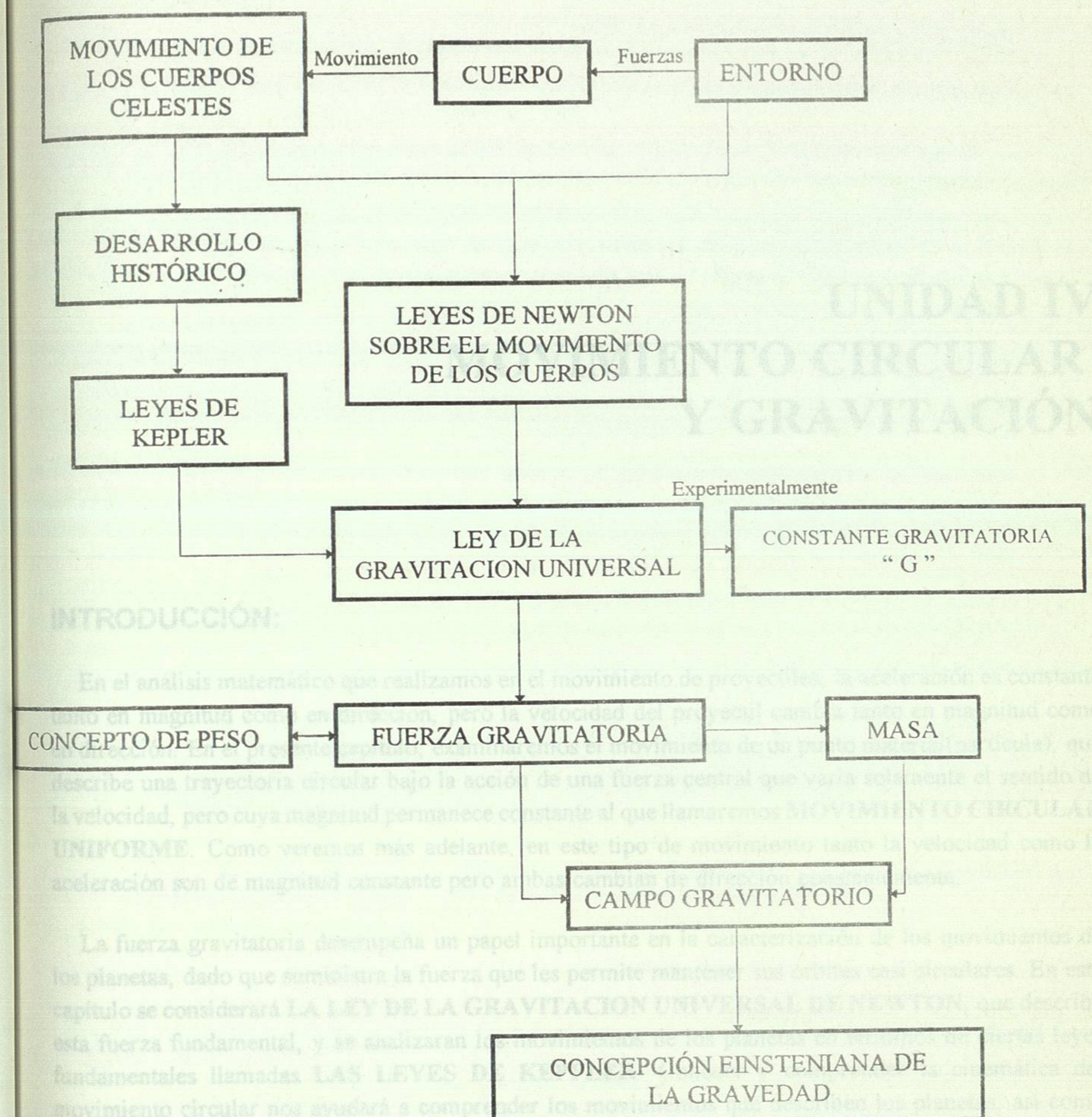
UNIDAD IV
MOVIMIENTO CIRCULAR Y GRAVITACIÓN

OBJETIVOS :

