k)

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v_o}}{\Delta t} \quad \text{y} \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{\Delta t}$$

Para el movimiento rectilíneo el módulo del vector aceleración media y la aceleración media son iguales.

2) La aceleración sea variable (a Ök). No se verá en este capítulo.

Ejemplo No. 1
Un automóvil se mueve sobre una carretera recta a velocidad constante y recorre una distancia de 800 metros en 40 segundos, calcular su velocidad media, velocidad final.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{800\,m}{50\,s} = 16\,\frac{m}{s}$$

Aquí se cálculo la rapidez media que será igual a la rapidez inicial y a la rapidez final según se especificó anteriormente.

Los valores de la velocidad media, velocidad inicial y velocidad final serán iguales a los de la rapidez pero en la dirección del automóvil.

Ejemplo No. 2
Una pelota se suelta libremente desde una altura de 20 metros. Calcular la velocidad de choque con el suelo y el tiempo que tarda en llegar al suelo:
a) Si el marco de referencia se coloca en el punto donde se soltó la pelota,
b) Si el marco de referencia se ubica en el suelo.

Solución:
1°. Debemos de realizar un diagrama que nos simbolice el evento (como se ve en la figura) y remarcar el vector desplazamiento, que será tu guía para resolver el problema, y con respecto a él desarrollar nuestros cálculos.
2°. Detallar correctamente los datos que nos servirán para estos cálculos destacándolos sobre el diagrama.
3°. Usar las definiciones básicas del movimiento (para este caso el movimiento rectilíneo).

a) Considerando el marco de referencia en el punto de lanzamiento.

Datos: $\vec{r}$ = 20 m hacia abajo, $\vec{r_o}$ = 0 (coincide con el punto de lanzamiento), $\vec{a_m}$ = 10 m/s^2, hacia abajo, $\vec{v_o}$ = 0.

Ahora podemos usar las definiciones de rapidez media y aceleración media pero conservando el signo mostrado por el vector con relación al marco de referencia.

$$v_m = \frac{v + v_o}{2} \rightarrow \frac{v + 0}{2} = \frac{v}{2}$$

$$v_m = \frac{s - s_o}{t} \rightarrow v_m = \frac{-20\ m}{t}$$

$$a_m = \frac{v - v_o}{t} \rightarrow a_m = -10\ \frac{m}{s^2} = \frac{v}{t}$$

igualando la primera con la segunda se obtiene y despejando t:

$$\frac{-20\ m}{t} = \frac{v}{2} \rightarrow t = \frac{-40\ m}{v}$$

y de la tercera ecuación despejando t

$$t = \frac{v}{-10\ \frac{m}{s^2}}$$

igualando los dos valores de t

$$\frac{-40\ m\ \frac{m}{s}}{v} = \frac{v}{-10\ \frac{m}{s^2}} \rightarrow v^2 = -40\ m \times -10\ \frac{m}{s^2}$$

$$v = -20\ \frac{m}{s}\ \text{(el signo negativo indica que va hacia abajo)}$$

Por cualquiera de las dos ecuaciones para t podemos calcular el tiempo.

$$t = \frac{-20\ \frac{m}{s}}{-10\ \frac{m}{s^2}} = 2\ s \quad ó \quad \frac{-40\ m}{-20\ \frac{m}{s}} = 2\ s$$

b) El marco de referencia en el suelo.

Datos: : $\vec{r_o}$ = 20 m hacia arriba, $\vec{r}$ = 0 (coincide con el piso), $\vec{a_m}$ = 10 m/s^2, hacia abajo, $\vec{v_o}$ = 0.

Usando las definiciones tendríamos:

$$v_m = \frac{s - s_o}{t} \Rightarrow v_m = \frac{0 - 20\ m}{t} = \frac{-20\ m}{t}$$

