$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2s}$$

$$F = ma$$

$$F = m\left(\frac{v^2 - v_o^2}{2s}\right)$$

$$Fs = m_{(}\{v^2 \frac{v_o^2}{2})$$

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{m_o^2}{2} \quad (2)$$

Es decir, el trabajo realizado por la fuerza resultante (F) sobre el objeto ha producido un cambio en la cantidad $\frac{mv^2}{2}$. Esta cantidad se define como la energía cinética (E_K) de la masa **m**.

En términos de esta energía cinética se puede escribir la ecuación (2) de la siguiente forma:

$$W = E_K - E_{Ko}$$

En donde E_{KO} es la energía cinética al inicio del movimiento y E_K es la energía cinética al final del movimiento, de tal forma que:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_o^2 \quad (3)$$

$$\Delta E_K = E_K - E_{Ko}$$

En estas expresiones ΔE_K representa el cambio en la energía cinética. Comparando las ecuaciones (2) y (3), tenemos:

$$W = \Delta = \Delta E_K \quad (4)$$

Esta ecuación es la representación matemática del importante Teorema del Trabajo y la Energía.

> *El trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre un objeto, es igual al cambio en la energía cinética del objeto.*

Observa que el trabajo realizado sobre el objeto equivale al cambio en la energía, cinética transferida al mismo.

Al igual que el trabajo, la energía cinética es una cantidad escalar y se expresa en las mismas unidades, joules, erg, lb ft, etc. A diferencia del trabajo, la energía cinética nunca es negativa.

La energía cinética aumenta cuando el trabajo hecho sobre el objeto es positivo, ya que la fuerza resultante (o su componente en la dirección del movimiento) está aplicada en el sentido del movimiento, de tal forma que la velocidad aumenta. La energía cinética disminuye cuando el trabajo hecho sobre el objeto es negativo, ya que la fuerza resultante (o su componente en la dirección del movimiento) está aplicada en sentido contrario del movimiento, de tal forma que la velocidad disminuye.

> *Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento, es capaz de realizar un trabajo, el cual será igual al cambio en su energía cinética, según lo afirma el Teorema del Trabajo y la Energía.*

Ejemplo 4.

Un automóvil de 420 kilogramos, arrancando desde el reposo, alcanza una rapidez de 24 m/s en 10 segundos.

a) ¿Cuál es el cambio en su energía cinética?

b) ¿Cuánto trabajo se realizó sobre él?

Datos

$$m = 420 kg$$
$$v_o = 0$$
$$v = 24 \frac{m}{s}$$
$$t = 10 s$$

a) Puesto que inicia su movimiento desde el reposo, su energía cinética inicial es igual a cero, $E_{Ko} = 0$, por otro lado

$$E_k = \frac{m v^2}{2}$$

Sustituyendo datos.

$$E_k = (420 \ kg)\left(24 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_k = (420 \ kg)\left(576 \frac{m^2}{s^2}\right)$$

$$E_k = 120{,}960 \frac{kg \ m^2}{s^2}$$

$$E_k = 120{,}960 N \ m$$

$$E_k = 120{,}960 \ J$$

$$\Delta E_k = E_k - E_{ko}$$

$$E_{ko} = 0$$

$$\Delta E_k = E_k$$

$$\Delta E_k = 120{,}960 \ J$$

b) Dado que el trabajo es igual al cambio en la energía cinética, se tiene que

$$W = \Delta E_k$$

$$W = 120{,}960 \ J$$

Ejemplo 5.
Una masa de 800 g ramos se deja caer desde una altura de 10.4 metros sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál será su velocidad al chocar contra el suelo?

$$m = 800\ g = 0.8\ kg$$
$$h = 10.4\ m \quad \text{Datos}$$
$$v_o = 0$$

Al ir descendiendo, la masa va aumentando su velocidad a partir del reposo ($v_o = 0$), debido al trabajo hecho por el campo gravitacional de la Tierra, hasta llegar al suelo, de tal forma que

$$W = \Delta E_k \quad \text{(Teorema del Trabajo y la Energía)}$$
$$W = F s \quad \text{Definición}$$
$$F = w \quad \text{Fuerza igual al peso.}$$
$$W = w\ h \quad y \quad s = h$$
$$W = m g h$$
$$m g h = \Delta E_k$$
$$m g h = E_k - E_{ko}$$
$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 \quad \text{Sustituyendo } E_K \text{ y } E_{Ko} \text{ en la expresión anterior.}$$
$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Ya que } v_o = 0$$
$$2 g h = v^2 \quad \text{Eliminando las masas en ambos lados de la igualdad y despejando } v^2$$
$$v^2 = 2 g h \quad \text{Como recordarás, esta expresión para es la misma que se obtiene mediante las ecuaciones de caída libre.}$$
$$v^2 = 2\left(9.8\ \frac{m}{s^2}\right)(10.4\ m) \quad \text{Sustituyendo los valores conocidos.}$$
$$\sqrt{v^2} = \sqrt{203.84\ \frac{m^2}{s^2}}$$
$$v = 14.28\ \frac{m}{s} \quad \text{En donde es la velocidad de llegada al suelo.}$$

