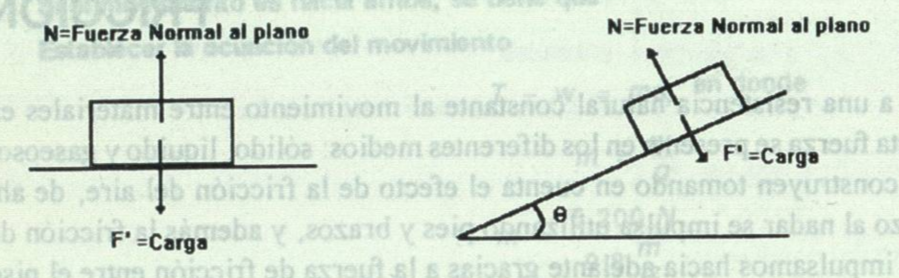


Fig. 7. El cuerpo ejerce una fuerza sobre la superficie (carga), la cual se representa como la acción y a su vez, la superficie ejerce una fuerza sobre el cuerpo, conocida como la fuerza normal (N) a la superficie, fuerza de reacción. Dado que la carga y la normal son las fuerzas de acción y reacción, se tiene que N = carga.

La fuerza normal (N) al plano es igual al peso (w) del objeto, cuando éste se desliza sobre un plano horizontal (ver figura 8a). Para un objeto en un plano inclinado, la fuerza normal es igual a la componente del peso perpendicular al plano (w_y), ver figura 8 b.

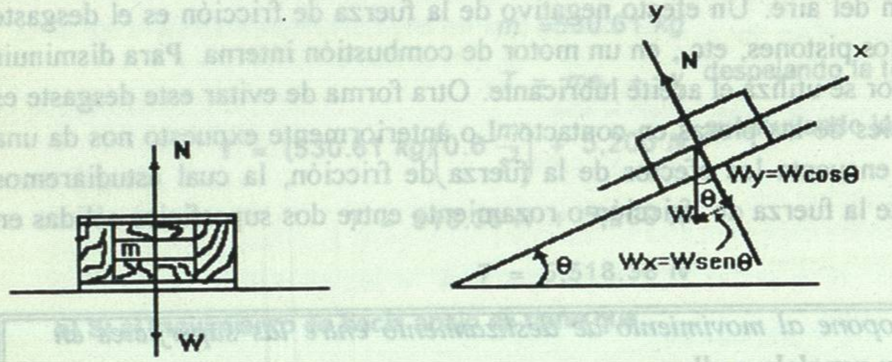


Fig. 8. El plano inclinado ejerce una fuerza normal (N) sobre el cuerpo. En este movimiento se tiene que la fuerza normal, es igual a la componente del peso en el eje "y". Para decribir el movimiento, se coloca el eje "x" paralelo al plano, que corresponde a la dirección del movimiento. El eje "y" se coloca perpendicular al movimiento y ambos ejes se intesectan en el cuerpo.

> *NOTA: Es frecuente decir, que la fuerza normal (N) y el peso (w) de un cuerpo son fuerzas de acción y reacción, sin reparar en el hecho de que ambas actúan sobre un mismo cuerpo, contradiciendo ésto, a lo previsto por la Tercera Ley de Newton, la cual establece que las fuerzas de acción y reacción actúan sobre cuerpos diferentes.*

La fuerza que ejerce el objeto sobre el plano (la carga), es la fuerza que presiona para que estas superficies estén en contacto, y es igual en magnitud a la fuerza normal (N) que ejerce el plano sobre el objeto. Experimentalmente se tiene que si la carga que ejerce el cuerpo aumenta, la fuerza de fricción también aumenta, y viceversa, si la carga del objeto disminuye, la fuerza de fricción también disminuye. De lo anterior se tiene que

$$f \propto (carga) \quad \text{o bien}$$

$$f \propto N$$

en donde se utiliza la normal (N), ya que ésta siempre es numericamente igual a la carga del objeto. Introduciendo una constante de proporcionalidad en la expresión, resulta que

$$f = \mu N$$

siendo μ (my) el coeficiente de fricción, el cual carece de unidades (es adimensional). Este coeficiente es característico de los materiales en contacto. La fuerza de fricción no sólo aparece cuando hay

movimiento, sino que también existe cuando un cuerpo tiende a deslizarse sobre otro. Esta fuerza depende de la naturaleza de las superficies en contacto (rugosidad y tipo de material) y de la carga que las mantiene unidas.