$$v_m = \frac{v + v_o}{2} \Rightarrow v_m = \frac{v}{2}$$

$$a_m = \frac{v - v_o}{t} \Rightarrow -10\ \frac{m}{s^2} = \frac{v}{t}$$

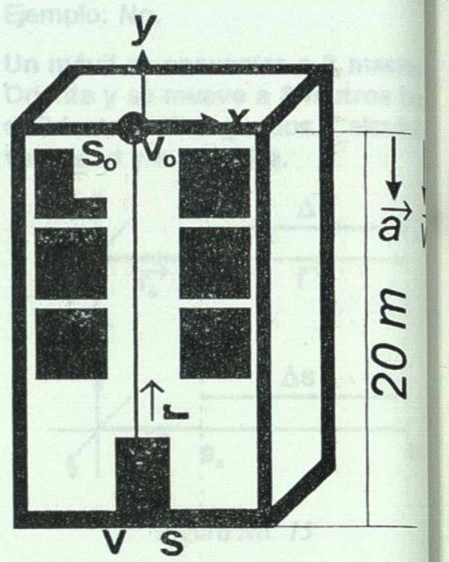

Figura No. 17

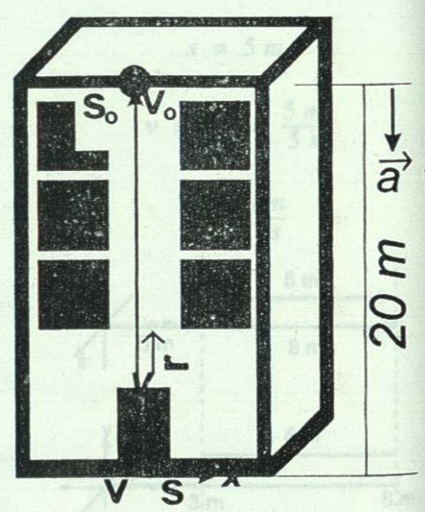

Figura No. 18

Despejando "t" de la 1ª. y 3ª. definición e igualando:

$$\frac{v}{-10\ \frac{m}{s^2}} = \frac{\frac{-20\ m}{-40\ m}}{v} \Rightarrow v^2 = (-40\ m) \times (-10\ \frac{m}{s^2}) = 400\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$v = 20\ \frac{m}{s}$$

Fórmulas del movimiento uniformemente acelerado.

$$v = v_o + at$$

$$s = \frac{v + v_o}{2}\ t$$

$$v^2 = v_o^2 + 2as$$

$$s = v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

DETERMINACIÓN DE LAS EXPRESIONES DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO EN EL CASO DE LA ACELERACIÓN CONSTANTE

Analicémos el movimiento de una partícula en una dirección, por ejemplo el eje "x", que se mueve con aceleración constante (a = k) y obtengamos las ecuaciones generales que caracterizan el movimiento de la misma.

De lo anteriormente expuesto, tenemos simplificadas dos expresiones:

$$a = \frac{v - v_o}{t} \qquad \textbf{(1)}$$

$$v_m = \frac{s}{t} \qquad \textbf{(2)}$$

$$v_m = \frac{v + v_o}{2}$$ **(3) que es el promedio de dos lecturas, la rapidez final y la inicial.**

$$v = v_o + at$$ **I Despejando rapidez final (*v*) de la ecuación 3**

$$s = \frac{v + v_o}{2}\ t$$ **II Combinando la ecuación 2 con la 3**

$$\frac{2s}{v + v_o} = \frac{v - v_o}{a}$$ **III Despejando t de las ecuaciones I y II e igualando**

$$(v + v_o)(v - v_o) = 2as$$

$$v^2 - v_o^2 = 2as$$

$$v^2 = v_o^2 + 2as$$

$$\frac{2s}{t} - v_o = v_o + at$$ **IV Despejando rapidez final de la ecuación II e igualando con la rapidez final de la ecuación I.**

$$s = v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En gran parte del lenguaje de la física aparecen las matemáticas. Estas son una herramienta de mucha utilidad para el entendimiento de la física.

En el análisis de datos de observaciones o experimentación hacemos uso de las gráficas y ecuaciones. Una gráfica de datos nos proporciona la clave para obtener una ecuación (la viste en tus cursos precedentes de matemáticas) que describa los resultados obtenidos en la experimentación. Además hay que considerar que la información que nos proporciona una gráfica bien elaborada es más que suficiente como para afirmar que "Una gráfica dice más que mil palabras".

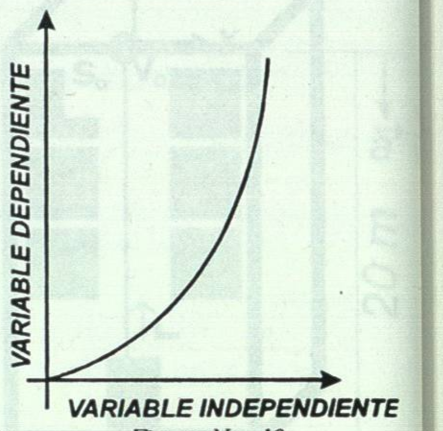

Figura No. 19

Los pasos a seguir para el trazado de una gráfica a partir de datos observados o de experimentación, son:

1°. Identificar con precisión las variables dependiente e independiente de tus datos. Según viste en tu curso de matemáticas, correspondiente al tema, elegiste el eje "x" horizontal) para la variable independiente, y el eje "y" (vertical) para la variable dependiente. Para nuestro tema del movimiento, con gran regularidad tomaremos al tiempo como la variable independiente, aunque veremos otras gráficas en las que no interviene el tiempo.

