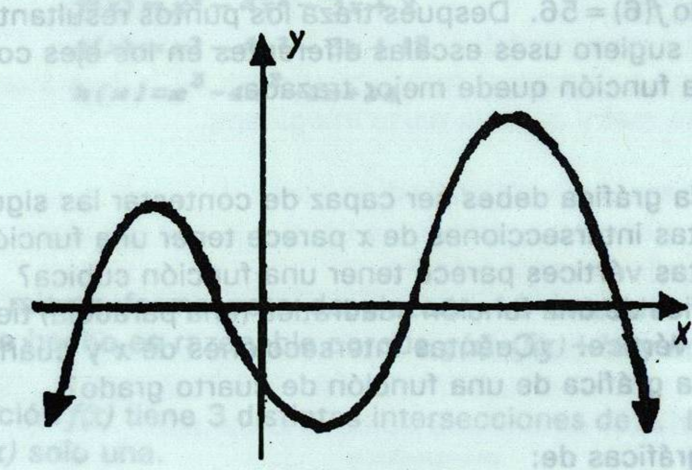
APENDICE

CAPITULO 1

FUNCIONES DE GRADO SUPERIOR

En la presente unidad estudiarás funciones en las cuales la variable independiente *x* es elevada a un exponente entero mayor que dos (2), siendo significativo el concepto matemático concerniente a los valores de *x* que hacen $y=f(x)=0$. Para utilizar este concepto tendrás que hacer uso de los números complejos. Además verás funciones de grado superior como modelos matemáticos, por ejemplo LA VISCOCIDAD DEL ACEITE, LA DEFLECCION DE LA MADERA, ETC. ETC.



1.1 Introducción a las funciones de grado superior

Recuerda que una función polinomial es una función con una ecuación general de forma $y =$ polinomio en x

Estudiaste funciones lineales (primer grado) y cuadráticas (segundo grado) en curso anteriores. En esta sección vas a graficar una función cúbica.

Objetivo

Interpretar la trayectoria de una serie de puntos y su comportamiento gráfico de una una función cúbica.

El ejercicio siguiente está diseñado para permitirte lograr este objetivo.

Ejercicio 1.1

1. Traza la gráfica de la función cúbica:
$f(x)=x^3-4x^2-3x+2.$ Dominio $-3 \leq x \leq 6.$

   Calcula los valores de la función *de* $f(x)$ para cada valor entero de x de su domini Por ejemplo $f(6)=56$. Después traza los puntos resultantes y únelos con una líne curva. Te sugiero uses escalas diferentes en los ejes coordenados para que la gráfica de la función quede mejor trazada.

2. Mediante la gráfica debes ser capaz de contestar las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuántas intersecciones de x parece tener una función cúbica.
   b) ¿Cuántas vértices parece tener una función cúbica?
   c) La gráfica de una función cuadrática (una parábola) tiene dos intersecciones d x y un vértice. ¿Cuántas intersecciones de x y cuántas vértices esperas qu tenga la gráfica de una función de cuarto grado?

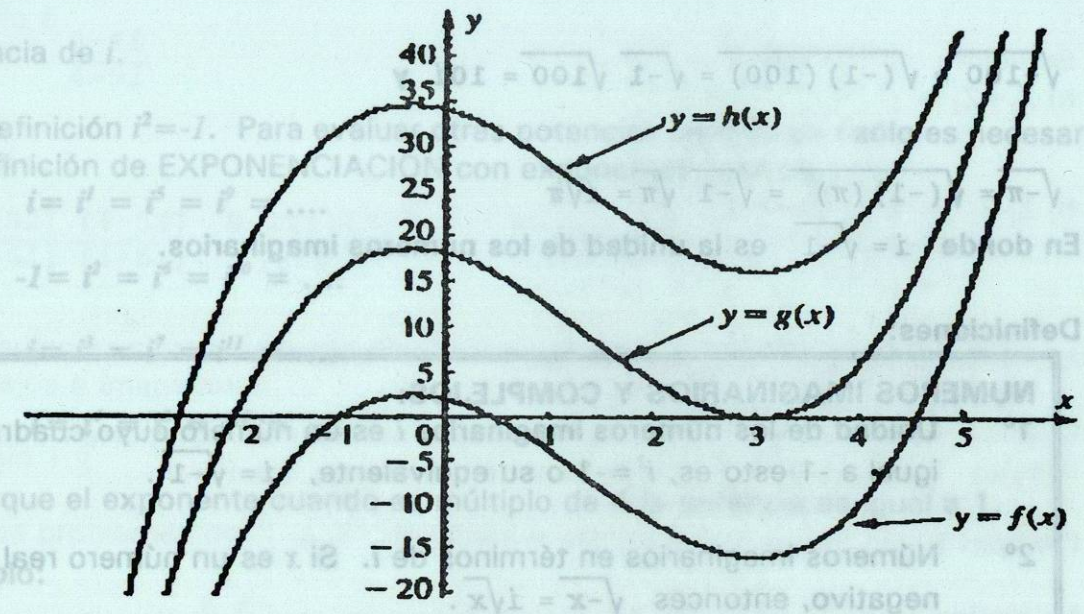
3. Traza las gráficas de:
$g(x)=x^3-4x^2-3x+18$
$h(x)=x^3-4x^2-3x+34$