1. COEFICIENTE DE FRICCION ESTATICA (μ_s)

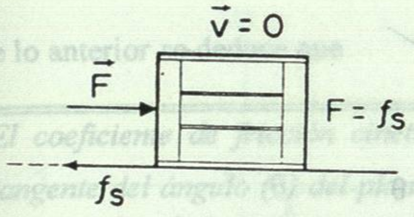


Figura 9. Representación de la fuerza de fricción estática.

Si a un objeto se le aplica una fuerza (F) y éste no se mueve, se debe a la fuerza de fricción estática (f_s) que se opone al movimiento (f_s = F), ver la figura 9. Si se aumenta la fuerza (F) aplicada y el cuerpo no se mueve, es porque también aumenta la fuerza de fricción estática (f_s). El objeto se moverá cuando la fuerza aplicada (F) sea ligeramente mayor que la fuerza máxima de fricción estática (f_s). Esta fuerza máxima de fricción estática viene dada por

$$f_s = \mu_s N$$

en donde m s se conoce como el coeficiente de fricción estática. Como ya se explicó, si al aumentar la fuerza aplicada, el objeto no se mueve, es porque la fuerza de fricción estática se opone. Al aumentar la fuerza aplicada, aumenta la fricción estática, así, hasta que se inicia el movimiento. En nuestro estudio, consideraremos a la fuerza de fricción estática (f_s) como el máximo valor que puede tomar sin que se dé inicio al movimiento.

2. COEFICIENTE DE FRICCION CINETICA (μ_k)

Cuando la fuerza (F) aplicada a un objeto es superior a la fuerza de fricción estática máxima (f_s), el objeto se mueve y entonces la fuerza que se opone al movimiento es llamada la fuerza de fricción cinética (f_k) , ver figura 10.

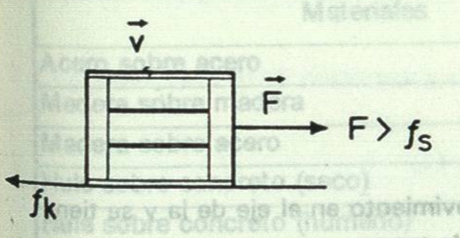


Figura 10. Representación gráfica de la fuerza de fricción cinética.

Experimentalmente se ha demostrado que la fuerza de fricción cinética (f_k) es proporcional a la carga, la cual es igual en magnitud a la fuerza normal (N) ejercida por el plano sobre el objeto que se desliza sobre él, por lo que

$$f_k = \mu_k N$$

en donde μ_k se conoce como el coeficiente de fricción cinética.

A continuación, se va a analizar el deslizamiento de un cuerpo, para apreciar como se calculan experimentalmente los valores de μ_s y μ_k.

Supóngase que se tiene una masa (m) sobre un plano inclinado a un ángulo (θ) con la horizontal, y que la masa se desliza uniformemente sobre el plano, como se muestra en la figura 11.

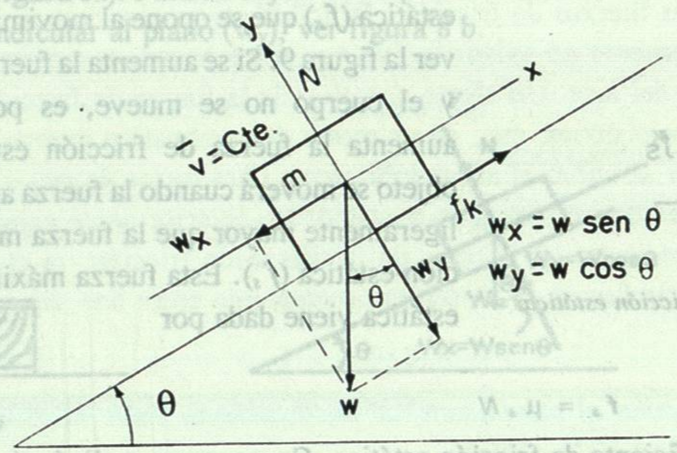


Figura 11. Análisis de las fuerzas que intervienen en el movimiento de una masa (m) que se desliza uniformemente sobre un plano inclinado.

