Comparando las ecuaciones (1) y (2) debes ser capaz de ver que:

$$\boxed{S_1 \cdot S_2 = \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad -(S_1+S_2) = \frac{b}{a}}$$

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo escribir una ecuación cuadrática si sabes su soluciones y los ejemplos 3 y 4 muestran cómo puedes usar los conceptos de est sección para factorizar cualquier trinomio cuadrático.

Objetivos

1º	Dados dos números, escribe una ecuación cuadrática que tenga estos números como sus soluciones.
2.	Dado un trinomio cuadrático factorízalo sobre el conjunto de los números complejos.

Ejemplo 1.
Encuentra la ecuación cuadrática que tenga $\frac{5}{3}$ y -2 por soluciones

$$\frac{b}{a} = -(S_1+S_2) = -\left(\frac{5}{3}-2\right) = -\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c}{a} = S_1 \cdot S_2 = \left(\frac{5}{3}\right)(-2) = \frac{-10}{3}$$

entonces la ecuación es: $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}=0$

Si quieres tener coeficientes enteros en la ecuación puedes multiplicar ambo miembros por 3, obteniendo

$$3x^2+x-10=0$$

Las soluciones de una ecuación son llamadas raíces.

Definición

> **RAICES DE UNA ECUACION.**
> La raíz de una ecuación es la solución de esa ecuación.

Si una ecuación cuadrática tiene soluciones complejas y los coeficientes en l ecuación son números reales, entonces las soluciones son complejas y conjugadas un de otra. La razón de esto se muestra en la fórmula cuadrática. Por ejemplo, s resuelves $x^2-10x+34=0$ obtienes:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2-4(1)(34)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-136}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{10 \pm 6i}{2}$$

$$x=5+3i \quad \text{y} \quad x=5-3i$$

La parte real es la misma en ambas soluciones. La parte imaginaria difiere en el signo. De manera que las soluciones son conjugadas una de la otra. Esta conclusión es verdadera siempre y cuando los 3 coeficientes de la ecuación sean números reales. En el ejercicio siguiente vas a ver que puede ser no cierta si los coeficientes son números imaginarios.

Conclusión

> **SOLUCIONES COMPLEJAS Y CONJUGADAS DE CUADRATICAS.**
> Si una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene un discriminante negativo entonces las dos soluciones son complejas y conjugadas una de otra.

Ejemplo 2
Encuentra una ecuación cuadrática que tenga números reales como coeficientes y una de sus soluciones es $2+3i$.

Solución

Ya que soluciones complejas vienen en pares conjugados donde los coeficientes son números reales, la otra solución será $2-3i$.

$$\frac{b}{a} = -(S_1+S_2) = -(2+3i+2-3i) = -4$$

$$\frac{c}{a} = S_1 \cdot S_2 = (2+3i)(2-3i) = 4+9 = 13$$

entonces la ecuación es $x^2-4x+13=0$

Factorizando cuadráticos

Ya que factorizar puede ser usado para resolver ecuaciones cuadráticas, resolver ecuaciones cuadráticas puede ser usado para ayudarte a factorizar. Usa el hecho de que S_1 y S_2 son soluciones de la ecuación, entonces la ecuación es $(x-S_1)(x-S_2)=0$

Ejemplo 3.

Factoriza $x^2-2x+13$

Solución $x^2-2x+13=0$

Usando la fórmula cuadrática las dos soluciones de esta ecuación son:
$S_1 = 1+2i\sqrt{3} \qquad S_2 = 1-2i\sqrt{3}$
entonces la ecuación es equivalente a:
$[x-(1+2i\sqrt{3})][x-(1-2i\sqrt{3})]=0$

$(x-1-2i\sqrt{3})(x-1+2i\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x^2-2x+13=(x-1-2i\sqrt{3})(x-1+2i\sqrt{3})$

Ejemplo 4
Factoriza $5x^2+3x-7$

Solución
En este caso el coeficiente de x^2 no es 1. Por lo tanto el coeficiente del términ cuadrático se saca como factor común;

$$5(x^2+\frac{3}{5}x-\frac{7}{5})$$

El polinomio que esta dentro del paréntesis se factoriza en la forma $(x-S_1)$ $(x-S_2$
Resolviendo la ecuación $5x^2+3x-7=0$ vas a encontrar que:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(5)(-7)}}{2(5)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+140}}{10}=\frac{-3\pm\sqrt{149}}{10}$$

$$\therefore 5x^2+3x-7=5[x-(\frac{-3+\sqrt{149}}{10})]\ [x-(\frac{3-\sqrt{149}}{10})]$$

La solución aproximada en forma decimal de:

$$\frac{-3\pm\sqrt{149}}{10}$$

$S_1\approx 0.92$ y $S_2\approx -1.52$

$\therefore 5x^2+3x-7\approx 5(x-0.92)(x+1.52)$

Ejemplo 5
Factoriza $4x^2+9$

Solución
Esta es la suma de dos cuadrados no factorizable con números reales. Puedes factorizarlo mediante la técnica usada en el ejemplo 4. Una manera fácil de hacerlo es transformándolo como una diferencia de dos cuadrados, utilizando números imaginarios.

$$4x^2+9 = 4x^2-9i^2 \qquad (i^2=-1)$$
$$=(2x+3i)(2x-3i)$$

El siguiente ejercicio esta diseñado para darte práctica en encontrar ecuaciones con las soluciones dadas y factorizar cuadráticas en factores lineales.

