$$\omega = \frac{2(3.14)\ rad}{0.42\ s}$$

$$\omega = 14.95\ \frac{rad}{s}$$

$$v = \omega\, r$$

$$v = (0.8\ m)\ 14.95\ \frac{rad}{s}$$ Sustituyendo datos en la velocidad tangencial.

$$v = 11.96\ \frac{m}{s}$$

b) La fuerza centrípeta se obtiene a partir de

$$F_c = m\,\frac{v^2}{r}$$

$$F_c = (0.4\ kg)\,\frac{\left(11.96\ \frac{m}{s}\right)^2}{0.8\ m}$$ Sustituyendo datos.

$$f_c = (0.4\ kg)\,\frac{\left(143.04\ \frac{m^2}{s^2}\right)}{0.8\ m}$$

$$F_c = \frac{47.216\ kg\ \frac{m}{s^2}}{0.8}$$

$$f_c = 71.52\ N$$

MOVIMIENTO CIRCULAR EN UN PLANO VERTICAL

El movimiento circular de un objeto en un plano vertical, se ve afectado considerablemente por su peso (w), el cual siempre se encuentra dirigido hacia abajo, como se ilustra en el siguiente ejemplo, en el que se analizarán solamente el punto más alto y el más bajo de su trayectoria circular. En su solución consideraremos que el objeto no se mueve libremente, ya que está confinado a describir una trayectoria circular, utilizando para ello una cuerda o algo similar. La(s) ecuación(es) del movimiento se establece(n) tomando encuenta la dirección de las fuerzas que intervienen. La elección del signo de cada fuerza es arbitraria, en nuestro ejemplo, tomamos como positiva la dirección de la fuerza centrípeta.

Ejemplo 4.

Un objeto de 1.2 kilogramos atado al extremo de una cuerda de 0.8 metros de largo, se hace girar describiendo una circunferencia vertical, a razón de 60 revoluciones por minuto (rpm). Calcular la tensión de la cuerda en:

a) El punto más alto de su trayectoria.

b) El punto más bajo de su trayectoria.

$m = 1.2\ kg$

$r = 0.8\ m$ Datos

$f = 60\ rpm$

Para calcular la velocidad angular primero se transforma la frecuencia a $\frac{rev}{s}$

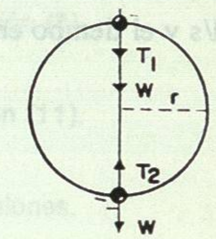
$$f = 60\ \frac{rev}{min}\left(\frac{1\ min}{60\ s}\right) \quad f = 1\ \frac{rev}{s}$$

$$\omega = 2\,\pi\, f$$

$$\omega = 2\,\pi\,(1)\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = 6.28\ \frac{rad}{s}$$

a) En el punto más alto se observa que la fuerza centrípeta es igual a la suma de la tensión de la cuerda más el peso, es decir



$$F_c = T_1 + w$$

$$F_c - w = T_1$$

$$T_1 = F_c - w$$ en donde

$$F_c = m\, r\, \omega^2$$

$$w = m\, g$$ por lo tanto

$$T_1 = m\, r\, \omega^2 - m\, g$$

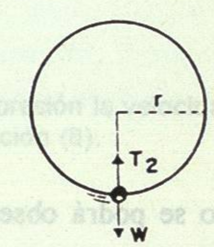
$$T_1 = (1.2\ kg)(0.8\ m)(6.28\ rad/s)^2 - (1.2\ kg)(9.8\ m/s^2)$$ Sustituyendo datos.

$$T_1 = (1.2\ kg)(0.8\ m)(39.44\ rad^2/s^2) - 11.76\ N$$

$$T_1 = 37.86\ N - 11.76\ N$$

$$T_1 = 26.1\ N$$

b) La fuerza centrípeta en el punto más bajo de la trayectoria equivale a la diferencia entre la tensión de la cuerda y el peso de la masa, debido a que la tensión T_2 está en la dirección hacia el centro y el peso en sentido contrario. De tal forma que



$$F_c = T_2 - w$$

$$T_2 = F_c + w$$

$$T_2 = m\, r\, \omega^2 + m\, g$$

$$T_2 = (1.2\ kg)(0.8\ m)(6.28\ rad/s)^2 + (1.2\ kg)(9.8\ m/s^2)$$ Sustituyendo datos.

$$T_2 = (1.2\ kg)(0.8\ m)(39.44\ rad^2/s^2) + 11.76\ N$$

$$T_2 = 37.86\ N + 11.76\ N$$

$$T_2 = 49.62\ N$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO

Cuando un objeto describe un movimiento circular, en ocasiones su velocidad angular cambia.

