Ahora estás en posibilidad de comprender que tu profesor de matemáticas utilizó una primera aproximación al valor de "g" de 10 m/s^2, y más tarde una más finas aproximación del valor de "g", $g = -9.8\ m/s^2$, por lo tanto la ecuación $h = v_o t + 1/2\ gt^2$ nos queda de la forma $y = v_o t - 4.9t^2$.

En la descripción matemática de este movimiento se ha seleccionado como positiva la dirección hacia arriba, por tal motivo, la velocidad hacia abajo tendrá signo negativo y la altura por debajo del punto de partida tendrá también signo negativo.

Ejemplo 1.
Accidentalmente cae una plomada desde lo alto de un edificio de 72 m de altura. Calcular: a) El tiempo que tarda la plomada en chocar contra la banqueta de la calle. b) La velocidad con que choca contra el suelo.

Datos

$$v_o = 0$$

$$h = 72\ m$$

$$g = -9.8\ \frac{m}{s^2}$$

a) La ecuación que se utiliza para calcular el tiempo es

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

despejando de la ecuación y sustituyendo datos

$$t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t^2 = \frac{2(-72\ m)}{-9.8\ \frac{m}{s^2}}$$

$$t = \frac{144\ m}{9.8\ \frac{m}{s^2}}$$

$$t = \sqrt{14.69\ s^2}$$

b) La ecuación a utilizar para calcular la velocidad con la que choca con el suelo es

$$v_o = gt$$

$$v = \left(-9.8\ \frac{m}{s^2}\right)(3.83\ s)$$

$$v = -37.53\ \frac{m}{s}$$ **nótese que el signo negativo de la velocidad se debe a que su dirección es hacia abajo.**

TIRO VERTICAL HACIA ARRIBA

Al igual que en la caída libre, en el tiro vertical hacia arriba, se desprecia la fricción del aire. En este movimiento se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, observándose que la magnitud de su velocidad va disminuyendo de manera proporcional hasta detenerse, al alcanzar el punto más alto. Inmediatamente inicia su movimiento de regreso, incrementándose su velocidad en la misma proporción, hasta alcanzar la magnitud de la velocidad con que fue lanzado, de tal forma que la magnitud de la velocidad de lanzamiento es igual a la magnitud de la velocidad de llegada al plano de lanzamiento. Este movimiento es vertical y se produce bajo la acción de la gravedad, como se puede observar en la siguiente figura.

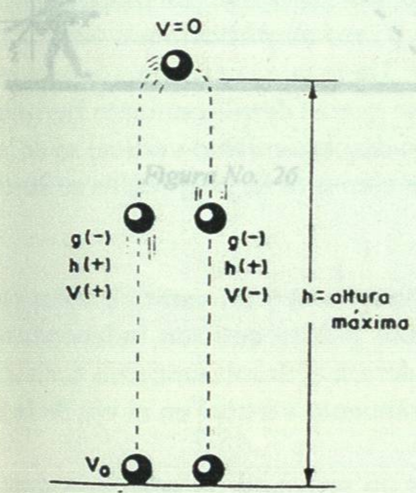

Figura No. 24

Seguirás las criterios establecidos en la ubicación del marco de referencia para los signos de tus datos.

- Nótese que la velocidad en el punto más alto es nula. En el ejemplo descrito anteriormente, se tiene que, al ir hacia arriba el objeto, la magnitud de su velocidad disminuye a razón de 9.8 m/s cada segundo hasta que se detiene. Inmediatamente inicia el objeto su descenso, al hacerlo, la magnitud de la velocidad se irá incrementando a razón de 9.8 m/s cada segundo de su recorrido. Al alcanzar el plano de lanzamiento se observa que la magnitud de la velocidad es la misma con la que fue lanzado el objeto. El problema del tiro vertical hacia arriba es un caso particular del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, por lo cual se utilizarán las mismas ecuaciones.