Considerando el eje de la x en la dirección del movimiento y el eje de la y perpendicular al plano, se tiene que

La ecuación del movimiento en el eje de la x es

$w_x - f_k = ma_x$ puesto que la velocidad es constante (a_x 0)

$w_x - f_k = 0$ de donde

$w_x = f_k$ siendo

$w_x = w \, sen \, \theta$ y

$f_k = \mu_k N$ entonces

$w \, sen \, \theta = \mu_k N$ (1)

La ecuación del movimiento en el eje de la y es

$N \quad w_y = ma_y$ como no hay movimiento en el eje de la y se tiene que $a_y = 0$ por lo tanto

$N - w_y = 0$ de donde

$N = w_y$ ahora bien

$w_y = w \cos \theta$

$N = w \cos \theta$ (2)

$w \, sen \, \theta = \mu_k N$ de acuerdo a la ecuación (1).

$w \, sen \, \theta = \mu_k \cos \theta$ sustituyendo la normal (N), en la ecuación (2).

$sen \, \theta = \mu_k \cos \theta$ eliminando w en ambos términos.

$\mu_k = \dfrac{sen \, \theta}{\cos \theta}$ despejando μ_k

$\mu_k = \tan \theta$

De lo anterior se deduce que

> *El coeficiente de fricción cinética (μ_k) se puede calcular experimentalmente mediante la tangente del ángulo (θ) del plano inclinado, para el cual la masa que se desliza sobre él, lo hace a velocidad constante o uniforme.*

Este mismo procedimiento se puede utilizar para determinar el coeficiente de fricción estática (μ_s), solamente que aquí se considerará el valor del ángulo (θ') de inclinación del plano un poco antes de que inicie su movimiento sobre el mismo, al ir variando el ángulo de inclinación. De donde

Al comparar los valores de μ_s y μ_k ,obtenidos experimentalmente, se tiene que en general, el coeficiente de fricción estática (μ_s) es mayor que el coeficiente de fricción cinética (mk). Lo anterior se observa al empujar un objeto para ponerlo en movimiento, ya que la fuerza que se opone a que el objeto comience a moverse es mayor que la fuerza de fricción cuando está en movimiento, es decir

$$f_s > f_k$$

En la siguiente tabla se dan los valores aproximados de μ_s y μ_k para algunas superficies en contacto

TABLA 1

Materiales	μs	μk
Acero sobre acero	0.76	0.42
Madera sobre madera	0.58	0.40
Madera sobre acero	0.50	0.30
Hule sobre concreto (seco)	0.90	0.70
Hule sobre concreto (húmedo)	0.70	0.56
Vidrio sobre vidrio	0.89	0.44

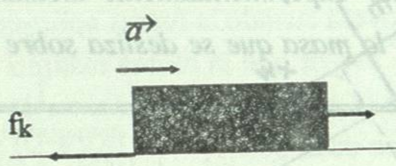
Estos valores son aproximados y dependen del pulido de las superficies, de la lubricación de las mismas y en general de las condiciones climatológicas del medio.

A continuación vamos a resolver algunos ejemplos del movimiento de los cuerpos, en donde se considera el efecto de la fuerza de fricción.

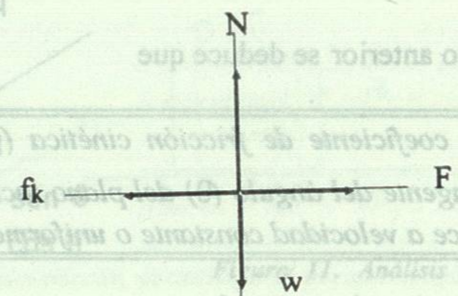
Ejemplo 5.

Una fuerza horizontal de 100 N tira de un bloque de 64 kg colocado sobre el piso. Si el coeficiente de fricción cinética es de 0.12, ¿Cuál es la aceleración del bloque?

$F = 100\ N$ Datos
$m = 64\ kg$
$\mu_k = 0.12$



Describir la situación del problema.



Construir el diagrama de cuerpo libre.

Establecer las ecuaciones del movimiento:
en el eje de la x

$F - f_k = ma_x$ (1)

$f_k = \mu_k N$ como en el eje de la y no se registra movimiento, ya que el objeto se mueve en el eje de la x, resulta que

$N - w = 0$ (2)

$N = w$

$N = mg$

$N = (64\ kg)\left(9.8\ \frac{m}{s^2}\right)$

$N = 727.2\ N$

$a \ \frac{(F - f_k)}{m}$ despejando la aceleración de la ecuación (1).