Se dice que un cuerpo tiene una aceleración angular constante cuando el cambio de su velocidad angular, en la unidad de tiempo, es siempre el mismo.

$$\textit{aceleración angular constante } (\alpha) = \frac{\textit{cambio en la velocidad angular}}{\textit{tiempo}}$$

$\alpha = \dfrac{\omega - \omega_o}{t}$ Donde ω_o representa la velocidad angular inicial. ω representa la velocidad angular final t representa el tiempo que transcurre en el cambio de la velocidad angular

$\alpha t = \omega - \omega_o$ Despejando ω.

$\omega_o + \alpha t = \omega$

$\omega = \omega_o + \alpha t$ (8)

Las unidades de la aceleración angular serán los rad/s^2, cuando las velocidades angulares sean dadas en rad/s y el tiempo en segundos.

$v = r\omega$ De acuerdo a la ecuación (6).

$\omega = \dfrac{v}{r}$ Donde v_o representa la velocidad tangencial inicial y v representa la velocidad tangencial final.

$\omega_o = \dfrac{v_o}{r}$

$\alpha = \dfrac{\omega - \omega_o}{t}$ Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la aceleración angular.

$$\alpha = \frac{\frac{v}{r} - \frac{v_o}{r}}{t}$$

$$\alpha = \frac{\frac{v - v_o}{r}}{t}$$

$\alpha = \dfrac{v - v_o}{rt}$ Simplificando.

$$r\alpha = \frac{v - v_o}{t}$$

Como se podrá observar, en el presente análisis se ha considerado solamente la magnitud de la velocidad tangencial, dada por $v = r\omega$, por lo cual, la razón $\dfrac{(v - v_o)}{t}$ repesenta una aceleración, debida al cambio en la magnitud de la velocidad. A dicha aceleración se le conoce como aceleración tangencial (a_t), es decir

$$a_t = \frac{v - v_o}{t}$$

$$r\alpha = a_T$$

$a_T = r\alpha$ (9) Es decir la aceleración tangencial del objeto es igual a r veces su aceleración angular.

Como ya lo hemos visto, para todo movimiento uniformemente acelerado, su velocidad media es igual al promedio de sus velocidades inicial y final, en particular, para el movimiento circular uniformemente acelerado, se tiene que

$\bar{\omega} = \dfrac{\omega + \omega_o}{2}$ (10) En esta expresión, $\bar{\omega}$ representa la velocidad angular media.

$\bar{\omega} = \dfrac{\theta}{t}$ En general, la velocidad angular media está dada por esta ecuación:

$\theta = \bar{\omega}\, t$ Despejando θ.

$\theta = \left(\dfrac{\omega + \omega_o}{2}\right) t$ (11) Sustituyendo $\bar{\omega}$ de la ecuación (10).

$t = \dfrac{\omega - \omega_o}{\alpha}$ Si se despeja t de la ecuación (8).

$t = \dfrac{2\theta}{\omega + \omega_o}$ Despejando t de la ecuación (11).

$\dfrac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \dfrac{2\theta}{\omega + \omega_o}$ Igualando estas dos expresiones.

$(\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) = 2\alpha\theta$ Reordenando términos.