Ejercicio 1.3

Para los problemas del 1 al 12 encuentra el conjunto de soluciones de la ecuación dada sobre el conjunto de números complejos (asume que el Dominio de x es el conjunto de números complejos).

1. $x^2-2x+2=0$
2. $x^2-4x+5=0$
3. $x^2+2x+10=0$
4. $x^2-4x+29=0$
5. $x^2+4x+7=0$
6. $x^2-10x+27=0$
7. $3x^2-4x-10=0$
8. $25x^2+10x+101=0$
9. $x^2+8x+7=0$
10. $x^2-6x+4=0$
11. $x^2+9=0$
12. $4x^2+49=0$

Para los problemas del 13 al 20 encuentra la ecuación cuadrática con las dos soluciones dadas.

13. 2 y -5
14. -3 y -6
15. $2+i$ y $2-i$
16. $-3+4i$ y $-3-4i$
17. $1+i\sqrt{5}$ y $1-i\sqrt{5}$
18. $-5+2i\sqrt{3}$ y $-5-2i\sqrt{3}$
19. $4+\sqrt{7}$ y $4-\sqrt{7}$
20. $5+\sqrt{3}$ y $5-\sqrt{3}$

De los problemas 21 al 30 factoriza el polinomio dado en factores lineales.

21. x^2-2x+5
22. $x^2+10x+29$
23. $x^2-6x+11$
24. $x^2-10x+22$
25. $9x^2+121$
26. x^2+16
27. $49x^2+1$
28. $3x^2-4x+10$
29. $25x^2+10x+101$
30. $9x^2-12x+229$

31. Sustituye cada solución de la ecuación del problema 1 en la ecuación y muestra que estos números satisfacen la ecuación.

32. Repite el problema 31 para la ecuación del problema 3.

33. Resuelve la ecuación que obtuviste como respuesta del problema 15 y muestra que las soluciones son $2+i$ y $2-i$.

34. Repite el problema 33 para la ecuación obtenida del problema 16.

35. Multiplica los factores de x^2-2x+5 (problema 21) y muestra que el producto es x^2-2x+5.

36. Repite el problema 35 para $x^2+10x+29$ (problema 22).

1.4 **Gráficas de funciones de grado superior**
Sustitución sintética.

Ahora estás listo para volver al problema de graficar funciones de grado superior. Lo primero que necesitas es una vía rápida para evaluar polinomios, así puedes obtener datos para graficar rápidamente. Una combinación práctica y organizada de los factores nos muestra cómo esto puede ser hecho. Por ejemplo:

$P(x)=3x^4-19x^3-21x^2+51x-14$ Polinomio dado

$= (3x-19)x^3-21x^2+51x-14$ Sacando x^3 de factor
$= ((3x-19)x-21)x^2+51x-14$ Sacando x^2 de factor
$= ((3x-19)x-21)x+51)x-14$ Sacando x de factor

Se dice que el polinomio esta en "forma agrupada" desde que conjuntos de parénte están agrupados adentro de otros paréntesis.

Supón, ahora, que quieres encontrar el valor de P(2). Empezando por los parénte más internos.

Usa la siguiente secuencia de pasos.

Empieza con 3	Empieza con el coeficiente de más alto grado
$3X2=6$ 6-19 = -13	Multiplica por x Suma el siguiente coeficiente, -19
$-13X2=-26$ -26-21 = -47	Multiplica por x la respuesta Suma el siguiente coeficiente, -21
$-47X2=-94$ -94 + 51 = -43	Multiplica por x la respuesta Suma el siguiente coeficiente, 51
$-43X2=-86$ -86-14 = -100	Multiplica por x la respuesta Suma el siguiente coeficiente, -14

La respuesta es P(2) = -100. La virtud de este método es el que el mismo par pasos, multiplique por x luego suma el siguiente coeficiente es hecho repetidamen

Hay una forma conveniente para calcular P(2) y consiste primero en colocar l coeficientes de P(x) y el valor de x a ser sustituido de la manera siguiente:

Valor sustituido por x

2 | 3 - 19 - 21 51 - 14 ← **coeficientes de P(x)**
← **espacio para los cálculos**

Baja el primer coeficiente 3, multiplícalo por 2 y escribe el resultado (6), debajo -19 y suma. Ahora multiplica el -19 por 2 , pon el resultado debajo de -21 y suma. L otros pasos son hechos de la misma forma.

