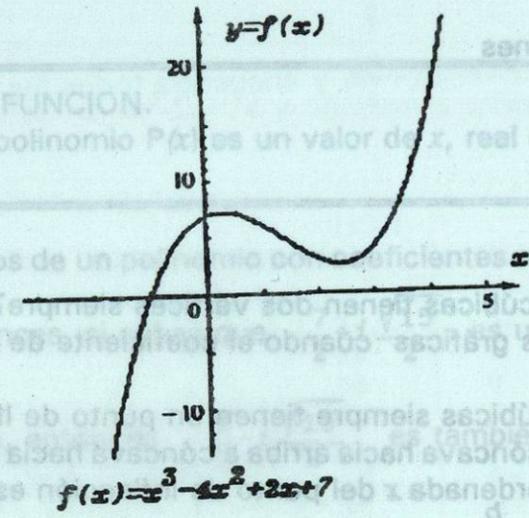


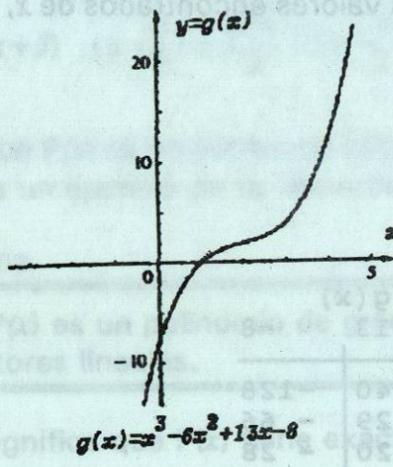
Definición

**CERO DE UNA FUNCIÓN.**

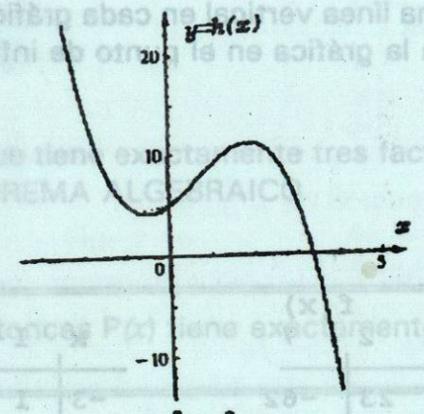
Un cero de un polinomio  $P(x)$  es un valor de  $x$ , real o complejo, al cual hace  $P(x) = 0$



$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 7$$



$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$$



$$h(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x + 5$$

Fig. 1.4c

- b. No. Las funciones  $f(x)$  y  $h(x)$  tienen dos vértices. En la función  $g(x)$  la gráfica empieza a cambiar de sentido (LA CURVA) pareciendo formar el vértice pero vuelve a cambiar repentinamente en el otro sentido antes de que el vértice sea formado.
- c. Si el coeficiente de  $x^3$  es negativo, la gráfica viene hacia abajo desde la parte izquierda superior del plano de coordenadas y va hacia la parte inferior derecha del mismo plano coordinado para valores grandes de  $x$ . El término  $x^3$  es mucho más grande que los otros términos. Así si  $y = ax^3$  verás que si  $x$  es un número grande negativo y  $a$  es negativo, entonces  $y$  será positivo, y la gráfica estará en el segundo cuadrante. Similarmente si  $x$  es un gran número positivo y  $a$  es negativo, luego  $y$  será negativo y la gráfica estará en el cuarto cuadrante.

d.