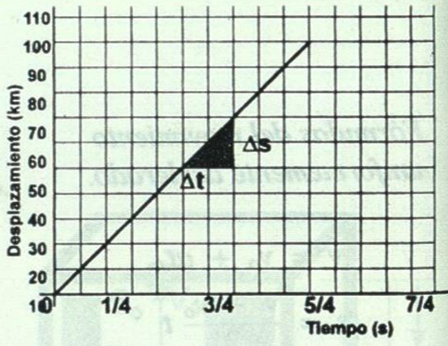

Figura No. 20

2°. Determinar el rango de la variable independiente que se va a graficar.

3°. Determinar si el origen (0,0) es un punto válido. Con este paso y el anterior te servirán de base para determinar una escala conveniente.

4°. Numerar y marcar los ejes con valores acordes a los datos obtenidos.

5°. Representar los datos mediante puntos sobre la gráfica.

6°. Trazar una curva suave que toque la mayor cantidad posible de puntos o una línea recta que interpole la mayor cantidad de puntos posible (igual cantidad de puntos encima y abajo de la recta). No se debe trazar un conjunto de segmentos de línea de recta para "unir puntos".

TIEMPO (s)	POSICIÓN (m)
0	120
1	390
2	660
3	930
4	1200
5	1470

TIEMPO (s)	VELOCIDAD (m/s)
0	270
1	270
2	270
3	270
4	270
5	270

Ejemplo: Trazar la gráfica de posición contra tiempo de un avión que viaja a velocidad constante. Por reportes se obtuvieron los datos mostrados en la tabla del margen izquierdo:

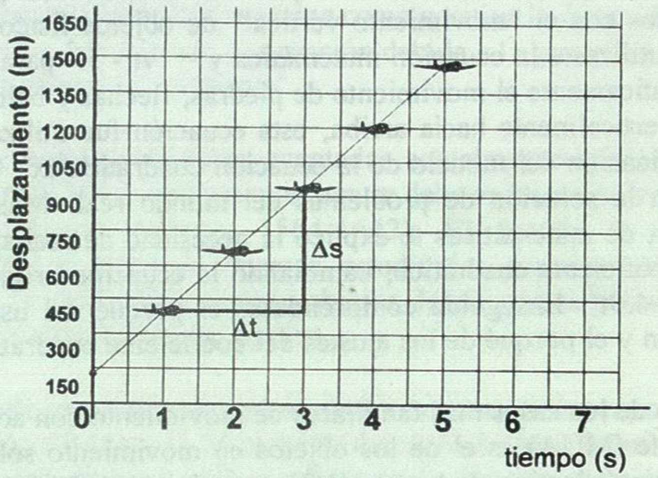

Figura No. 21

Trazar la gráfica de velocidad contra tiempo del mismo ejemplo con los datos mostrados en la segunda tabla.

Figura No. 22

Como podrás observar las gráficas de desplazamiento contra tiempo, velocidad contra tiempo son herramientas para describir el movimiento y te será de gran ayuda el poder interpretarlas correctamente.

En la gráfica de velocidad contra tiempo, el área bajo la curva equivale al desplazamiento del objeto desde la posición original hasta la posición en un tiempo trasncurrido. Cuando la velocidad es constante, el desplazamiento se incrementa linealmente con el tiempo. Si se elabora una gráfica del desplazamiento, se obtiene una recta cuya pendiente es igual a la velocidad como se mostró en la primera gráfica de este problema.

CAÍDA LIBRE

Durante el desarrollo de tus cursos previos de matemáticas, recordarás que tu maestro te explicó la solución de problemas asociados con el "movimiento vertical" de objetos físicos, inicialmente utilizaste la ecuación matemática $y = vt - 5t^2$ para describir matemáticamente el movimiento de piedras, flechas y balones arrojados verticalmente hacia arriba, esta ecuación fue utilizada como una aplicación del modelo de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ en la solución de problemas del mundo real. Más tarde tu profesor de matemáticas te explicó la necesidad de realizar ajustes en el coeficiente cuadrático, cambiando la ecuación original por $y = vt - 4.9t^2$. Enseguida comprenderás el porqué del uso de esta ecuación y el porqué de los ajustes del coeficiente cuadrático.