Ejemplo 1.
Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba, regresando en un tiempo de 3.60 s. Calcular:
a) El tiempo para alcanzar el punto más alto.
b) Su velocidad de lanzamiento.
c) La altura máxima que alcanza.

Datos

$$t_{total} = 2t$$

$$g = -9.8\,\frac{m}{s^2}$$

$v = o$ en el punto más alto.

a) Dado que el tiempo en subir es el mismo en bajar, por lo tanto, se considera el tiempo total igual a 2t. Para alcanzar el punto más alto, corresponde a la mitad del tiempo total.

$$t_{total} = 2\,t \qquad t = \frac{3.60\ s}{2}$$

$$t = \frac{t_{total}}{2} \qquad t = 1.80\ s$$

b) La ecuación a utilizar para calcular v_o es

$$v = v_o + gt$$

puesto que la velocidad en el punto más alto es cero, y despejando v_o, resulta que

$$v_o = -gt$$

$$v_o = -(-9.8\,\frac{m}{s^2})\,(1.80\,s)$$

$$v_o = 17.64\,\frac{m}{s}$$

c) La ecuación que se utiliza para calcular la altura es

$$h = v_o\,t + \frac{g\,t^2}{2}$$

$$h = (17.64\,\frac{m}{s})\,(1.80\,s) + \frac{(-9.8\,\frac{m}{s^2})\,(1.80\,s)^2}{2}$$

$$h = 31.75\,m - 15.87\,m$$

$$h = 15.88\,m$$

MOVIMIENTO EN UN PLANO

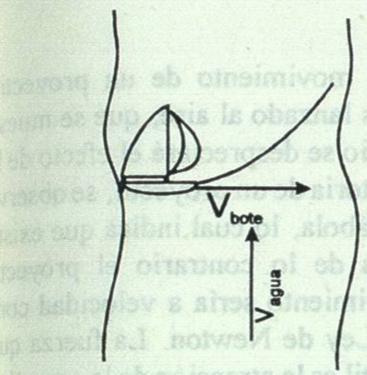

Figura No. 25

Al hacer el análisis del movimiento rectilíneo, vimos que era de gran utilidad ubicar nuestro marco de referencia en coincidencia con la trayectoria y mencionamos también que sería de utilidad práctica esta descripción para el caso de movimientos más complejos.

Así, si conocemos las componentes de la velocidad y la aceleración en cada eje del movimiento real, resulta fácil conocer la velocidad y la aceleración de este, sumando de forma vectorial, estas componentes.

Una situación interesante y que se presenta con frecuencia en la vida diaria es el movimiento parabólico, como ocurre, por ejemplo, al batear un beisbolista un "elevado" hacia los jardines, el lanzamiento de una jabalina, un "pase" del "quarterback" hacia alguno de sus receptores, un tiro desde la línea hacia la canasta en el basquetbol, cuando se lanza una partícula cargada a través d l campo eléctrico uniforme a dos placas paralelas cargadas.

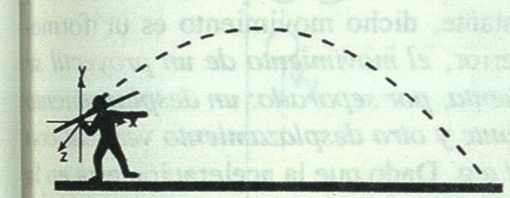

Figura No. 26

Este tipo de movimiento surge cuando la partícula se mueve sometida a un vector aceleración constante, que forma un ángulo con la velocidad inicial de este.

El Principio de independencia de Galileo, ya mencionado, posibilita el análisis de este movimiento a partir de su descomposición en dos direcciones, una de las cuales se escoge según la dirección de la aceleración, para facilitar el propio análisis.