$$f(x): x = -\frac{b}{3a} = -\frac{(-4)}{(3)(1)} = \frac{4}{3}$$

$$g(x): x = -\frac{b}{3a} = -\frac{(-6)}{(3)(1)} = 2$$

$$h(x): x = -\frac{b}{3a} = -\frac{(2)}{(3)(-1)} = \frac{2}{3}$$

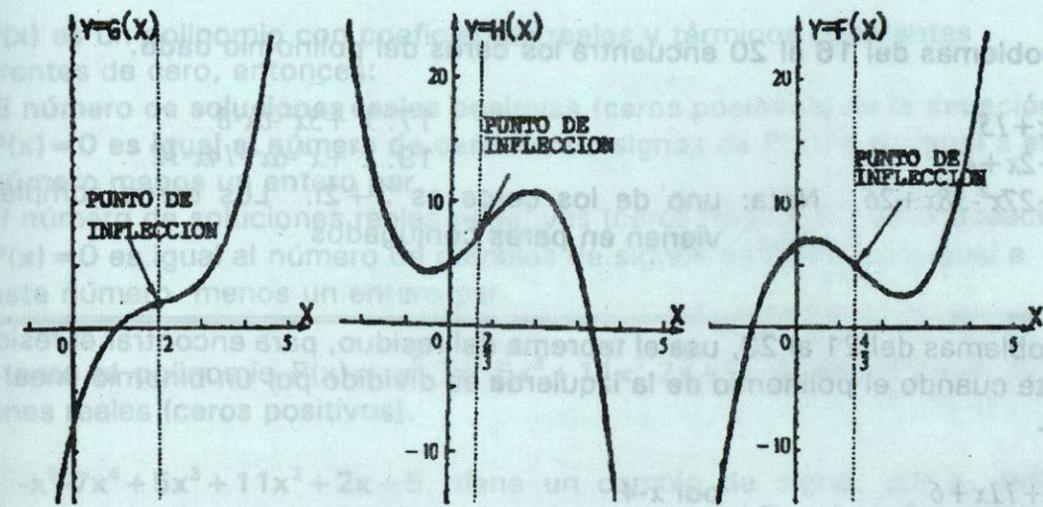


Fig. 1.4d

El ejercicio que sigue es dirigido para darte práctica en analizar polinomios de grado superior encontrando los ceros y los puntos de inflección y trazar las gráficas.

**Ejercicio 1.4**

Para los problemas del 1 al 5 encuentra el valor de la función indicado por sustitución sintética

- |  |                   |
|--|-------------------|
| 1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 11x + 4$ .             | Encuentra $f(2)$  |
| 2. $h(x) = 5x^3 - 3x^2 - 8x + 20$ .            | Encuentra $h(4)$  |
| 3. $p(x) = -2x^3 + 4x^2 - 9x + 40$ .           | Encuentra $p(3)$  |
| 4. $r(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 11$ .             | Encuentra $r(-5)$ |
| 5. $m(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x + 21$ . | Encuentra $m(2)$  |

Para los problemas del 6 al 15.

- a. Haz la gráfica en el dominio dado, calculando los puntos a trazar por sustitución sintética.
- b. Encuentra todos los ceros reales y complejos.
- |                                  |                    |
|----------------------------------|--------------------|
| 6. $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$   | $-3 \leq x \leq 5$ |
| 7. $p(x) = x^3 - 7x^2 + 11x + 3$ | $-2 \leq x \leq 6$ |
| 8. $p(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$   | $-4 \leq x \leq 3$ |
| 9. $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$  | $-4 \leq x \leq 3$ |

10.  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 19$   $-2 \leq x \leq 5$   
 11.  $p(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8x + 12$   $-4 \leq x \leq 3$   
 12.  $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 17x - 39$   $-4 \leq x \leq 4$   
 13.  $p(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$   $-4 \leq x \leq 4$   
 14.  $p(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 22x - 20$   $-3 \leq x \leq 5$   
 15.  $p(x) = -x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 44x - 51$   $-5 \leq x \leq 4$

Para los problemas del 16 al 20 encuentra los ceros del polinomio dado.

16.  $x^3 + x^2 - x + 15$

18.  $x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

20.  $x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 38x + 26$

17.  $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

19.  $x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12$

Nota: uno de los ceros es  $3 + 2i$ . Los ceros complejos vienen en pares conjugados

Para los problemas del 21 al 23, usa el teorema del residuo, para encontrar el residuo rápidamente cuando el polinomio de la izquierda es dividido por un binomio lineal de la derecha.