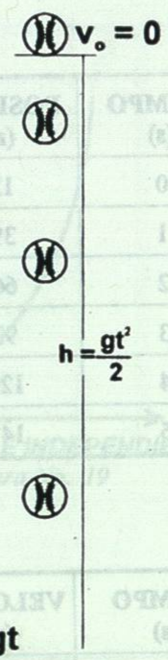

Figura No. 23

Uno de los casos más familiares de movimiento con aceleración constante (MUA) es el de los objetos en movimiento sólo bajo la influencia de la gravedad, cerca de la superficie de la Tierra. Cuando un objeto cae, su velocidad inicial es cero pero un instante después de que es liberado, durante la caída, tiene una velocidad que no es cero, ha ocurrido un cambio en la velocidad y por lo tanto tiene una aceleración, la aceleración debida a la gravedad que experimentalmente se ha encontrado tiene un valor aproximado (magnitud) de $9.80\ m/s^2$ o de $32\ pies/s^2$ en unidades británicas.

Alguna vez se creyó que los cuerpos pesados caían más aprisa que los cuerpos más ligeros, esta afirmación fue parte de la teoría aristotélica del movimiento de los cuerpos. Un sencillo experimento te permite refutar esta errónea afirmación. Es fácil observar que una moneda cae más rápidamente que una hoja de papel, cuando se dejan caer desde la misma altura, en este caso la resistencia del aire juega un papel notable, pero si el papel se arruga en forma de una bola compacta ofrece a la moneda una competencia más reñida.

Un cuerpo describe un movimiento de caída libre, si se mueve libremente, es decir, se desprecia el efecto de la friccón del aire sobre él, y describe una trayectoria vertical hacia abajo.

En ausencia de la fricción del aire, todos los cuerpos, grandes o pequeños, caen con la misma aceleración.

Este movimiento se debe a la atracción que ejerce la Tierra sobre todos los objetos que se encuentran cerca de su superficie. A partir de lo anterior, se puede observar que si se dejan caer dos piedras, una grande y otra pequeña, desde la misma altura, llegarán al suelo al mismo tiempo. Esto se debe a que la atracción gravitacional de la Tierra genera un movimiento uniformemente acelerado, en donde la aceleración es debida a la acción de gravedad (g), la cual tiene aproximadamente un valor de $9.8\ m/s^2$ o de $32\ ft/s^2$. Al medir el

valor de la en distintos lugares de la Tierra, se tienen algunas variaciones, sin embargo este valor es adecuado para la solución de los problemas a resolver. La aceleración de la gravedad es una cantidad vectorial, dirigida hacia el centro de la Tierra. Si en este movimiento de caída libre se toma como positiva la dirección vertical hacia arriba, entonces la aceleración debida a la gravedad tendrá un signo negativo, = $- 9.8\ m/s^2$.

Este conjunto de ideas aceptadas actualmente con respecto al movimiento de los cuerpos que caen se debe en buena parte a Galileo Galilei (Físico italiano, 1564-1642). Él desafió la teoría de Aristóteles y según la leyenda estudió las aceleraciones de los cuerpos en caída libre tirando objetos de diferentes pesos desde lo alto de la torre inclinada de Pisa.

"Caída libre" es entonces el término que se utiliza para describir un objeto que cae y se mueve hacia abajo sólo bajo la influencia de la gravedad, despreciando el efecto de la fricción del aire sobre él ($g = 9.8\ m/s^2$). No obstante este término puede aplicarse en general a cualquier movimiento bajo la influencia de la gravedad. Un objeto con una velocidad inicial, dirigido hacia arriba o hacia abajo, se puede pensar como un movimiento uniformemente acelerado proyectado en una dimensión con una aceleración igual a "g".

De este modo para describir matemáticamente el problema del movimiento vertical de un objeto bajo la acción de la gravedad se utiliza el conjunto de ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado (MUA) en una dimensión, obtenidas con anterioridad, en las cuales se sustituirá "g" por "a" y "h" por "s", de tal forma el conjunto de ecuaciones que resulta es:

Movimiento Uniformemente Acelerado.	**Caída Libre**
$v = v_o + at$	$v = gt$
$s = \left(\frac{(v_o + v)}{2}\right)t$	$h = \left(\frac{v}{2}\right)t$
$v^2 = v_o^2 + 2as$	$v^2 = 2gh$
$s = v_o t + \frac{1}{2}at^2$	$h = \frac{1}{2}gt^2$

Es muy importante aclarar que la introducción de diferentes letras para la representación de la aceleración y el desplazamiento no alteran el sentido físico del movimiento y de las leyes que lo rigen, **esto significa referirnos al movimiento vertical generalizado como un caso particular del movimiento uniforme acelerado en una dimensión (MRUA)**.