$a = \frac{(F - \mu_k N)}{m}$ sustituyendo f_k.

$a = \frac{[100\ N - (0.12)(627.2\ N)]}{64\ kg}$ sustituyendo los datos

$a = \frac{[100\ N - 75.26\ N]}{64\ kg}$

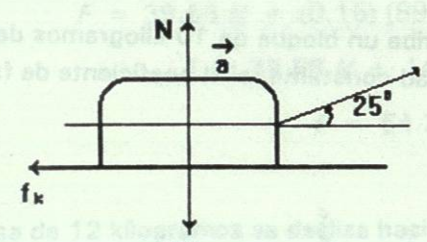
$a = \frac{24.74\ kg\ \frac{m}{s^2}}{64\ kg}$

$a = 0.38\ \frac{m}{s^2}$

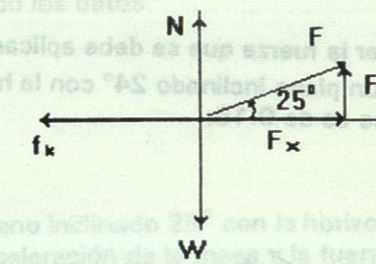
Ejemplo 6.

Sobre un bloque de 40 N se aplica una fuerza de 16 N que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Si el bloque adquiere una aceleración de 1.5 m/s², calcular el coeficiente de fricción cinética.

$w = 40\ N$ Datos
$F = 16\ N$
$\theta = 24°$
$a = 1.5\ \frac{m}{s^2}$



Describir la situación del problema.



Construir el diagrama de cuerpo libre.

Establecer las ecuaciones del movimiento:
en el eje de la x

$F_x - f_k = ma$ (1)

$N + F_y - w = 0$ (2)
como en el eje de la y no hay movimiento ($a_y = 0$).

$F_x = F \cos 25°$ Cálculo de F_x y F_y

$F_y = F \operatorname{sen} 25°$

$F_x = (16\ N)(0.906)$

$F_y = (16\ N)(0.423)$

$F_x = 14.5\ N$

$F_y = 6.77\ N$

$N = w - F_y$ despejando N de la ecuación (2)

$N = 40\ N - 6.77\ N$ sustituyendo datos

$N = 33.23\ N$

$M = 4.08\ kg$ puesto que $m = \frac{w}{g}$

$F_x - \mu_k N = ma$

(3)
A partir de la ecuación (1).

$$\mu_k = \frac{(F_x - ma)}{N}$$ despejando μ_k

$$\mu_k = \frac{\left[14.5\,N - (4.08\,kg)\left(1.5\,\frac{m}{s^2}\right)\right]}{33.23\,N}$$ sustituyendo los datos

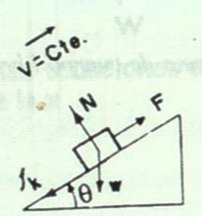
$$\mu_k = \frac{14.5\,N - 6.12\,N}{33.23\,N}$$

$$\mu_k = \frac{8.38\,N}{33.23\,N}$$

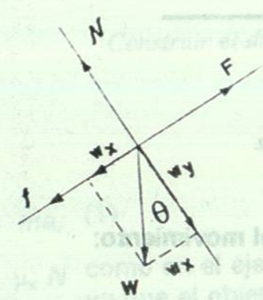
$$\mu_k = 0.25$$

Ejemplo 7.

Calcular la fuerza que se debe aplicar para jalar hacia arriba un bloque de 10 kilogramos de masa sobre un plano inclinado 24° con la horizontal, a velocidad constante, si el coeficiente de fricción cinética es de 0.16.



Describir la situación del problema.



Construir el diagrama de cuerpo libre.

$m = 10\,kg$ Datos
$\theta = 24°$
$a = 0$
$\mu_k = 0.16$

$w_x = w\ sen\ 24°$ Cálculo de las componentes del peso (w)
$w_y = w\cos 24°$

$w_x = mg\ sen\ 24°$
$w_y = mg\ sen\ 24°$

$$w_x = (10\,N)\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(0.407)$$
$$w_y = (10\,N)\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(0.914)$$

$$w_x = 39.88\,N$$
$$W_y = 89.52\,N$$

Establecer las ecuaciones del movimiento:
en el eje de la x

$$F - w_x - f_k = ma$$

$F - w_x - f_k = 0$ ya que $v = cte$ $(a = 0)$( )

$f_k = \mu_k N$ resulta

$f - w_x - \mu_k N = 0$ (1)
como en el eje de la y no hay movimiento ($a_y = 0$), se tiene que

$N - w_y = 0$ (2)

$F - w_y - \mu_k w_y = 0$ sustituyendo N , en la ecuación (1)

$F = w_x + \mu_k w_y$ despejando F.