21.  $2x^3 - 5x^2 + 11x + 6$

22.  $x^5 - 3x^2 + 14$

23.  $x^{51} + 51$

por  $x - 4$

por  $x + 2$

por  $x + 1$

Para los problemas del 24 al 29 usa lo que haz observado acerca de las funciones de más alto grado y lo que sabes acerca del teorema fundamental del álgebra y su corolario, para graficar las funciones descritas.

24. Función a la quinta con tres ceros reales exactamente.  
 25. Función de grado sexto con cuatro ceros reales exactamente.  
 26. Función cúbica con dos distintos ceros reales exactamente.  
 27. Función a la cuarta sin ceros reales.  
 28. Función cúbica sin ceros reales.  
 29. Función a la cuarta con 5 ceros reales exactamente.

### 1.5 Regla de los signos de Descartes

Conoces el teorema del factor que dice que  $(x - c)$  es un factor del polinomio  $P(x)$  sí y solo sí  $P(c) = 0$ . El número  $c$  es llamado un cero de  $P(x)$ , o una solución de la ecuación  $P(x) = 0$ . Aquí aprenderás las propiedades que hacen más corta la búsqueda de los factores o ceros de un polinomio por medio de la prueba y error.

Dando a  $x$  un valor positivo en un polinomio como  $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 8x + 6$  que solo tiene coeficientes positivos siempre produce una respuesta positiva. Si el polinomio tiene tanto coeficientes positivos como negativos, puede haber ceros positivos. A René Descartes se le acredita el descubrimiento de que el número de cambio de signos

de término a término limita el número de los ceros positivos. Por ejemplo:  $P(x) = x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 2x + 5$  tiene cuatro cambios de signo. la regla de los signos de Descartes es como sigue:

### REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES:

Si  $P(x)$  es un polinomio con coeficientes reales y términos constantes diferentes de cero, entonces:

- i) El número de soluciones reales positivas (ceros positivos) de la ecuación  $P(x) = 0$  es igual al número de cambios de signos de  $P(x)$ , o es igual a este número menos un entero par.
- ii) El número de soluciones reales negativas (ceros negativos) de la ecuación  $P(x) = 0$  es igual al número de cambios de signos de  $P(-x)$ , o es igual a este número menos un entero par.

Por lo tanto el polinomio  $P(x) = x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 2x + 5$ , puede tener 4, 2 o cero soluciones reales (ceros positivos).

$P(-x) = -x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 2x + 5$ , tiene un cambio de signo, por lo tanto una solución real negativa (cero negativo). Por el corolario del Teorema Fundamental del Álgebra  $P(x)$  tiene exactamente cinco soluciones (cinco ceros). En la siguiente tabla se resumen las distintas posibilidades para las soluciones de la ecuación  $P(x) = 0$ .

Número de soluciones reales positivas	4	2	0
Número de soluciones reales negativas	1	1	1
Número de soluciones complejas	0	2	4
Número total de soluciones	5	5	5

Un teorema relacionado habla acerca del máximo y el mínimo del valor posible de los ceros reales.

### Teorema

#### TEOREMA DE COTAS PARA LAS RAICES REALES DE UN POLINOMIO $P(x)$

Supongamos que  $P(x)$  es un polinomio con coeficientes reales cuyo coeficiente principal es positivo y supongamos efectuada la división sintética de  $P(x)$  entre  $(x - C)$ .

- 1) Si  $C > 0$ , y si todos los números del tercer renglón de la división sintética son positivos o cero, entonces  $C$  es una cota superior de las soluciones reales de  $P(x) = 0$ .
- 2) Si  $C < 0$ , y si los números del tercer renglón de la división sintética son alternadamente positivos y negativos (donde se considera que un cero del tercer renglón es positivo o negativo), entonces  $C$  es una cota inferior de las soluciones reales de  $P(x) = 0$ .

Ejemplo

Hallar las cotas superior e inferior del polinomio  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 14$  cuya gráfica se muestra en la figura 1-5a.