2. ENERGIA POTENCIAL (E_p)

La energía potencial es la que posee un cuerpo en virtud de su posición, en un determinado campo de fuerza, que actúa sobre él.

Esta energía potencial está asociada al trabajo que se debe de realizar sobre el objeto, para llevarlo de una posición a otra. Aquí nos ocuparemos solamente de la energía potencial gravitatoria que posee un cuerpo, debida a la atracción de la Tierra.

Al llevar un objeto de masa (m) desde una altura (h_1) hasta una altura mayor (h_2), a velocidad constante, se realiza un trabajo, en contra de la atracción gravitacional, en donde la fuerza aplicada es igual y opuesta al peso (w), ver figura 7.

$$W_F = F s \quad \text{Trabajo } (W_F) \text{ hecho por la fuerza aplicada.}$$
$$F = w \quad y \quad s\ h = h = h_2 - h_1$$
$$W_F = w\ h$$
$$W_F = m g (h_2 - h_1)$$
$$W_F = m g h_2 - m g h_1 \quad (4)$$

Como en esta expresión W_F representa el trabajo hecho sobre la masa para llevarla de la posición inicial (h_1) a la posición final (h_2), entonces, $m g h_2 - m g h_2$ se puede interpretar como el cambio de la energía de posición, ya que está en función de la altura. Esta energía almacenada por la masa se conoce como la energía potencial gravitacional, ya que si el objeto se deja caer, su peso (w) realiza un trabajo a lo largo de todo su recorrido, con respecto a un nivel de referencia, que normalmente es el suelo.

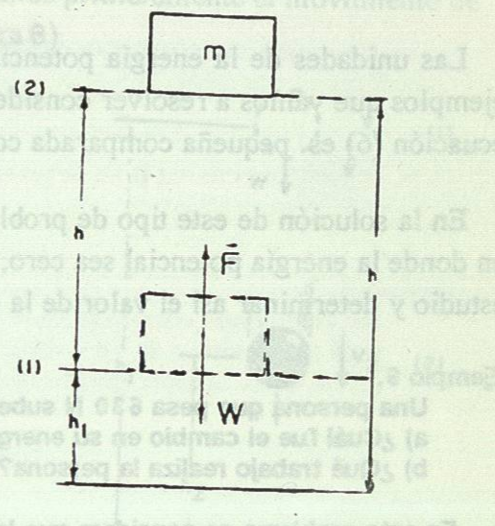


Fig. 7

Por lo anterior, se puede establecer en general, que

El trabajo hecho sobre la masa (m), para llevarla de una posición h1 a otra h2, es igual al cambio en su energía potencial gravitacional, y a su vez, un cambio en la energía potencial es igual al trabajo realizado sobre el objeto.

$$\Delta E_p = W \quad (5)$$

Donde ΔEp representa el cambio en la energía potencial, el cual viene dado por

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación 4, resulta que

$$E_{p1} = m g h_1 \quad \text{Representa la energía potencial gravitacional en el punto 1}$$
$$E_{p2} = m g h_2 \quad \text{Representa la energía potencial gravitacional en el punto 2.}$$
$$\Delta E_p = m g h_2 \quad m g h_1$$
$$\Delta E_p = m g (h_2 - h_1) \quad h = h_2 - h_1$$

$$\Delta E_p = m\,g\,h$$

$$E_{p2} - E_{p1} = m\,g\,h$$

Esta expresión depende del nivel de referencia que se tome. Suponiendo que el nivel de referencia es la superficie de la Tierra, entonces $h_1 = 0$, de donde $E_{p1} = 0$

$$E_p = m\,g\,h \quad (6)$$

Energía potencial (E_p) en cualquier punto en h donde se mide a partir del nivel de referencia.

Las unidades de la energía potencial son las mismas que se utilizan para el trabajo. En todos los ejemplos que vamos a resolver consideraremos el valor de g constante, debido a que la altura (h) en la ecuación (6) es pequeña comparada con el radio de la Tierra, en puntos cercanos a su superficie.