$F = 39.88\,N + (0.16)(89.52\,N)$ sustituyendo los datos

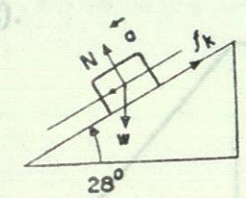
$$F = 39.88\,N + 14.32\,N$$

$$F = 54.20N\sqrt{x}$$

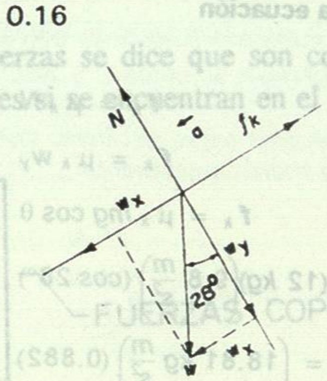
Ejemplo 8.

Una masa de 12 kilogramos se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado 28° con la horizontal. Si el coeficiente de fricción cinética es de 0.16 . Calcular la aceleración de la masa y la fuerza de fricción.

$m = 12\,kg$ Datos
$\theta = 28°$
$\mu_k = 0.16$



Describir la situación del problema.



Construir el diagrama de cuerpo libre.

Las ecuaciones del movimiento son:
en el eje de la x

$w_x - f_k = ma$ (1)

$N - w_y = ma_y$ (2)
como en el eje de la y no hay movimiento ($a_y = 0$).

$$N - w_y = 0$$

$$N = w_y$$

$$w_x = w \operatorname{sen} \theta$$ Las componentes del peso en x y en y.
$$w_y = w \cos \theta$$

$$w_x = mg \operatorname{sen} \theta$$
$$w_y = mg \cos \theta$$

$$mg \operatorname{sen} \theta - \mu_k N = ma$$ tomando la ecuación (1) y sustituyendo f_k y w_x.

$$mg \operatorname{sen} \theta - \mu_k w_y = ma$$ dado que $N = w_y$.

$$mg \operatorname{sen} \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma$$

$$mg (\operatorname{sen} \theta - \mu_k \cos \theta) = ma$$ agrupando.

$$a = g (\operatorname{sen} \theta - \mu_k \cos \theta)$$ eliminando la masa en ambos términos de la igualdad, se tiene que

sustituyendo los datos

$$a = 9.8 \frac{m}{s^2} (\operatorname{sen} 28° - \mu_k \cos 28°)$$

$$a = 9.8 \frac{m}{s^2} [0.469 - (0.16)(0.882)]$$

$$a = 9.8 \frac{m}{s^2} [0.469 - 0.141]$$

$$a = 9.8 \frac{m}{s} [0.328]$$

$$a = 3.21 \frac{m}{s^2}$$

Para calcular f_k se utiliza la ecuación

$$f_k = \mu_k N$$

$$f_k = \mu_k w_y$$

$$f_k = \mu_k mg \cos \theta$$

$$f_k = (0.16)(12\ kg)\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(\cos 28°)$$

$$f_k = \left(18.81\ kg \frac{m}{s^2}\right)(0.882)$$

$$f_k = 16.59\ N$$

E. ESTATICA

En esta última parte de la unidad, estudiaremos la *Estática*, la cual se encuentra comprendida dentro de la Dinámica y *se encarga de analizar el equilibrio de los cuerpos*. El tipo de problema que consideraremos es aquél en el cual la fuerza resultante (F_R) que actúa sobre un cuerpo es nula. Es decir

$$F_R = 0$$

o bien, en el caso de dos dimensiones

$$\sum F_x = 0 \quad y \quad \sum F_y = 0$$

En donde la fuerza resultante (F_R) que actúa sobre un cuerpo, es aquélla que produce el mismo efecto que todas las fuerzas aplicadas sobre él.

Bajo esta condicion ($F_R = 0$), tenemos cualquiera de los casos siguientes:

- El objeto se encuentra en reposo (caso estático).
- Describe un movimiento rectilíneo uniforme (caso dinámico).