En la gráfica tienes dos ceros positivos y un cero negativo, lo cual confirma la regla de los signos de Descartes.

$P(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 14$       2      cambio de signo  
 $P(-x) = -x^3 - 4x^2 + 5x + 14$       1      cambio de signo

x	P(x)			
	1	-4	-5	14
-4	1	-8	27	-94
-3	1	-7	16	-34
-2	1	-6	7	0
-1	1	-5	0	14
0	1	-4	-5	14
1	1	-3	-8	6
2	1	-2	-9	-4
3	1	-1	-8	-10
4	1	0	-5	-6
5	1	1	0	14
6	1	2	7	56

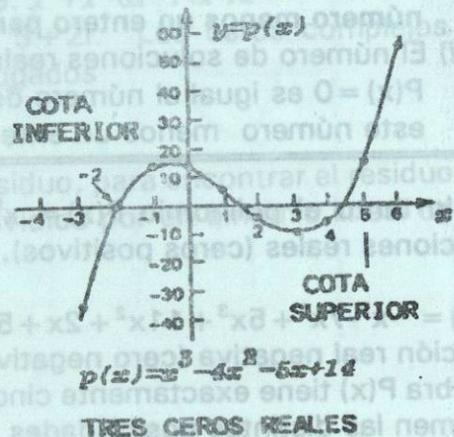


Fig. 1-5a

De la tabla puedes ver que si  $x \geq 5$  los signos del cociente y el residuo son todos positivos, entonces 5 es una cota superior de las soluciones reales. Y si  $x \leq -3$  los signos del cociente y el residuo se alternan, entonces -3 es una cota inferior de las soluciones reales. Todas las soluciones reales de la función dada están en el intervalo  $[-3; 5]$ .

En el siguiente ejercicio aprenderás lo que la regla de los signos de Descartes y el teorema de la cota superior e inferior dicen.

Ejercicio 1-5

Para los problemas del 1 al 5 encuentra el número de las posibles soluciones, positivas, negativas y complejas

- $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$
- $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
- $P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$
- $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$
- $P(x) = x^8 + 3x^6 + 4x^2 + 5$

Para los problemas del 6 al 9 encuentra los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior, respectivamente. Traza la gráfica para los valores de  $x$  entre estos

dos enteros inclusive.

- $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$
- $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x + 4$
- $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 5$
- $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 3$

10. El trinomio  $x^2 + 2x + 8$  no tiene ceros positivos porque no hay cambio de signo. Si este trinomio es multiplicado por  $(x-c)$  el polinomio que resulta,  $P(x) = (x-c)(x^2 + 2x + 8)$  tiene exactamente un cero positivo, llámalo C (C es un número positivo)

- Encuentra un valor de C para el cual  $P(x)$ , cuando es multiplicado, tiene un solo cambio de signo.
- Encuentra un valor de C para el cual  $P(x)$  tiene exactamente 3 cambios de signo.
- Explique porque  $P(x)$  no puede tener dos cambios de signo exactamente.

11. El trinomio  $x^2 - 3x + 15$  tiene 2 cambios de signo

- De acuerdo a la regla de Descartes ¿cuántos ceros puede tener?
- ¿Cuántos ceros positivos tiene? Justifica la respuesta.
- Usa la regla de Descartes para mostrar que el trinomio no tiene ceros negativos.
- Si C es un número positivo, luego el polinomio  $P(x) = (x+c)(x^2 - 3x + 15)$  tiene exactamente un cero negativo llamado -C. Encuentra un valor de C para el cual  $P(-x)$  cuando se multiplica, tiene exactamente 3 cambios de signo.
- Explica porque  $P(-x)$  en la parte d no puede tener 2 cambios de signo exactamente.

12. De acuerdo a la regla de Descartes, que puede ser dicho a cerca del número de ceros de polinomios que empiezan y terminan como los siguientes.