- Entender el concepto de la aceleración centrípeta de objetos en movimiento circular uniforme y aplicar las leyes de Newton a este tipo de movimiento.
- Describir el movimento circular uniformeatravés del cálculo de las magnitudes cinemáticas angulares que caracterizan a este movimiento.
- Describir el movimiento de los planetas aplicando las leyes de Kepler.
- Aplicar la Ley de la Gravitación Universal, destacando a la proporcionalidad entre la fuerza y el producto de las masas de los cuerpos; así como a la proporcionalidad entre la fuerza con el inverso del cuadrado de la distancia que separa a los cuerpos.
- Describir el campo gravitatorio como entre material a través del cual aparecen las fuerzas de origen gravitacional caracterizándolo dinámicamente mediante la intensidad. (Fg/m).

METAS :

- Describir el movimiento circular uniforme.
- Resolver problemas del movimiento circular uniforme.
- Analizar las fuerzas que intervienen en el movimiento circular.
- Resolver problemas en donde involucren fuerzas que intervienen en el movimiento circular.
- Resolver problemas del movimiento circular uniformemente acelerado.
- Explicar las leyes de Kepler.
- Explicar la ley de Gravitación Universal.
- Explicar las características del campo gravitacional.
- Explicar el concepto de gravedad de Einstein.



UNIDAD IV
MOVIMIENTO CIRCULAR Y GRAVITACIÓN

INTRODUCCIÓN:

En el análisis matemático que realizamos en el movimiento de proyectiles, la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección, pero la velocidad del proyectil cambia tanto en magnitud como en dirección. En el presente capítulo, examinaremos el movimiento de un punto material(partícula), que describe una trayectoria circular bajo la acción de una fuerza central que varía solamente el sentido de la velocidad, pero cuya magnitud permanece constante al que llamaremos **MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME**. Como veremos más adelante, en este tipo de movimiento tanto la velocidad como la aceleración son de magnitud constante pero ambas cambian de dirección constantemente.

La fuerza gravitatoria desempeña un papel importante en la caracterización de los movimientos de los planetas, dado que suministra la fuerza que les permite mantener sus órbitas casi circulares. En este capítulo se considerará **LA LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON**, que describe esta fuerza fundamental, y se analizaran los movimientos de los planetas en términos de ciertas leyes fundamentales llamadas **LAS LEYES DE KEPPLER**. Conocer y comprender la cinemática del movimiento circular nos ayudará a comprender los movimientos que describen los planetas, así como de los satélites de la tierra, de los cuales hay uno natural (la luna) y muchos artificiales.

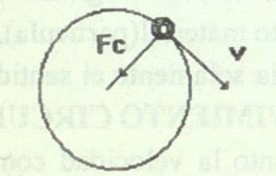
MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME :

El movimiento circular es también un movimiento en dos dimensiones y por lo tanto puede ser descrito en función de sus componentes rectangulares (como se hizo en el análisis del movimiento de proyectiles), sin embargo en este caso es más conveniente describir el movimiento circular en términos de las llamadas magnitudes angulares de las que hablaremos más adelante en el desarrollo de este capítulo.

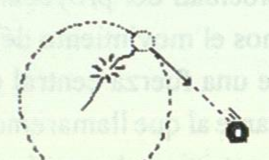
Una partícula que describe un movimiento circular, tendrá en cada punto sde su trayectoria, una velocidad lineal tangencial a la circunferencia descrita, llamada VELOCIDAD TANGENCIAL. Por el carácter vectorial de dicha velocidad, esta clase de movimiento será acelerado (M.A.), ya que al menos la dirección de dicha velocidad estará cambiando, el caso más general del movimiento circular será cuando el cuerpo está bajo la acción de una fuerza que cambia tanto la magnitud como la dirección de la velocidad tangencial de dicho cuerpo.