   Esto es fácil si observas que $g(x)=f(x)+16$ y $h(x)=f(x)+32$ donde $f(x)$ se define en problema uno.

   a) ¿Cómo las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ se comparan con la gráfica de $f(x)$?
   b) ¿Cuántas intersecciones de x tienen las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$?
   c) ¿Qué conclusiones puedes obtener acerca del número de intersecciones de que tiene una función cúbica?

1.2 Repaso de números complejos

En la sección anterior obserbaste las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, cada una es una función cúbica y cada ecuación difiere en el término constante. Sus gráficas son mostradas en la figura 1-2a



$$f(x)=x^3-4x^2-3x+2$$
$$g(x)=x^3-4x^2-3x+18$$
$$h(x)=x^3-4x^2-3x+34$$

Figura 1-2a.

Cada una tiene la misma forma pero desplazada 16 unidades una de otra en la dirección de y. Este hecho es razonable porque $g(x)=f(x)+16$ y $h(x)=g(x)+16$.

La gráfica de la función $f(x)$ tiene 3 distintas intersecciones de x. La de $g(x)$ tiene dos intersecciones y $h(x)$ solo una.

En esta sección recordarás acerca de números complejos.

Después de explorar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas en la siguiente sección, encontrarás algunas conclusiones generales acerca de las intersecciones de x de funciones cúbicas y de grado superior.

Objetivo

Ser capaz de sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos.

Un número imaginario es definido como la raíz cuadrada de un número real negativ

$\sqrt{-17}$, $\sqrt{-100}$, $-\sqrt{-3}$, $\sqrt{-\pi}$ son números imaginarios.De donde:

$$\sqrt{-17} = \sqrt{(-1)(17)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{17} = i\sqrt{17}$$

$$\sqrt{-100} = \sqrt{(-1)(100)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{100} = 10i \ \text{ y}$$

$$\sqrt{-\pi} = \sqrt{(-1)(\pi)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{\pi} = i\sqrt{\pi}$$

En donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números imaginarios.

Definiciones:

NUMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS:

1º **Unidad de los números imaginarios** i es un número cuyo cuadrado es igual a -1 esto es, $i^2=-1$ o su equivalente, $i = \sqrt{-1}$.

2º Números imaginarios en términos de i. Si x es un número real no negativo, entonces $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$.

3º Números complejos
Un número complejo es un número de la forma $a+bi$, donde a es la parte real y bi es la parte imaginaria.

4º Números complejos conjugados.
Los números complejos $a+bi$ y $a-bi$ son llamados números complejos conjugados uno del otro.

Los números complejos pueden representarse en un plano complejo. La figura 1.2 muestra el número complejo $4+3i$. La parte real (4) es ubicada como la absisa. L parte imaginaria (3) es ubicada como la ordenada.

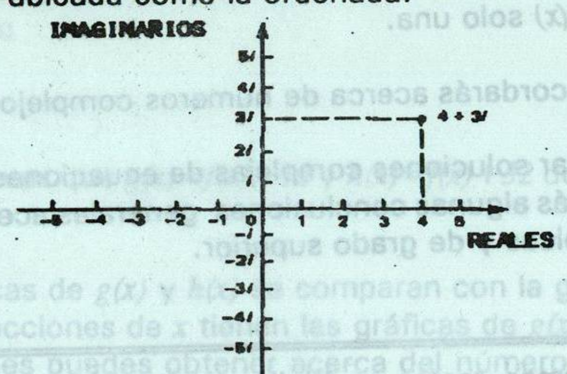


Figura 1.2b

Mediante la posición de ambas líneas una de números reales (eje horizontal) y la otra de números imaginarios (en eje vertical) puedes concluir que el conjunto de números reales y números imaginarios son subconjuntos del conjunto de números complejos. También puedes concluir que el número CERO es tanto un número real como un número imaginario ya que aparece en ambos ejes (la real y la imaginaria) en la misma ubicación.

Potencia de i.

Por definición $i^2=-1$. Para evaluar otras potencias enteras de i sólo es necesario usar la definición de EXPONENCIACION con exponentes enteros:

$$i = i^1 = i^5 = i^9 = \ldots.$$

$$-1 = i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots.$$

$$-i = i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots.$$

$$1 = i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots.$$

Nota que el exponente cuando es múltiplo de 4 la potencia es igual a 1.