2 | 3 - 19 - 21 51 - 14
6 - 26 - 94 - 86
3 - 13 - 47 43 - 100 **P(2)**

Este proceso es llamado sustitución sintética

El proceso de sustitución sintética es esencialmente el mismo del proceso de división larga.

Dividiendo P(x) por (x-2) dá un cociente
cociente: $3x^3-13x^2-47x-43$ y un residuo
residuo : -100

El residuo y los coeficientes de el cociente son mostrados en el proceso de sustitución sintética

$$\begin{array}{l} \underline{2}\,|\; 3 \;\; -19 \;\; -21 \quad\;\; 51 \;\; -14 \\ \qquad\quad 6 \;\; -26 \;\; -94 \;\; -86 \\ \qquad \underbrace{3 \;\; -13 \;\; -47 \;\; -43}_{\text{coeficientes del cociente}} \; \underbrace{-100}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Por esta razón la sustitución sintética es algunas veces llamada "DIVISION SINTETICA". La relación entre los dos procesos nos lleva al siguiente teorema importante.

Teorema.

> **TEOREMA DEL RESIDUO.**
> Si P(x) es un polinomio, entonces P(b) es igual al residuo cuando P(x) es dividido por x-b.

Para ver por que esto es verdad, supón que P(x) es dividido por (x-b) dando un cociente Q(x) y un residuo R. Luego
P(x) = (x-b)· Q(x) + R

sustituyendo b por x da

P(b) = (b-b)· Q(b) + R
P(b) = O· Q(b) + R
P(b) = R

El teorema del residuo puede ser usado para mostrar el teorema del factor.

Aplicando la técnica de sustitución sintética estaras listo para graficar y analizar funciones de grado superior.

Objetivos

1. Representar la gráfica de una función de grado superior, usando la sustitución sintética para calcular los datos.
2. Encontrar todos los valores de x que hacen al polinomio P(x) igual a CERO.

Ejemplo 1.

Haz la gráfica de $P(x)=x^3-4x^2-5x+14$ y encuentra todos los valores de x que hace
$P(x)=0$

Solución:
Para dibujar la gráfica, calcula varios puntos. La tabla de abajo muestra una form compacta de hacer varias sustituciones en el mismo polinomio !Ve si puedes descifr como trabajar. La gráfica se muestra en la figura 1-4a

x	1	-4	-5	F(x) 14
-3	1	-7	16	-34
-2	1	-6	7	0
-1	1	-5	0	14
0	1	-4	-5	14
1	1	-3	-8	6
2	1	-2	-9	-4
3	1	-1	-8	-10
4	1	0	-5	-6
5	1	1	0	14
6	1	2	7	56

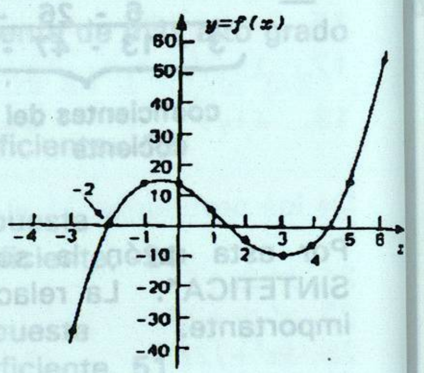

Fig. 1.4a $f(x)=x^3-4x-5x+14$
Tresintersecciones

Para encontrar los valores de x que hacen $P(x)=0$.
Haz encontrado $P(-2)=0$. Por el teorema del factor sabes que $(x+2)$ es un factor d $P(x)$. Los coeficientes del cociente aparecen en el proceso de sustitución sintétic
Por lo tanto,
$P(x)=(x+2)(x^2-6x+7)$
haciendo $P(x)=0$ nos dá
$(x+2)(x^2-6x+7)=0$ de donde
$x+2=0$ y/o $x^2-6x+7=0$ propiedad multiplicativa del CERO

$x=-2$ y/o $x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4(1)(7)}}{2}$

$x=3\pm\sqrt{2}$

$x=4.414$
$x=1.586$

Puedes ver en la figura 1.4a que la curva corta al eje x en estos tres puntos.