"Cuando un cuerpo describe una trayectoria circular y su velocidad tangencial cambia solamente en dirección, se dice que describe un MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

A continuación, estudiaremos el movimiento circular uniforme de un objeto, el cual se mueve en un plano debido a la aplicación de una fuerza perpendicular a su movimiento, describiendo una trayectoria circular, cuya velocidad tangencial siempre tiene la misma magnitud, y una dirección que cambia continuamente. La fuerza aplicada sobre el objeto, está dirigida hacia el centro del círculo, a dicha fuerza se le conoce como la fuerza centrípeta (F_c). Esta fuerza debe ser perpendicular a la velocidad tangencial, ya que de lo contrario, haría que ésta cambiará su magnitud, la cual es constante. Como se muestra en la figura 1a.



a] Descripción gráfica



b] Trayectoria que describe el objeto al eliminar la fuerza centrípeta [Fc].

Figura 6. Movimiento Circular Uniforme.

Figura No. 1

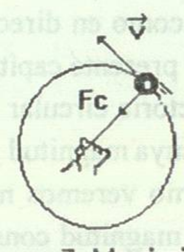


Figura 7. Movimiento circular uniforme que describe una piedra atada al extremo de una cuerda que gira en un plano horizontal.

Figura No. 2

Si se deja de aplicar la fuerza centrípeta (F_c), en un instante determinado, el objeto saldría disparado en línea recta (ver figura 1 b), como lo predice la Primera Ley de Newton del movimiento. Dicha ley establece que un cuerpo se moverá en línea recta si sobre él no actúa ninguna fuerza resultante.

Consideremos una piedra atada al extremo de una cuerda, la cual se hace girar en un plano horizontal (ver la figura 2), en donde la cuerda ejerce una fuerza sobre la piedra al jalarla hacia el centro, llamada fuerza centrípeta (F_c).

Si soltamos el objeto, la fuerza centrípeta desaparece y la piedra sale disparada en línea recta, en dirección tangencial a su trayectoria circular. Otro ejemplo en el cual se puede observar la fuerza centrípeta es el del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, en donde la fuerza de atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre la Luna, es la fuerza centrípeta que mantiene a la Luna girando alrededor de la Tierra. Un ejemplo más es el de un autobús que toma una curva en la carretera; si dicho vehículo no se sale de la curva, es debido a que existe una fuerza que jala hacia el centro. Esta fuerza centrípeta es la fuerza de fricción generada entre las llantas y la carretera (ver figura 3).

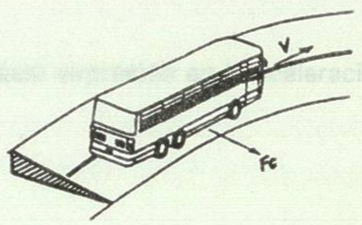
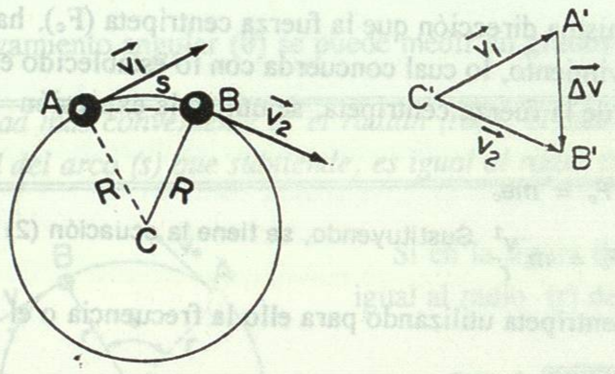


Figura No. 3. La fuerza de fricción es la fuerza centrípeta, la cual evita que el vehículo derrape.