De acuerdo a la orientación de los ejes escogidos, ver figura, tendremos en el eje "y" un movimiento uniforme acelerado y en el eje "x" un movimiento uniforme y podemos escribir las ecuaciones en estos ejes como:

$$v_x = v_{ox};\ v_y = v_{oy} - a_y t;\ x = x_o + v_{ox}t;\ y = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}\,a_y t^2$$

Uno de los usos más interesantes de estas ecuaciones obtenidas es en el caso de un proyectil, suponiendo que puede despreciarse la resistencia del aire y que podemos considerar la aceleración de la gravedad constante, lo cual sólo será cierto si el alcance del proyectil es pequeño y este se mueve a bajas alturas.

PROYECTILES

A continuación se describirá el movimiento de un proyectil, entendiendo por éste al objeto que es lanzado al aire, que se mueve libremente. Para simplificar su estudio se despreciará el efecto de la fricción del aire. Al analizar la trayectoria de un proyectil, se observa que describe una curva, llamada parábola, lo cual indica que existe una fuerza aplicada sobre él, pues de lo contrario el proyectil describiría una línea recta y su movimiento sería a velocidad constante, como lo predice la Primera Ley de Newton. La fuerza que actúa sobre el movimiento del proyectil es la atracción de la gravedad que ejerce la Tierra sobre él, la cual le produce una aceleración vertical hacia abajo, conocida como la aceleración debida a la gravedad (g). Para puntos cercanos a la superficie terrestre el valor de g es constante e igual a $9.8\ m/s^2$.

Dado que la trayectoria descrita por un proyectil, es una parábola, este caso corresponde a un movimiento en dos dimensiones, además, como su aceleración es constante, dicho movimiento es uniformemente acelerado. Por lo anterior, *el movimiento de un proyectil se puede analizar tomando encuenta, por separado: un desplazamiento horizontal a velocidad constante y otro desplazamiento vertical con aceleración constante e igual a g.* Dado que la aceleración está en la dirección vertical, es de esperarse que su desplazamiento horizontal sea a velocidad constante y que su desplazamiento vertical se dé bajo la acción de la gravedad. Algunos ejemplos de proyectiles se ilustran en la figura 1.

Para analizar el movimiento de un proyectil, vamos a tratar estos dos desplazamientos por separado, puesto que son independientes entre sí. En este análisis se considerará el desplazamiento horizontal sobre el eje de la x, y el desplazamiento vertical en el eje de la y.

Al estudiar el movimiento de un proyectil, el caso más general es el que corresponde al tiro parabólico, en el cual se lanza un objeto a un cierto ángulo de inclinación y con una determinada velocidad. Un caso particular de este movimiento que por simplicidad abordaremos primeramente es el tiro horizontal, en el cual se lanza horizontalmente un objeto, desde una cierta altura.

TIRO HORIZONTAL

Este movimiento se caracteriza por una trayectoria curva que sigue un cuerpo al ser lanzado en dirección horizontal. Es el resultado de la combinación de dos desplazamientos independientes: uno horizontal, a velocidad constante y otro vertical, el cual se inicia desde el reposo y está bajo la acción de la gravedad, es decir, su velocidad vertical va aumentando 9.8 m/s cada segundo, a medida que el proyectil va descendiendo. Estas características se podrán apreciar en la figura 2. En ella se observan dos objetos, uno que se suelta y otro que se lanza horizontalmente y al mismo tiempo que el primero, pero con una velocidad de 8 m/s.