Lo anterior se puede sintetizar en la llamada la Primera Condición de Equilibrio:

Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula.

En la configuración de un sistema de fuerzas se dice que son coplanares si todas las fuerzas se encuentran en el mismo plano y no-coplanares si se encuentran en el espacio de tres dimensiones (ver la figura 12).

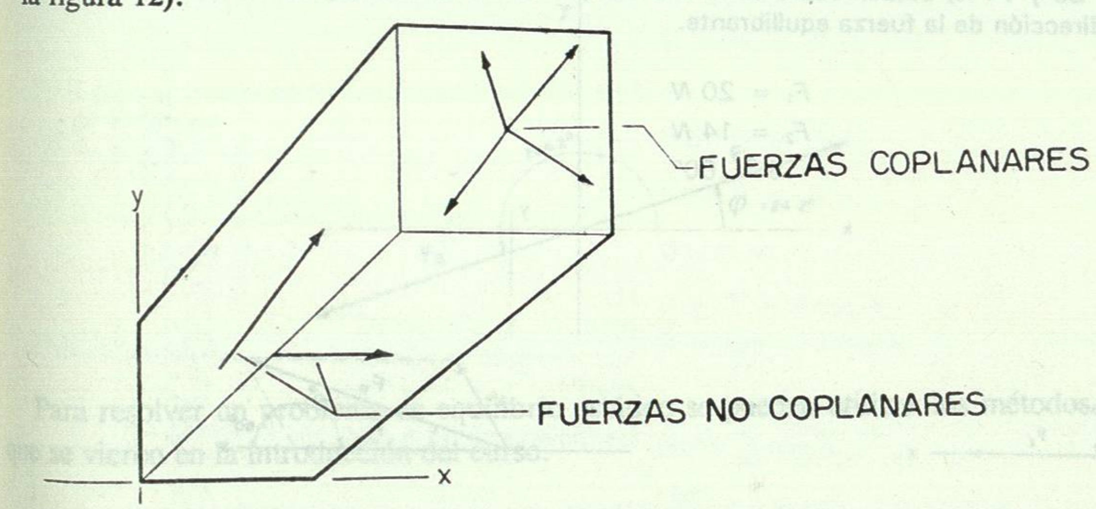


Figura 12. Fuerzas coplanares y no coplanares.

Cuando dos o más fuerzas están actuando sobre un mismo punto reciben el nombre de fuerzas concurrentes (ver la figura 13).

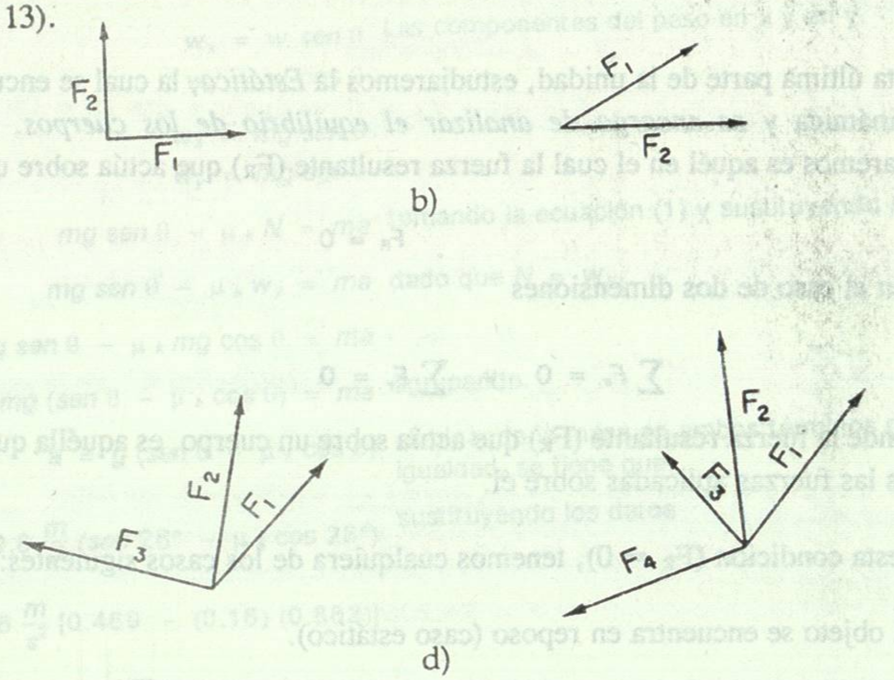


Figura 13. Algunos ejemplos de fuerzas concurrentes.