A partir de la Segunda Ley de Newton del movimiento se deduce que al aplicar una fuerza sobre un cuerpo, ésta le produce una aceleración en la misma dirección en que se aplica dicha fuerza. De lo anterior, se tiene que en el movimiento circular uniforme hay una aceleración hacia el centro, conocida como la aceleración centrípeta (a_c), que tiene la misma dirección que la fuerza centrípeta (F_c). Para determinar la magnitud de esta aceleración, se considerará como referencia la figura 9.



$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \Delta\bar{v}$$

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \Delta\bar{v}$$

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

Figura 4. Análisis gráfico del movimiento circular uniforme, para la obtención de la aceleración centripeta (a_c)

.A partir de los triángulos semejantes ABC y A'B'C', se tiene que

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\textit{longitud de la cuerda AB}}{r}$$

donde Δv es el cambio en la velocidad y v es la magnitud de la velocidad tangencial. Si se toma un intervalo de tiempo Δt suficientemente pequeño como para que la cuerda AB sea igual al arco AB, dentro de cierto margen de error pequeño, entonces

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\text{longitud de l arco } AB}{r}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{r}$$ En donde s = longitud del arco AB. Como transcurrió un tiempo (Δt) se tiene que

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\,\Delta t}{r}$$

$$s = v\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$ Reagrupando variables.

Como se observó al estudiar el concepto de aceleración, ésta representa la razón de un cambio de la velocidad en la unidad de tiempo, por lo cual, el lado izquierdo de la expresión anterior ($\frac{\Delta v}{\Delta t}$) corresponde a una aceleración, la cual debe tener una dirección hacia el centro del círculo, para que se conserve constante la magnitud de la velocidad tangencial. A esta aceleración se le conoce como la aceleración centrípeta y se representa como a_c, es decir

$$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

La aceleración centrípeta (α_c) tiene la misma dirección que la fuerza centrípeta (F_c), hacia el centro del círculo que describe el objeto en su movimiento, lo cual concuerda con lo establecido en la Segunda Ley de Newton. Para calcular la magnitud de la fuerza centrípeta, se utiliza la expresión

$$F_c = m a_c$$

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$ Sustituyendo, se tiene la ecuación (2)

En ocasiones se calcula la aceleración centrípeta utilizando para ello la frecuencia o el período.

El período (T) del movimiento circular de un cuerpo, se define como el tiempo en dar una vuelta completa (una revolución). Por otro lado, se define la frecuencia (f) como el número de revoluciones por unidad de tiempo.

$$T = \frac{\textit{tiempo transcurrido}}{\textit{1 revolución}}$$

$$f = \frac{\textit{Número de revoluciones}}{\textit{unidad de tiempo}}$$

de donde se tiene que son cantidades recíprocas, es decir

$$T = \frac{1}{f} \quad ó \quad f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

En una vuelta completa se recorre una distancia igual a la longitud de la circunferencia $2\pi r$ ($s = 2\pi r$), en un tiempo equivalente al período (T), de donde resulta que

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$ Sustituyendo esta expresión en la aceleración centrípeta.

$$a_c = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

$$a_c = \frac{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{\frac{r}{1}}$$

$$a_c = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r}$$

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

En el movimiento circular es conveniente utilizar el desplazamiento angular (θ), para determinar la posición del objeto. Observemos la figura 10, en donde se tiene un disco que gira del punto A al punto B, describiendo un movimiento circular uniforme.

El desplazamiento angular (θ) se puede medir en grados, revoluciones o en radianes.

La unidad más conveniente es el radián (rad), el cual se define como el ángulo en donde la longitud del arco (s) que subtiende, es igual al radio (r) del círculo.