$\omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\theta$ Efectuando el producto

$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$ (12) Dando como resultado

$\theta = \left(\dfrac{\omega + \omega_o}{2}\right) t$ (11) Si de la ecuación (11) se despeja ω

$$2\theta = (\omega + \omega_o)\, t$$

$$\frac{2\theta}{t} = \omega + \omega_o$$

$\dfrac{2\theta}{t} - \omega_o = \omega$ Sustituyendo en esta expresión la velocidad angular final dada por la ecuación (8).

$$\frac{2\theta}{t} - \omega_o = \omega_o + \alpha t$$

$\dfrac{2\theta t}{t} - \omega_o t = \omega_o t + \alpha t^2$ Multiplicando por t ambos lados de la ecuación.

$$2\theta - \omega_o t = \omega_o t + \alpha t^2$$

$$2\theta = 2\omega_o t + \alpha t^2$$

$\dfrac{2\theta}{2} = \dfrac{2\omega_o t}{2} + \dfrac{\alpha t^2}{2}$ Para cancelar el dos, se dividen ambos lados de la ecuación entre dos

$\theta = \omega_o t - \dfrac{\alpha t^2}{2}$ (13)

En resumen, un objeto describe un movimiento circular uniformemente acelerado, si tiene siempre el mismo cambio en su velocidad angular en la unidad de tiempo, es decir, si su aceleración angular es constante.

Ecuaciones del movimiento angular uniformemente acelerado

$$\omega = \omega_o + \alpha t \quad (8)$$

$$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_o}{2}\right) t \quad (11)$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \quad (12)$$

$$\theta = \omega_o^2 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (13)$$

Como se podrá observar, estas ecuaciones son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Para utilizarlas se requieren tres datos, ya que cada una de ellas consta de cuatro variables. En este sistema de ecuaciones aparecen involucradas cinco variables: θ, ω, ω_o, t y α.

Ejemplo 5.

Un mezclador que gira a 60 revoluciones por minuto (rpm) aumenta su frecuencia a 180 revoluciones por minuto (rpm) en 12 segundos. Suponiendo que su aceleración es constante, calcular,

a) Su aceleración angular.
b) El desplazamiento angular.

$$f_o = 60\ rpm$$
$$\omega_o = 6.28\ \frac{rad}{s} \quad \text{Datos}$$
$$f_o = 180\ rpm$$
$$\omega = 18.64\ \frac{rad}{s}$$
$$t = 12\ s$$

a) Para calcular la aceleración angular se puede utilizar la ecuación (8)

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} \quad \text{Despejando la aceleración angular } (\alpha)$$

$$\alpha = \frac{18.84\ \frac{rad}{s} - 6.28\ \frac{rad}{s}}{12\ s} \quad \text{Sustituyendo datos.}$$

$$\alpha = \frac{12.56\ \frac{rad}{s}}{12\ s}$$

$$\alpha = 1.04\ \frac{rad}{s^2}$$

b) El ángulo girado se calcula mediante la ecuación

$$\theta = \frac{(\omega + \omega_o)}{2} t$$

$$\theta = \frac{\left(6.28\ \frac{rad}{s} + 18.84\ \frac{rad}{s}\right)}{2}(12\ s) \quad \text{Sustituyendo datos.}$$

$$\theta = \frac{301.44\ rad}{2}$$

$$\theta = 150.72\ rad$$

LEYES DE KEPLER

En la antigüedad, nuestros antepasados consideraban que la Tierra era el centro del Universo, la cual permanecía estática y las estrellas se encontraban sobre una esfera de cristal, que giraba alrededor de la Tierra. Los planetas estaban colocados en esferas internas y describían movimientos más complicados. A esta propuesta se le conoce como la Teoría Geocéntrica del Universo y fue concebida por Aristóteles (384-322 a.C.) y perfeccionada por Ptolomeo (s. II d. C.). En el siglo XV, Copérnico (1473-1543) descubrió que el movimiento de los planetas se describía de una manera más simple, si se consideraba que éstos giraban en torno al Sol y en órbitas circulares, a esta propuesta se le conoce como la Teoría Heliocéntrica del Universo. Estas dos teorías, la Geocéntrica (la Tierra como centro del Universo) y la Heliocéntrica (el Sol como centro del Universo) fueron muy debatidas en el siglo XVI desde una perspectiva filosófica, con gran acentuación religiosa, basándose en las Sagradas Escrituras, en donde se consideraba al hombre como la coronación de la creación y a la Tierra el centro del Universo.