En la solución de este tipo de problemas se recomienda al alumno establecer la referencia del nivel en donde la energía potencial sea cero, para que a partir de este punto se mida la posición del objeto en estudio y determinar así el valor de la energía potencial.

Ejemplo 6.

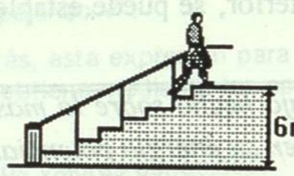
Una persona que pesa 630 N sube por una escalera hasta una altura de 6 metros.
a) ¿Cuál fue el cambio en su energía potencial?
b) ¿Qué trabajo realiza la persona?

En este problema se considera que la energía cinética no tiene ninguna variación.

$w = 630\ N$ Datos

$h = 6\ m$

a) Tomando el suelo como el nivel de referencia en donde $E_{po} = 0$, se tiene:



$$\Delta E_p = E_p - E_{po} = E_p$$

$$E_p = m\,g\,h = w\,h$$

$$\Delta E_p = w\,h$$

$$\Delta E_p = (630\ N)(6\ m)$$ Sustituyendo datos.

$$\Delta E_p = 3{,}780\ N\,m$$

$$\Delta E_p = 3{,}780\ J$$

b) Dado que el trabajo es igual al cambio de energía potencial ($W = \Delta E_p$), se tiene que

$$W = 3{,}780\ J$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Como ya lo hemos mencionado, la energía mecánica se divide en energía potencial (E_p) y energía cinética (E_k), las cuales se han tratado por separado. En esta parte del curso se analizará la energía mecánica que posee un sistema, formado por la Tierra y un objeto de cierta masa (por ejemplo, un cuerpo

que se mueve libremente bajo la acción de la gravedad, un péndulo que oscila bajo la acción de la misma); en el estudio de este sistema se despreciará el efecto de la fricción del aire. El otro ejemplo que vamos a analizar es el deslizamiento de una masa determinada sobre un plano inclinado, primero el caso ideal (cuando se desprecia la fricción) y posteriormente el caso más general (en el que se considerará el trabajo realizado para vencer la fuerza de fricción).

Para iniciar nuestro estudio de la energía mecánica, consideraremos primeramente el movimiento de un objeto en caída libre, bajo la acción de la gravedad (ver la figura 8).

Como se podrá apreciar, la única fuerza que interviene es la atracción gravitacional de la Tierra. Representando como Wg el trabajo hecho por la acción de la gravedad, al aplicar el Teorema del Trabajo y la Energía, resulta que

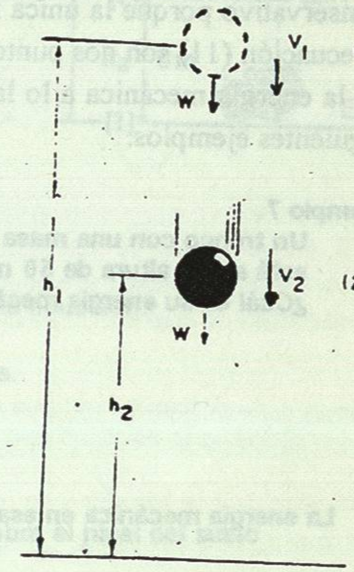


Fig. 8

$$W_g = \Delta E_k \quad (7)$$

donde ΔE_k representa el cambio en la energía cinética. Por otra parte, se tiene que el trabajo hecho por el campo gravitacional es igual al cambio en la energía potencial del sistema (Tierra - masa).

$$W_g = -\Delta E_p \quad (8)$$

el signo menos indica que al ir descendiendo, su energía potencial va disminuyendo. Comparando las ecuaciones (7) y (8), resulta:

$$W_g = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \quad (9)$$

En esta ecuación (9), el signo menos indica que un incremento en la energía cinética, trae consigo una disminución igual en la energía potencial del sistema y viceversa. A este sistema se le da el nombre de sistema conservativo.

Sistema conservativo es en el cual la energía mecánica se conserva y a las fuerzas que actúan sobre él se les llama fuerzas conservativas, como es el caso de la fuerza gravitacional.

De la ecuación (9) se tiene que:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2\right) + (m\,g\,h_2 - m\,g\,h_1) = 0$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + m\,g\,h_1 = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + m\,g\,h_2 \quad (10)$$

Reagrupando términos. En donde el extremo izquierdo representa la energía mecánica en el punto 1 (E_1) y el extremo derecho representa la energía mecánica en el punto 2 (E_2) de la trayectoria.