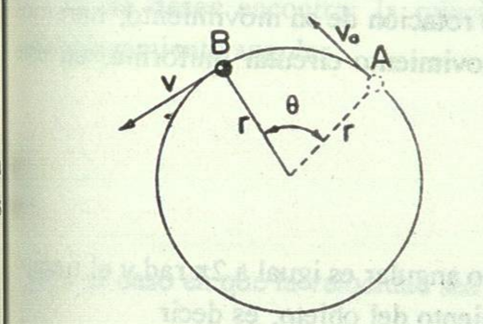


Fig. 5. ***Representación gráfica del desplazamiento angular en el movimiento circular uniforme.***

Si en la figura de lado izquierdo, la longitud del arco (s) es igual al radio (r) del círculo, es decir

$$s = r$$ entonces

$$\theta = 1 \textit{ radián} = 1 \textit{ rad}$$

$$\theta\,(rad) = \frac{\textit{longitud de l arco subtendido}}{\textit{radio}}$$ Por definición

$$\theta\ (rad) = \frac{s}{r}\quad (4)$$

Esta expresión representa el desplazamiento angular (θ) en radianes, donde s y r tienen unidades de longitud, por lo que el radián es una unidad angular adimensional que no tiene representación física sólo geométrica.

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$ Si se considera una revolución, la longitud del arco $s = 2\pi r$, por lo tanto

$$\theta = 2\pi\ rad$$

$$1\ rev = 2\pi\ rad$$

$$1\ rev = 360°$$

$$1\ rev = 2\pi\ rad$$

$$2\pi\ rad = 360°$$ Igualando expresiones.

$$1\ rad = \frac{360°}{2\pi}$$ Despejando 1 radián.

$$1\ rad = 57.3°$$ Esta expresión representa la equivalencia entre grados y radianes.

Al igual que en el movimiento lineal, en el movimiento circular se define el concepto de velocidad.

La velocidad angular media ($\overline{\omega}$) se define como el cociente entre el desplazamiento angular de un cuerpo y el tiempo que tarda en efectuar el recorrido.

$$velocidad\ angular\ media = \frac{desplazamiento\ angular}{tiempo\ de\ ldesplazamiento}$$

$$\overline{\omega} = \frac{\theta}{t}$$

la magnitud de la velocidad angular media es constante en el movimiento circular uniforme. Un objeto tiene una velocidad angular constante si describe ángulos iguales en intervalos de tiempo iguales sucesivos. Las unidades de la velocidad angular que vamos a utilizar son las de rad/s. En ocasiones el movimiento angular de un objeto se expresa en función de la frecuencia, dada en rev/s. Para determinar la relación entre la velocidad angular del objeto y la frecuencia de rotación de su movimiento, haremos el siguiente análisis: consideraremos un objeto que realiza un movimiento circular uniforme, en este caso

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

sabemos que si el objeto da una vuelta completa, su desplazamiento angular es igual a 2π rad y el tiempo que tarda en efectuar ese recorrido es igual al período del movimiento del objeto, es decir

$$\theta = 2\pi\ rad$$
$$t = T$$

por lo cual, la velocidad angular del objeto estará dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ O también.

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T}$$ Pero, el recíproco del período es igual a la frecuencia, por lo cual

$$\omega = 2\pi f$$

Ejemplo 1.

Un objeto gira a razón de 300 rpm. Determinar su rapidez en rad/s.

$$f = 300\ \frac{rev}{min}\left(\frac{1\ min}{60\ s}\right)$$ Dado que 1 rev = 2π rad

Primero se debe tranformar la frecuencia a $\frac{rev}{s}$

$$f = 5\ \frac{rev}{s}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi(5)\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = 10\pi\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = 31.4\ \frac{rad}{s}$$

Al efectuar el análisis del movimiento circular se observa que existe una relación entre éste y el movimiento lineal. Por ejemplo, a partir de la ecuación (4), se tiene que

$$\theta = \frac{s}{r}\quad (4)$$

$$s = r\theta$$ Despejando s

es decir, el desplazamiento lineal (s), el cual representa a la longitud del arco subtendido, es igual a r veces el ángulo girado (θ), en donde θ está dado en radianes.