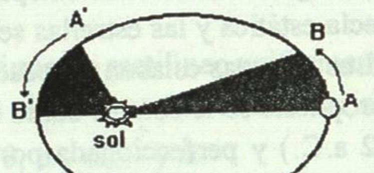
Por su parte, el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), en lugar de participar en esta discusión especulativa, se dedicó a observar el movimiento de los planetas y de las estrellas, registrando sus trayectorias y posiciones exactas durante más de 20 años. Para lograr una mayor precisión en sus observaciones, mejoró el equipo de astronomía ya existente, obteniendo una gran exactitud en sus registros, los cuales todavía se utilizan en la actualidad. Es decir, Brahe prefirió dedicar esfuerzos a la observación de hechos y a efectuar mediciones cuidadosas en lugar de participar en la especulación filosófica. Tycho Brahe cedió todos sus registros al alemán Johannes Kepler (1571-1630). Kepler por su parte, estudió y analizó detenidamente estos registros de los planetas, tratando de ajustarlos en órbitas circulares perfectas, lo cual le fue imposible conseguir. Después de abandonar esta idea, de que los planetas se mueven en órbitas circulares, encontró que en realidad describen órbitas elípticas. Llegó a esta conclusión porque los registros se ajustaban mejor a las orbitas elípticas que a las circulares y sólo se apreciaba la diferencia entre ellas, gracias a la precisión en las observaciones de Tycho Brahe (figura 1). De lo anterior podemos enunciar lo que se conoce como la Primera Ley de Kepler:

Fig. 6. Trayectoria de un planeta en torno al Sol.

Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos.

Es decir, todos los planetas se mueven describiendo órbitas elípticas con un foco en común, el Sol. Los planetas conocidos hasta entonces eran: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Más tarde, cuando se descubrieron Urano, Neptuno y Plutón, se encontró que también describían órbitas con estas características. Aparte de que la trayectoria que describían los planetas era elíptica, Kepler encontró que al estar más cerca del Sol, un planeta aumentaba su rapidez y al alejarse de él, la disminuía. Esto le indicó que el movimiento de los planetas no era uniforme, ya que variaba según su distancia al Sol. Después de analizar estas observaciones hechas por Tycho Brahe, Kepler llegó a establecer su Segunda Ley:

Al moverse un planeta en su órbita, la línea que une al planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



En la figura 7, se aprecia gráficamente este enunciado. En ella el planeta tarda el mismo tiempo en ir de A a B que en ir de A' a B', siendo iguales las áreas que barre la línea que une al planeta con el Sol. Una conclusión de esta Segunda Ley es que el planeta se mueve a mayor velocidad al estar más cerca del Sol (al ir de A' a B') que al estar más alejado de él (al ir de A a B).

Figura 7. L arecta trazada del planeta al Sol, barre áreas en tiempos iguales. El tiempo en ir de A a B es el mismo de A' a B'

En los años siguientes, Kepler buscó alguna relación entre los tamaños de las órbitas de los planetas y sus periodos (tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta alrededor del Sol). A partir de los datos de Brahe, encontró lo que se conoce como La Tercera Ley de Kepler:

Los cuadrados de los periodos (T) de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de su distancia promedio (r) al Sol.

$$T^2 = k\,r^3$$

$$k = \frac{T^2}{r^3}$$

en donde esta constante k es la misma para todos los planetas, y tiene un valor de $300.46 \times 10^{-21}\ s^2/m^3$. Kepler encontró que la razón de T^2/r^3 era siempre la misma, para todos los planetas.

Realmente las órbitas planetarias son casi circulares, y no tienen la forma exagerada que se muestra en las gráficas. Estas leyes son aplicables a cualquier planeta en su movimiento alrededor del Sol, a cualquier luna que gire en torno a algún planeta, a los satélites naturales o artificiales.

Las Leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas, es decir, se refieren sólo a la Cinemática, ya que no hacen mención a las causas que producen este movimiento.

LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

Como ya hemos visto, Newton enunció sus tres leyes, mediante las cuales se podía explicar cualquier tipo de movimiento. Conocía perfectamente los estudios realizados por Kepler acerca del movimiento de los planetas. Dedujo que si los planetas y la Luna describían órbitas casi circulares, entonces, sobre ellos debía actuar una fuerza, la cual producía este tipo de movimiento, de lo contrario deberían moverse en línea recta (Primera Ley de Newton del movimiento).