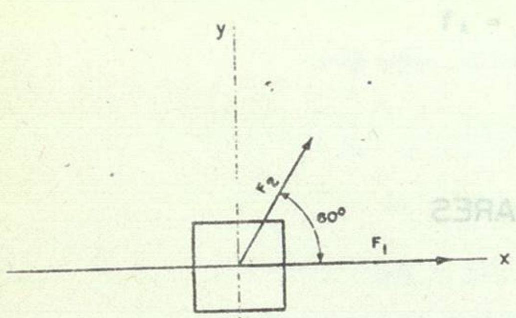
En este punto nos concretaremos al estudio del equilibrio estático de un cuerpo, considerando además que las fuerzas que actúan sobre él son coplanares y concurrentes.

Si sobre un objeto actúan dos o más fuerzas, éstas producen una fuerza resultante. Si queremos que este objeto quede en equilibrio, se aplica una fuerza de igual magnitud, en la misma dirección y en sentido contrario a la resultante. A esta fuerza se le llama la fuerza equilibrante.

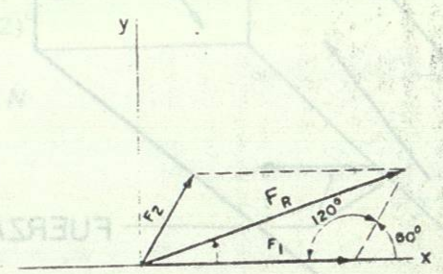
Ejemplo 9.

Dos fuerzas de 20 y 14 N, actúan sobre el mismo cuerpo. Si forman un ángulo de 60°, calcula la magnitud y dirección de la fuerza equilibrante.

$$F_1 = 20\ N$$
$$F_2 = 14\ N$$
$$\theta = 60°$$



Describir la situación del problema.



Construir el diagrama de cuerpo libre.

Primeramente se calcula la magnitud y la dirección de la fuerza resultante. Para esto, se construye el paralelogramo de fuerzas. El ángulo que está enfrente de la fuerza resultante es de 120°, como se muestra en la figura anterior.

De tal forma que su magnitud viene dada por

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos 120°$$

$$F_R^2 = (20\ N)^2 + (14\ N)^2 - 2(20\ N)(14\ N)(-0.500)$$

$$F_R^2 = 400\ N^2 + 196\ N^2 + 280\ n^2$$

$$F_R = \sqrt{876\ N^2}$$

Para calcular su dirección, se utiliza la ley de los senos, en donde

$$\frac{sen\ \phi}{F_2} = \frac{sen\ 120°}{F_R}$$

$$sen\ \phi = \frac{F_2 \cdot sen\ 120°}{F_R} \quad \text{Despejando } sen\ \phi$$

$$sen\ \phi = \frac{(14\ N)(0.866)}{29.59\ N}$$

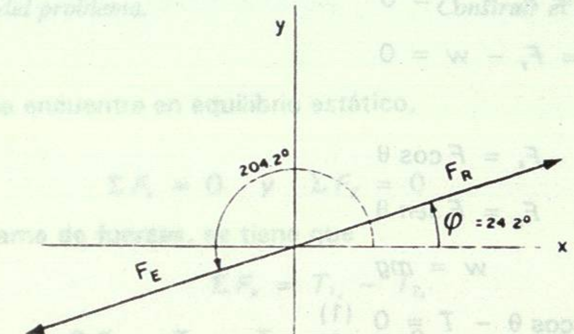
$$sen\ \phi = 0.410$$

$$\phi = sen^{-1}\ (0.410)$$

$$\phi = 24.2°$$

$$F_R = 29.59\ N\ \ a\ \ 24.2°$$

entonces la fuerza equilibrante (F_E) será aquélla que tiene igual magnitud (FE = 29.59 N), pero en sentido contrario, de tal forma que su dirección es de 204.2° , como se muestra en la figura



Para resolver un problema de equilibrio estático se pueden utilizar los métodos gráfico o analítico que se vieron en la introducción del curso.

En cuanto al uso del método gráfico en la solución de problemas, el polígono de fuerzas debe ser cerrado, ya que la resultante de ellas es nula. Este método es aproximado.