Si se desea encontrar la relación entre la velocidad tangencial y la angular, se considerará el desplazamiento angular

$$\theta = \frac{s}{r}\quad (4)$$

$$v = \frac{s}{t}$$

para el caso en que la velocidad sea constante (esta misma expresión es válida para la velocidad media).

Despejando s de la ecuación (4) resulta que

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{\theta\, r}{t}$$ Sustituyendo s en v.

$$v = \left(\frac{\theta}{t}\right) r$$ Agrupando y como:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$ Resulta que

$$v = \omega\, r \quad (6)$$

$$v = r\,\omega$$

en donde se observa que la velocidad tangencial (v) es igual a r veces la velocidad angular (ω). Si se sustituye esta expresión en la ecuación (2), resulta que

$$F_c = m\frac{v^2}{r} \quad (2)$$

$$F_c = m\frac{(r\omega)^2}{r}$$

$$F_c = m\frac{r^2\,\omega^2}{r}$$

$$F_c = m\,r\,\omega^2 \quad (7)$$

la cual representa la fuerza centrípeta, en función de la masa, el radio y la velocidad angular. Comparando esta expresión con la correspondiente a la Segunda Ley de Newton del movimiento, resulta que

$$a_c = r\,\omega$$

El movimiento circular uniforme se origina al aplicar una fuerza constante sobre una masa, que gira en torno a un eje que pasa por el centro de la circunferencia que describe, haciendo que cambie la dirección de la velocidad, y que permanezca constante su magnitud. Dicha fuerza constante se conoce como la fuerza centrípeta y es perpendicular a la trayectoria del objeto, en dirección radial hacia el centro.

Ejemplo 2.

Un disco de 20 centímetros de radio, gira uniformemente a razón de 45 revoluciones por minuto (rpm). Para un tiempo de 2.4 minutos, calcular:

a) Su velocidad angular en radianes por segundo.

b) Su desplazamiento angular.

c) La aceleración centrípeta sobre un punto colocado en el borde del disco.

$$r = 20\ cm = 0.2\ m$$ Datos

$$f = 45\ rpm$$

$$t = 2.4\ \text{min} = 144\ s$$

a) Para calcular la velocidad angular, se transforma la frecuencia a $\frac{rev}{s}$

$$f = 45\ \frac{rev}{\text{min}}\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ s}\right)$$

$$f = \frac{3}{4}\ \frac{rev}{s}$$

$$\omega = 2\,\pi\, f$$

$$\omega = 2\,\pi\left(\frac{3}{4}\right)\frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{3}{2}\,\pi\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = 4.71\ \frac{rad}{s}$$

b) Para obtener el desplazamiento angular se emplea

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\theta = \omega t$$ Despejando θ.

$$\theta = \left(4.71\ \frac{rad}{s}\right)(144\ s)$$ Sustituyendo datos.

$$\theta = 678.24\ rad$$

c) La aceleración centrípeta se calcula con la ecuación

$$a_c = r\,\omega^2$$

$$a_c = (0.2\ m)\left(4.71\ \frac{rad}{s}\right)^2$$ Sustituyendo datos.

$$a_c = (0.2\ m)\left(22.18\ \frac{rad^2}{s^2}\right)$$

$$a_c = 4.43\ \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 3.

Una masa de 0.4 kilogramos atada al extremo de una cuerda de 0.8 metros de largo se hace girar horizontalmente y completa una vuelta en 0.42 segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad tangencial de la masa?

b) ¿Cuál es la fuerza centrípeta que actúa sobre la masa?

$$m = 0.4\ kg$$ Datos

$$r = 0.8\ m$$

$$T = 0.42\ s$$

$$\theta = 1\ rev = 2\,\pi\ rad$$

a) Para calcular la velocidad tangencial, primero se calcula la velocidad angular con la fórmula

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\omega = \frac{2\,\pi\ rad}{0.42\ s}$$ Sustituyendo datos.