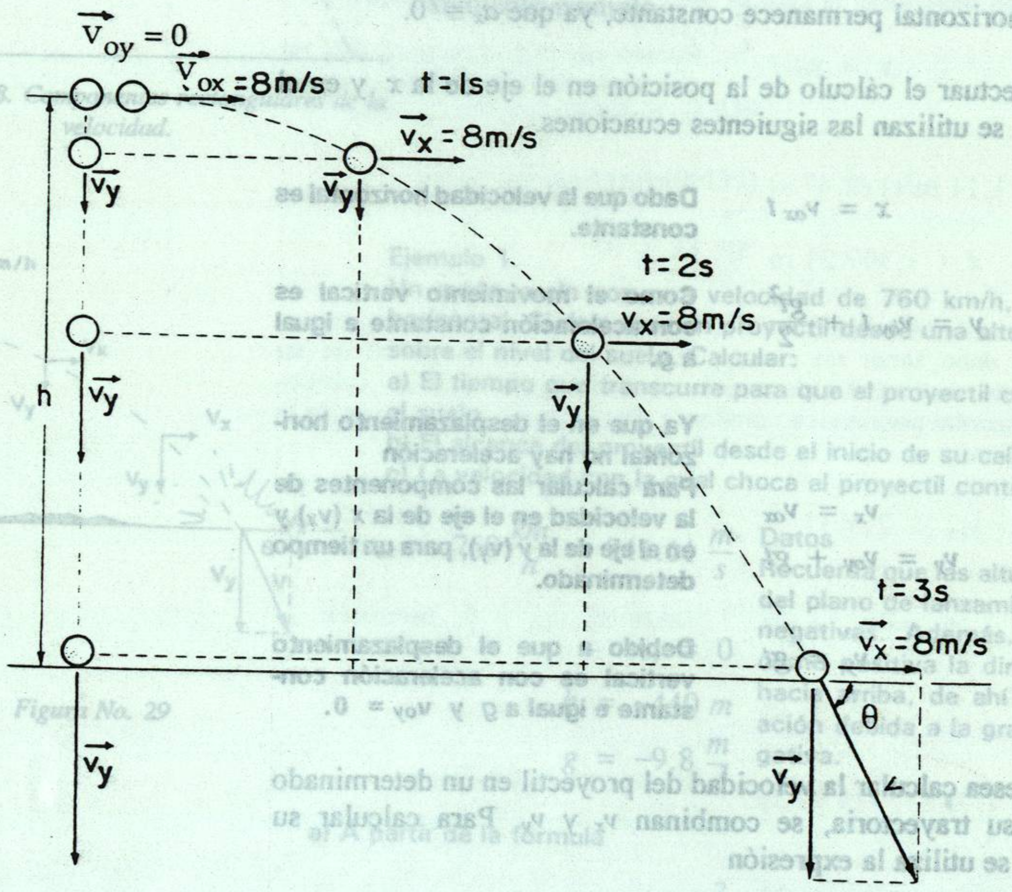

Figura No. 27. Comparación del movimiento de dos objetos.

v_{ox} es la componente de la velocidad inicial en el eje de la x.
v_{oy} es la componente de la velocidad inicial en el eje de la y.

Al término de un segundo, ambos objetos han recorrido 4.9 metros en el movimiento de caída, y a su vez, el objeto de la derecha se ha desplazado 8 metros en dirección horizontal, a partir de su posición inicial. A los dos segundos, ambos objetos han recorrido 19.6 metros en su desplazamiento vertical hacia abajo y al mismo tiempo, el objeto de la derecha se ha desplazado 16 metros en dirección horizontal. A los tres segundos, los objetos han descendido 44.1 metros y al mismo tiempo, el objeto del lado derecho se ha desplazado 24 metros en dirección horizontal. De aquí podemos observar que el objeto del lado derecho, el cual fue lanzado horizontalmente, tendrá una velocidad constante en la dirección horizontal e independiente de su desplazamiento vertical originado por la acción de la gravedad. El desplazamiento vertical se inicia a partir del reposo (v_{oy} = 0) y va aumentando la velocidad a razón de 9.8 m/s cada segundo, conforme el objeto va descendiendo, en tanto que la velocidad horizontal permanece constante, ya que $a_x = 0$.

Para efectuar el cálculo de la posición en el eje de la x y en el eje de la y se utilizan las siguientes ecuaciones.

$$x = v_{ox}\, t$$

Dado que la velocidad horizontal es constante.

$$y = v_{oy}\, t + \frac{gt^2}{2}$$

Como el movimiento vertical es con aceleración constante e igual a *g*.