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

$$E_1 = E_2 \quad (11)$$

Esta expresión representa la conservación de la energía mecánica. Este sistema (Tierra-masa) es conservativo porque la única fuerza que actúa es la fuerza gravitacional. Dado que los puntos 1 y 2 en la ecuación (11) son dos puntos cualesquiera de la trayectoria, entonces, podemos concluir que el valor de la energía mecánica a lo largo de todo el recorrido, permanece constante o invariable. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7.

Un tronco con una masa de 5 kilogramos cae libremente desde lo alto de una montaña, cuando está a una altura de 50 metros sobre el nivel del piso, tiene una velocidad de 20 m/s. ¿Cuál es su energía mecánica en esta posición?

$$m = 5\ kg$$
$$h = 50\ m \quad \text{Datos}$$
$$v = 20\ \frac{m}{s}$$

La energía mecánica en esa posición es

$$E = E_p + E_k$$

$$E_p = m g h$$

$$E_k = \frac{m\, b^2}{2}$$

$$E = m g h + \frac{m v^2}{2}$$

$$E = (5\ kg)\left(9.8\ \frac{m}{s^2}\right)(50\ m) + \frac{5\ kg)\left(20\ \frac{m}{s}\right)^2}{2} \quad \text{Sustituyendo datos.}$$

$$E = 2{,}450\ N\,m + 1{,}000\ N\,m$$

$$E = 3{,}450\ N\,m$$

$$E = 3{,}450\ J$$

Ejemplo 8.

Una maceta con una masa de 16 kilogramos, cae desde un tercer piso ubicado a 8 metros de altura.

a) ¿Cuál es su energía cinética al chocar contra el piso?
b) ¿Con qué velocidad llega al piso?
c) ¿Cuál es su velocidad cuando ha descendido 6 metros?

a) Tomando en cuenta la ley de la conservación de la energía mecánica para los puntos (0) y (1), tenemos

$$E_0 = E_1$$

$$E_{KO} + E_{po} = E_{K1} + E_{P1}$$

$$\text{Como } E_{KO} = 0 \text{ y } E_{P1} = 0$$

$$E_{PO} = E_{K1}$$

donde

$$E_{PO} = mgh$$

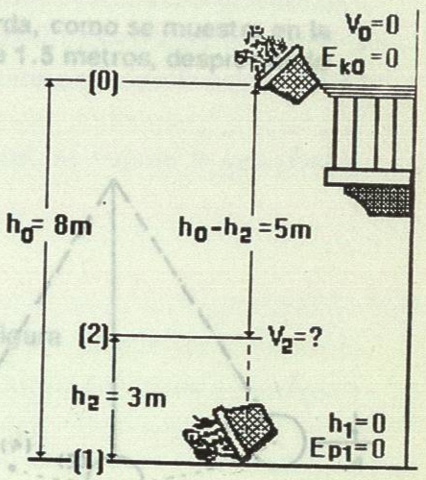
$$E_{K1} = mgh$$

entonces

$$E_{K1} = (16\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(8\ \text{m})$$

Sustituyendo datos.

$$E_{K1} = 1{,}254.4\ \text{J.}$$



b) Para calcular la velocidad con la que llega al suelo, se puede emplear

$$E_{k1} = \frac{m\, v_1^2}{2}$$

$$V_1^2 = \frac{2\, E_{k1}}{m} \quad \text{Despejando } v_1^2 \text{ de la ecuación.}$$

$$v_1^2 = \frac{2\ (1{,}254.40\ J)}{16\ kg} \quad \text{Sustituyendo datos.}$$

$$v_1 = 12.52\ \frac{m}{s}$$

c) Cuando la maceta ha descendido 5 metros, se encuentra a 3 metros sobre el nivel del suelo

$$E_0 = E_2$$

$$_{PO} = E_{K2} + E_{P2}$$

$$E_{K2} = E_{PO} - E_{P2} \quad \text{Despejando } E_{K2}$$

$$m(v_2^2)/2 = mgh_o - mgh_2$$

$$\frac{m(v_2^2}{2} = mg(h_o - h_2) \quad \text{Reagrupando términos.}$$

$$v_2^2 = mgh$$

eliminando m en ambos lados de la ecuación y despejando v_2^2 y con $h_o - h_2 = 5$ m.

$$v_2^2 = 2(9.8\ \frac{m}{s^2})(5\ m)$$

$$v_2^2 = 9.93\frac{m}{s}$$

Un segundo caso que vamos a estudiar, es el de un péndulo, el cual inicia su movimiento de oscilación desde una cierta altura (h), con respecto al nivel más bajo de su recorrido, como se muestra en la figura 9.