Cuenta la leyenda que al ver caer una manzana se preguntó si la fuerza que la hacía caer, era la misma que mantenía a la Luna girando alrededor de la Tierra. Sabía que la fuerza que hacía caer a la manzana era la fuerza gravitacional de la Tierra. Así mismo se cuestionaba si esta fuerza gravitacional que ejercía la Tierra sobre la Luna y la manzana, la ejercía también el Sol sobre los planetas que giraban a su alrededor. Para tratar de responder a esto, tomó como base dos resultados importantes de los estudios de Kepler: 1) los planetas describen órbitas elípticas, muy cercanas a un círculo y 2) $T^2/r^3 = k$, es una misma constante (k) para todos los planetas.

Del hecho de que los planetas describen aproximadamente una órbita circular, se tiene que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta determinado, vendría dada por la fuerza hacia el centro del círculo en donde se encuentra el Sol, es decir

$$F = m\frac{v^2}{r} \quad (*)$$

donde esta fuerza (F) es la fuerza centrípeta que ejerce el Sol sobre el planeta de masa (m), en dirección hacia el centro, r representa el radio de la órbita circular del planeta y v la magnitud de su velocidad tangencial.

Como la rapidez (v) está dada por

$$v = \frac{s}{t}$$

en este caso, si se toma el período (T), la distancia es la equivalente a una revolución, es decir $s = 2\pi r$, de donde

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$F = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \quad \text{Sustituyendo en la ecuación (*)}$$

$$F = \frac{m\,4\pi^2 r^2}{T^2\,r}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m\,r}{T^2}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{k r^3}$$ Dado que $T^2 = k r^3$ de acuerdo a la Tercera Ley de Kepler.

Simplificando y agrupando

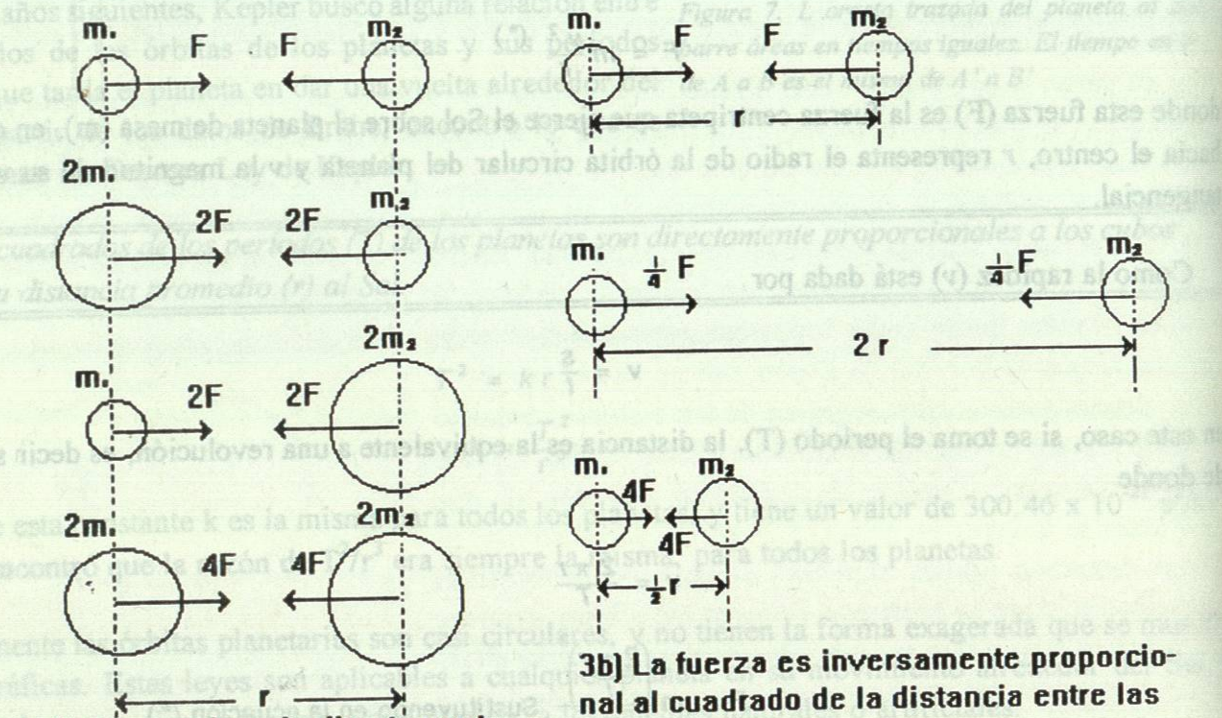
$$F = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2}$$