- $x^4 \dots + 8$
- $x^{15} \dots + 8$
- $x^9 \dots - 4$
- $x^8 \dots - 4$

13. Basado en la respuesta del problema 12, escribe una conclusión concerniente a la paridad (par o impar) del número de cambios de signo en un polinomio en el que el primer término es positivo.

14. Encuentra los ceros reales, luego usa la regla de Descartes para probar que no hay otros ceros reales.

- $P(x) = x^5 - 32$
- $P(x) = x^5 + 32$
- $P(x) = x^6 - 64$
- $P(x) = x^{10} + 1$

15. El polinomio  $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 2x + 13$  tiene dos cambios de signo, por lo tanto puede tener 0 ó 2 ceros positivos.

- Muestra que aunque  $P(2)$  y  $P(3)$  son positivos, hay un cero entre  $x=2$  y  $x=3$ . Dibuja la gráfica.
- Usa el teorema de los límites para mostrar que 4 es un límite superior para los ceros de  $P(x)$ .
- Explica porque 3 es también un límite superior para los ceros aunque el cociente  $\frac{P(x)}{x-3}$  no tiene cambios de signo. Como es este factor consistente con el teorema de los límites superiores.

### 1.6 Funciones de grado superior como "Modelos Matemáticos"

Las funciones de grado superior son usados como modelos matemáticos en dos formas básicamente. Una función puede volverse un polinomio basado en consideraciones teóricas. Por ejemplo, la figura en la cual una viga de madera cargada es la gráfica de una función polinomial. El grado de la función es determinado por la forma en que el peso es distribuido a lo largo de la viga y de la manera en que la viga soporta el peso.

La segunda forma de funciones polinomiales que son aplicados es empezar por asumir que la función polinomial es un modelo razonable, y luego se acondiciona a la gráfica de polinomio para medir puntos experimentales. Un modelo creado en esta forma es llamado un modelo "empírico". Por ejemplo si asumes una función cúbica, entonces es una ecuación de la forma  $y=ax^3+bx^2+cx+d$  donde  $a, b, c, d$  son constantes. Acondicionando el modelo de los datos requiere encontrar valores de estas constantes sustituyendo los valores de  $(x, y)$  y resolviendo el sistema.

#### Objetivo

Dada una situación real en la cual una variable depende de otra ya sea función cúbica o de más alto grado. Encuentra la ecuación particular y usa esto como modelo matemático.

Dado que la técnica de encontrar una ecuación particular es familiar, aquí no presentamos ejemplos específicos.

El ejercicio que sigue contiene problemas de los dos tipos. También hay problemas en los cuales funciones polinómicas son usados como modelos matemáticos del mundo matemático.

#### Ejercicio 1.6

##### 1. Problema de la deflexión de una viga.

Una viga horizontal de 10 mts. de largo termina en su parte izquierda dentro de una pared y su extremo derecho termina y descansa en un soporte, como se muestra en la figura 1.6a. la viga es cargada con peso uniformemente distribuido a lo largo. Como resultado la viga cuelga de arriba hacia abajo de acuerdo a la ecuación  $y=-x^4+25x^3-150x^2$ , donde  $x$  es el número de metros de la pared a un punto de la viga, y  $y$  es el número de centésimas de un milímetro de eje  $x$  a la viga.

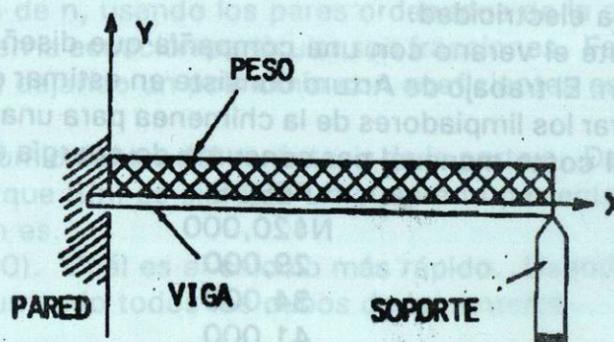


Fig. 1.6a

- ¿Cuál es el dominio apropiado para  $x$ ?
- Encuentra los ceros de esta función y di lo que representan en el mundo real.
- Usando todos los valores enteros de  $x$  en el dominio traza la gráfica de esta función.