Ejemplo:

$$i^{92}=1$$

Imagina que deseas calcular i^{71}. Ya que $71 = 68+3$ y 68 es múltiplo de 4:

$$\begin{aligned} i^{71} &= i^{68+3} \\ &= i^{68}\cdot i^3 \\ &= 1\cdot i^3 \\ &= i^3 \\ &= -i \end{aligned}$$

Una técnica más rápida es dividir el exponente por 4 y luego deshacerte del cociente y quedarte con el residuo, el cual sería el exponente de la i.

$$i^{71} = i^3 = -i.$$

Ejemplo 1
Calcular i^{2406}

Solución:
Divides 2406 entre 4 y tienes un cociente de 601 el cual deshechas y te quedas con el residuo que es 2, o sea $i^{2406} = i^2 = -1$.

Suma y diferencia de números complejos.

Cuando los números complejos son sumados o restados se comportan como binomios lineales.

Ejemplo 2
Si $Z_1=12+5i$
y $Z_2=4\text{-}9i$. Encuentra:
a) Z_1+Z_2
b) $Z_1\text{-}Z_2$

Solución:
a) $Z_1+Z_2 = (12+5i)+(4\text{-}9i)$
$= 12+5i+4\text{-}9i$
$= 16\text{-}4i$
b) $Z_1\text{-}Z_2 = (12+5i)\text{-}(4\text{-}9i)$
$= 12+5i\text{-}4+9i$
$= 8+14i$

Multiplicación de números complejos.

Cuando se multiplican números complejos también se comportan como binomi lineales. Lo único que debes de tener en mente es que $i^2=\text{-}1$.

Ejemplo 3

Multiplica $(3\text{-}2i)(7+5i)$

Solución:
$(3\text{-}2i)(7+5i) = 21\text{-}14i+15i\text{-}10i^2$
$= 21+i+10$
$= 31+i$

Ejemplo 4

Multiplica $(12+8i)(12\text{-}8i)$

Solución:
$(12+8i)(12\text{-}8i) = 144\text{-}64i^2$
$= 144+64$
$= 208$

Nota que los números complejos $12+8i$ y $12\text{-}8i$ son complejos conjugados el uno d otro. Su producto es un número real. Este hecho tiene aplicación en la división d números complejos.

Conclusión

PRODUCTO DE COMPLEJOS CONJUGADOS. El producto de dos complejos conjugados es un número real. $(a+bi)(a\text{-}bi)= a^2+b^2$

División de números complejos:

Dividir un número complejo entre otro es un caso especial de transformación a la forma radical simple. Racionaliza el denominador multiplicando y dividiendo la expresión compleja por el conjugado del denominador.

Ejemplo 5
Divide $\dfrac{2-3i}{4+5i}$

Solución:

$$\frac{(2-3i)}{(4+5i)}\frac{(4-5i)}{(4-5i)}=\frac{8-22i+15i^2}{16-25i^2}=\frac{8-22i-15}{16+25}=\frac{-7-22i}{41}=\frac{-7}{41}-\frac{22}{41}i$$

Los siguientes ejercicios están diseñados para facilitarte las operaciones con números complejos e imaginarios.

Ejercicio 1.2

Para los problemas del 1 al 20 simplifica y escribe en términos de i.

1. i^5 2. i^7 3. i^{55} 4. i^{25} 5. i^{62}
6. i^{74} 7. i^{300} 8. i^{180} 9. i^0 10. i^{-2}
11. i^{-7} 12. i^{-25} 13. i^{-38} 14. i^{-54} 15. $i\sqrt{-16}$
16. $\sqrt{-25}$ 17. $\sqrt{-18}$ 18. $\sqrt{-48}$ 19. $\sqrt{-7}$ 20. $\sqrt{-3}$

Para los problemas del 21 al 28 ubica los números dados en un plano complejo.

21. $5+7i$ 22. $6+3i$ 23. $3\text{-}2i$ 24. $7\text{-}4i$
25. $\text{-}4+6i$ 26. $\text{-}2+i$ 27. $\text{-}1\text{-}8i$ 28. $\text{-}5\text{-}2i$

Para los problemas del 29 al 32 encuentra:
a) Z_1+Z_2 b) $Z_1\text{-}Z_2$ c) $Z_1\cdot Z_2$ d) Z_1/Z_2

29. $Z_1=2+3i$, $Z_2=4\text{-}5i$
30. $Z_1=6+2i$, $Z_2=5\text{-}7i$
31. $Z_1=\text{-}1+2i$, $Z_2=6+7i$
32. $Z_1=\text{-}3\text{-}i$, $Z_2=4+8i$

33. Encuentra el producto de un número complejo $a+bi$ y su complejo conjugado y explica porqué la respuesta es un número real.