Ejemplo 2
Traza la gráfica de $P(x)=x^3-4x^2-5x+48$, y encuentra todos los valores de x que hacen a $P(x)=0$

x	1	-4	-5	F(x) 48
-3	1	-7	16	0
-2	1	-6	7	34
-1	1	-5	0	48
0	1	-4	-5	48
1	1	-3	-8	40
2	1	-2	-9	30
3	1	-1	-8	24
4	1	0	-5	28
5	1	1	0	48
6	1	2	7	90
7	1	3	16	160
8	1	4	27	264

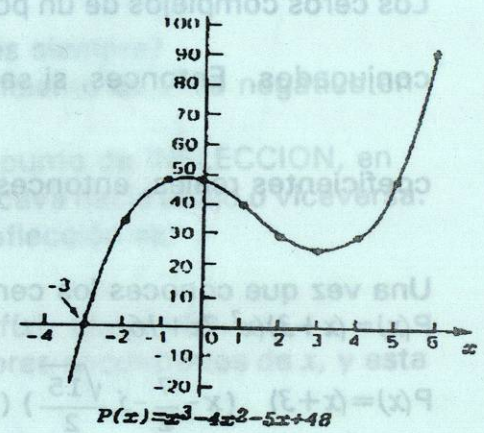

Fig. 1.4b Una intersección.

Una intersección de x para -3.

$P(x)=(x+3)(x^2-7x+16)$ por el teorema del factor
$P(x)=0$ nos queda $(x+3)(x^2-7x+16)=0$ de donde
$x+3=0$ y/o $x^2-7x+16=0$

$x=-3$ y/o $x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-64}}{2}$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{-15}}{2}$

$x=\dfrac{7\pm i\sqrt{15}}{2}$

$x=\dfrac{7}{2}+i\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$x=\dfrac{7}{2}-i\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Estos dos últimos valores de x son números complejos, por lo tanto no hay intersepciones con el eje x.

Sin embargo, estos números hacen $P(x)=0$.

Definición

> **CERO DE UNA FUNCION.**
> Un cero de un polinomio $P(x)$ es un valor de x, real o complejo, el cual hace a $P(x)=0$

Los ceros complejos de un polinomio con coeficientes reales siempre vienen en pares conjugados. Entonces, si sabes que $\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces $\frac{7}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2}$ es también un cero del polinomio.

Una vez que conoces los ceros de un polinomio factorízalo en factores lineales.

$P(x)=(x+3)(x^2-7x+16)$

$P(x)=(x+3)\quad (x-\frac{7}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2})\ (x-\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2})$

Nota que $P(x)$ es un polinomio cúbico, y que tiene exactamente tres factores lineales. Este es un ejemplo de un importante TEOREMA ALGEBRAICO

Teorema

> Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ tiene exactamente n factores lineales.

Esto significa que $P(x)$ tiene exactamente n ceros así como el polinomio:

$p(x)=(x-7)^3(x-4)^2$ (observa que es de quinto grado)

Por lo tanto este polinomio tiene cinco ceros;

$(x-7)(x-7)(x-7)(x-4)(x-4)=0$

tiene dos ceros diferentes el 7 y el 4, el 7 se repite tres veces y el 4 dos. Este teorema es un corolario del teorema fundamental del álgebra.

Teorema

> **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA.**
> Un polinomio $P(x)$ tiene al menos un cero, si son permitidos ceros en los números complejos.

Ejemplo 3.
Para las siguientes tres funciones

$f(x)=x^3-4x^2+2x+7$
$g(x)=x^3-6x^2+13x-8$
$h(x)=-x^3+2x^2+3x+5$

a. Traza las gráficas
b. ¿Las gráficas de funciones cúbicas tienen dos vértices siempre?
c. Di la mayor diferencia en las gráficas cuando el coeficiente de x^3 es negativo en lugar de positivo.
d. Las gráficas de funciones cúbicas siempre tienen un punto de INFLECCION, en donde la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa. Si $y=ax^3+bx^2+cx+d$; la coordenada x del punto de inflección es:

$$x=-\frac{b}{3a}$$

Calcula el punto de inflección para las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
Traza una línea vertical en cada gráfica en los valores encontrados de x, y esta cortará a la gráfica en el punto de inflección

Soluciones:

a.

f(x)

x	I	-4	2	7
-3	I	-7	23	-62
-2	I	-6	14	-21
-1	I	-5	7	0
0	I	-4	2	7
1	I	-3	-1	6
2	I	-2	-2	+3
3	I	-1	-1	4
4	I	0	2	15
5	I	1	7	42

g(x)

x	I	-6	13	-8
-3	I	-9	40	-128
-2	I	-8	29	- 66
-1	I	-7	20	- 28
0	I	-6	13	- 8
1	I	-5	8	0
2	I	-4	5	2
3	I	-3	4	4
4	I	-2	5	12
5	I	-1	8	+32

h(x)

x	-I	2	3	5
-3	-I	5	-12	41
-2	-I	4	- 5	15
-1	-I	3	0	5
0	-I	2	3	5
1	-I	1	4	9
2	-I	0	3	11
3	-I	-1	0	5
4	-I	-2	-5	-15
5	-I	-3	-12	-55