##### 2. Problema de la tabla de clavados. (Trampolín)

Cuando te paras en un trampolín (Fig. 1.6b) la cantidad que la tabla se dobla, abajo de su punto de descanso es una función cúbica de  $x$ . Supón que mides las siguientes deflexiones del punto de descanso al punto del trampolín.

$x$ (pies)	$y$ (milésimas de pulgada)
0	0
1	116
2	448
3	972

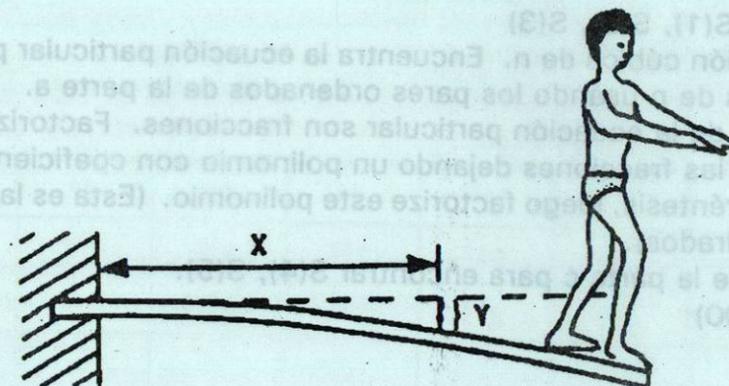


Fig. 1.6b

- Deriva la ecuación particular expresando  $y$  en términos de  $x$ .
- La tabla tiene 10 pies de largo. ¿Qué tanto se inclina hacia abajo de la longitud?

3. Problema del costo de la electricidad.

El Sr. Arturo trabaja durante el verano con una compañía que diseña equipo para el control de la contaminación. El trabajo de Arturo consiste en estimar el costo mensual de la electricidad para operar los limpiadores de la chimenea para una nueva planta de cemento. Encuentra que el costo mensual por consumo de energía es la siguiente:

Kilowatt/h (kwh)	PESOS
1,000,000	N\$20,000
2,000,000	29,000
3,000,000	34,000
4,000,000	41,000

Como necesita el costo de cualquier cantidad de energía de 1,000,000 a 4,000,000 kwh, debe tener una ecuación expresando el costo en términos de kwh. Decide si una función cúbica es razonable.

- Deja que  $D$  = número de miles de dólares por mes, y deja a  $K$  = número de millones de kwh por mes. Escribe la ecuación particular expresando  $D$  en términos de  $K$ .
- ¿Cuál será el costo de 1.5 millones de kwh?
- De acuerdo con tu modelo, cuanto pagarías si no usas electricidad en un mes dado? ¿Es razonable? Explica.
- Sin exceder de \$35000 por mes cuánta electricidad puede ser usada. Dibuja una gráfica de  $D$  contra  $K$ , y usa la gráfica para estimar este número.

4. Problema de la suma de los cuadrados.

Deja a  $S(n)$  ser la suma de los cuadrados de los enteros de 0 a  $n$ . Que es  $S(n) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

- Encuentra  $S(0)$ ,  $S(1)$ ,  $S(2)$ ,  $S(3)$
- $S(n)$  es una función cúbica de  $n$ . Encuentra la ecuación particular para expresar  $S(n)$  en términos de  $n$  usando los pares ordenados de la parte a.
- Los coeficientes de la ecuación particular son fracciones. Factoriza apropiadamente las fracciones dejando un polinomio con coeficientes enteros dentro de los paréntesis, luego factoriza este polinomio. (Esta es la fórmula para la suma de cuadrados).
- Usa la fórmula de la parte c para encontrar  $S(4)$ ,  $S(5)$ .
- Encuentra  $S(1000)$

5. Problema de la suma de los cubos

Deja que  $S(n)$  sea la suma de los cubos de los enteros de 0 a  $n$ . Esto es  $S(n) = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

- Encuentra  $S(0)$ ,  $S(1)$ ,  $S(2)$ ,  $S(3)$  y  $S(4)$ . Verás que todos los números son cuadrados perfectos.
- $S(n)$  es una función cuártica de  $n$ . Encuentra la ecuación particular expresando

$S(n)$  en términos de  $n$ , usando los pares ordenados de la parte a.