34. Usa los resultados del problema 33 para factorizar la suma de dos cuadrados x^2+y^2

Para los problemas del 35 al 38 imagina que el |Z| es definido como la distancia d origen al punto Z en el plano de los números complejos (de la misma manera que valor absoluto de un número real es la distancia entre el origen y su valor en la rect numérica). Para cada problema traza Z en un plano de números complejos, conect la gráfica de Z al origen, después encuentra el valor absoluto de Z mediante el us apropiado del Teorema de Pitágoras.

35. $Z=4+3i$ 36. $Z=2-3i$ 37. $Z=-5+12i$ 38. $Z=-8-15i$

39. Imagina que $Z_1=3+5i$ y $Z_2=7+2i$.
 a) Traza Z_1 y Z_2 en un plano de números complejos. Después conecta cada punt al origen. ¿Qué representan la longitud de estas líneas?
 b) Conecta Z_1 y Z_1+Z_2. ¿La longitud de ésta línea, a qué es igual?
 c) Explica porqué la desigualdad $|Z_1+Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ es verdadera par cualquier dos números complejos Z_1 y Z_2 (esto es llamado la desigualdad d triángulo).

40. Imagina que $Z_1=1+i$ y $Z_2=2+5i$.
 a) Encuentra el producto de $Z_1 \cdot Z_2$
 b) Encuentra el valor absoluto de $Z_1 \cdot Z_2$ y de $|Z_1 \cdot Z_2|$, después trata de llegar una conclusión acerca de cómo se relacionan estos tres valores absolutos uno del otro.
 c) Traza los puntos Z_1, Z_2 y $Z_1 \cdot Z_2$ y conéctalos con el origen. Como los ángulo entre el eje real positivo y estas tres líneas se relacionan una de otra.

41. Dibuja las gráficas de i, i^2, i^3, i^4 en el mismo plano. Que es lo que parece sucede cuando al exponente de i se aumenta de uno en uno.

42. Imagina que $Z=3+4i$
 a) A qué es igual Z?
 b) Traza los puntos Z e $i\,Z$ en un plano y conecta cada punto con el origen.
 c) Muestra que multiplicando $Z \cdot i$ no cambia su valor absoluto.
 d) Muestra que multiplicando $Z \cdot i$ la gráfica gira un ángulo de 90°.

43. Muestra que $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ es raíz cuadrada de i elevando $[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)]^2$ y mostrando que obtienes i como respuesta. Además muestra que $|Z|=1$.

44. Imagina que $z=-1+i\sqrt{3}$
 a) Muestra que $|Z|=2$
 b) Muestra que Z es una raíz cúbica de 8 elevando al cubo $(-1+i\sqrt{3})$ y obtiene 8 como respuesta.

1.3 Ecuaciones cuadráticas derivadas de sus soluciones - Factores de números complejos.

Aprendiste a resolver ecuaciones cuadráticas tales como:

$$x^2-2x+13=0$$

usando la fórmula cuadrática. Obtienes

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(13)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{-48}}{2}=\frac{2\pm4i\sqrt{3}}{2}=1\pm2i\sqrt{3}$$

entonces:

$$x_1=1+2i\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x_2=1-2i\sqrt{3}$$

Observa que las soluciones son complejos conjugados uno del otro. Esto siempre va a suceder si los coeficientes de la ecuación son números reales. Las partes imaginarias de las soluciones proceden de $\sqrt{b^2-4ac}$.

Haz aprendido a resolver ecuaciones cuadráticas tales como: $x^2-5x+6=0$ mediante la factorización.

Tú escribirías:

$$(x-3)(x-2)=0$$
$$x-3=0 \text{ y/o } x-2=0$$
$$x=3 \text{ y/o } x=2$$
$$S=\{3,2\}$$

El proceso inverso, conocidas las soluciones sería encontrar la ecuación original. Así se tiene que las soluciones de una cuadrática son: $S=\{5,7\}$ de donde los factores serían $(x-5)(x-7)=0$, entonces $x^2-12x+35=0$. En general una ecuación cuadrática cuyas soluciones son S_1 y S_2 es $(x-S_1)(x-S_2)=0$.

Este proceso puede ser hecho si las dos soluciones son fracciones, decimales, radicales o números complejos. Pero la transformación a la forma ax^2+bx+c es muy tediosa. Afortunadamente hay relaciones entre S_1, S_2 y los coeficientes a, b y c lo cual hace el trabajo más fácil. Para saber cuáles son estas relaciones procedemos a multiplicar $(x-S_1)(x-S_2)=0$ obtienes:

$$x^2-S_2x-S_1x+S_1S_2=0$$

$$x^2-(S_1+S_2)x+S_1\cdot S_2=0 \qquad (1)$$

Dividiendo cada miembro de $ax^2+bx+c=0$ por a nos queda:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)$$