si observamos $\frac{4\pi^2}{k}$ es una cantidad constante (K), ya que el valor de sus elementos es siempre el mismo. Sustituyendo esta expresión por K, se tiene que

$$F = K \frac{m}{r^2}$$

De este resultado, Newton dedujo que la fuerza centrípeta que ejerce el Sol sobre el planeta variaba con el inverso del cuadrado de la distancia entre ellos y que dicha fuerza dependía de la masa del planeta.

A partir del análisis de estos resultados, Newton supuso la existencia de una fuerza gravitacional entre el Sol y el planeta, la cual era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos, de tal forma que si la distancia (r) entre ellos se aumenta al doble (2r), la fuerza disminuye a 1/4 de su valor inicial (F/4) y si por el contrario, la distancia (r) se disminuye a la mitad ($\frac{1}{2}$ r), la fuerza aumenta a 4F. (ver figura 8).



3a) La fuerza depede directamente del producto de las masas.

3b) La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las masas.

Figura 3.- Representación gráfica de la fuerza de atracción gravitacional.

Fig. 8a) La fuerza depende directamente del producto de las masas.

De acuerdo a la Tercera Ley de Newton del movimiento, si el Sol ejerce una fuerza sobre el planeta, éste ejercerá una fuerza igual y opuesta sobre el Sol. Y puesto que el Sol y el planeta interaccionan entre sí, entonces la fuerza gra-vitacional entre ellos depende de las dos masas y no nada más de una, de tal forma que si la masa del planeta se duplica, la fuerza gravitacional también se duplica. Por otra parte, si la masa del Sol se duplica, la fuerza gravitacional también se duplica. Si ambas masas, planeta y Sol, se duplican, la fuerza gravitacional se incrementaría en un factor de cuatro (ver figura 8a). De este razonamiento Newton dedujo que la fuerza gravitacional era directamente proporcional al producto de sus masas.

A partir de estas conclusiones, Newton asumió que la fuerza gravitacional se presenta entre dos cuerpos cualesquiera, ya que ésta depende solamente de sus masas y de la distancia entre ellas, llegando a enunciar la Ley de la Gravitación Universal, en los siguientes términos:

Dos masas cualesquiera se atraen entre sí, con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

en donde m_1 y m_2 son las masas que se atraen entre sí y r es la distancia entre ellas. Esta fuerza de atracción gravitacional es sumamente pequeña, ya que sólo es perceptible cuando al menos uno de los cuerpos es muy grande, como por ejemplo la Luna, la Tierra o el Sol. Cuando uno de los cuerpos que interaccionan es muy grande, generalmente tiene forma esférica, en este caso, Newton descubrió que para efectos de cálculo, su masa se puede considerar como si estuviera concentrada en su centro. También supuso que la fuerza de atracción gravitacional se presenta entre todos los objetos del Universo.

DEMOSTRACIÓN DE QUE LA FUERZA GRAVITACIONAL VARÍA EN FUNCIÓN DEL INVERSO DEL CUADRADO DE LA DISTANCIA

Debido a que Newton no contaba con los instrumentos necesarios para comprobar que la fuerza gravitacional variaba en función del inverso del cuadrado de la distancia entre dos masas pequeñas, decidió considerar a la Tierra y a la Luna como las masas interactuantes. Para llevar a cabo este análisis, se basó en la información que tenía acerca del movimiento de la Luna, el valor de la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra y de la aceleración centrípeta en el movimiento circular.