Ya que en el desplazamiento horizontal no hay aceleración

$$v_x = v_{ox}$$

$$v_y = v_{oy} + gt$$

Para calcular las componentes de la velocidad en el eje de la *x* (v_x) y en el eje de la *y* (v_y), para un tiempo determinado.

$$v_y = gt$$

Debido a que el desplazamiento vertical es con aceleración constante e igual a *g* y v_{oy} = 0.

Si se desea calcular la velocidad del proyectil en un determinado punto de su trayectoria, se combinan v_x y v_y. Para calcular su magnitud, se utiliza la expresión

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

La dirección se obtiene mediante esta expresión donde θ es el ángulo entre el vector (v) y su componente (v_x), ver figura 3.

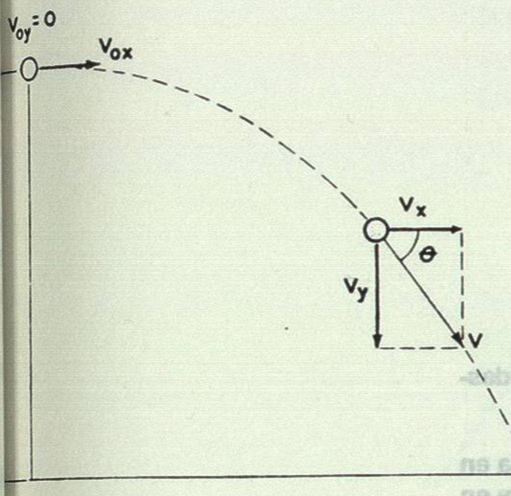

Figura No. 28. Componentes rectangulares de la velocidad.

En la solución de problemas que involucran el movimiento de proyectiles en tiro horizontal, es recomendable tratarlos como el movimiento que resulta de la combinación de dos desplazamientos: uno horizontal a velocidad constante y otro vertical uniformemente acelerado similar al de la caída libre de un cuerpo. Estos dos desplazamientos deben considerarse de manera independiente uno del otro, siendo el tiempo la única variable común a ambos desplazamientos. Vamos a ilustrar lo anterior mediante el siguiente ejemplo.

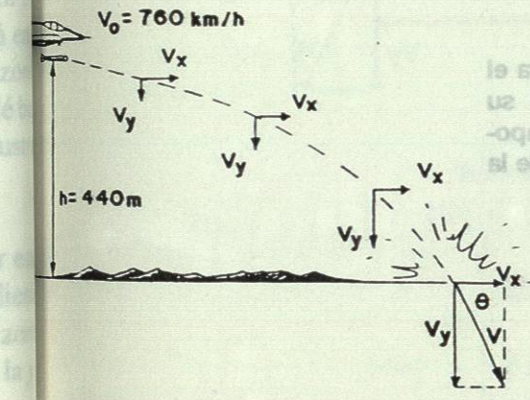

Figura No. 29

Ejemplo 1.
Un avión vuela con una velocidad de 760 km/h, en dirección horizontal. Si deja caer un proyectil desde una altura de 440 m sobre el nivel del suelo. Calcular:

a) El tiempo que transcurre para que el proyectil choque contra el suelo.
b) El alcance del proyectil desde el inicio de su caída.
c) La velocidad con la cual choca el proyectil contra el suelo.

$$v_{ox} = 760\,\frac{km}{h} = 211.11\,\frac{m}{s}$$

$$v_{oy} = 0$$

$$h = -440\ m$$

$$g = -9.8\,\frac{m}{s^2}$$

Datos
Recuerda que las alturas por debajo del plano de lanzamiento se toman negativas. Además, se considera como positiva la dirección vertical hacia arriba, de ahí que la aceleración debida a la gravedad sea negativa.

a) A partir de la fórmula

$$h = v_{oy} + \frac{g\,t^2}{2}$$

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Puesto que $v_{oy} = 0$.

$$\frac{2h}{g} = t^2$$

Despejando el tiempo al cuadrado.