- Los coeficientes en la ecuación particular son fracciones. Factoriza las fracciones apropiadamente, dejando un polinomio con coeficientes enteros dentro del paréntesis.
- Factoriza el polinomio dentro del paréntesis de la parte c. Da una respuesta como puedes concluir que  $S(n)$  es siempre un cuadrado perfecto, no importando que entero positivo  $n$  es.
- Encuentra  $F(1000)$ . Cuál es el cálculo más rápido. Usando la fórmula que encuentre o sumando todos los cubos de los enteros.

20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107
108	109	110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121	122	123
124	125	126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145	146	147
148	149	150	151	152	153	154	155
156	157	158	159	160	161	162	163
164	165	166	167	168	169	170	171
172	173	174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185	186	187
188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203
204	205	206	207	208	209	210	211
212	213	214	215	216	217	218	219
220	221	222	223	224	225	226	227
228	229	230	231	232	233	234	235
236	237	238	239	240	241	242	243
244	245	246	247	248	249	250	251
252	253	254	255	256	257	258	259
260	261	262	263	264	265	266	267
268	269	270	271	272	273	274	275
276	277	278	279	280	281	282	283
284	285	286	287	288	289	290	291
292	293	294	295	296	297	298	299
300	301	302	303	304	305	306	307
308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323
324	325	326	327	328	329	330	331
332	333	334	335	336	337	338	339
340	341	342	343	344	345	346	347
348	349	350	351	352	353	354	355
356	357	358	359	360	361	362	363
364	365	366	367	368	369	370	371
372	373	374	375	376	377	378	379
380	381	382	383	384	385	386	387
388	389	390	391	392	393	394	395
396	397	398	399	400	401	402	403
404	405	406	407	408	409	410	411
412	413	414	415	416	417	418	419
420	421	422	423	424	425	426	427
428	429	430	431	432	433	434	435
436	437	438	439	440	441	442	443
444	445	446	447	448	449	450	451
452	453	454	455	456	457	458	459
460	461	462	463	464	465	466	467
468	469	470	471	472	473	474	475
476	477	478	479	480	481	482	483
484	485	486	487	488	489	490	491
492	493	494	495	496	497	498	499
500	501	502	503	504	505	506	507
508	509	510	511	512	513	514	515
516	517	518	519	520	521	522	523
524	525	526	527	528	529	530	531
532	533	534	535	536	537	538	539
540	541	542	543	544	545	546	547
548	549	550	551	552	553	554	555
556	557	558	559	560	561	562	563
564	565	566	567	568	569	570	571
572	573	574	575	576	577	578	579
580	581	582	583	584	585	586	587
588	589	590	591	592	593	594	595
596	597	598	599	600	601	602	603
604	605	606	607	608	609	610	611
612	613	614	615	616	617	618	619
620	621	622	623	624	625	626	627
628	629	630	631	632	633	634	635
636	637	638	639	640	641	642	643
644	645	646	647	648	649	650	651
652	653	654	655	656	657	658	659
660	661	662	663	664	665	666	667
668	669	670	671	672	673	674	675
676	677	678	679	680	681	682	683
684	685	686	687	688	689	690	691
692	693	694	695	696	697	698	699
700	701	702	703	704	705	706	707
708	709	710	711	712	713	714	715
716	717	718	719	720	721	722	723
724	725	726	727	728	729	730	731
732	733	734	735	736	737	738	739
740	741	742	743	744	745	746	747
748	749	750	751	752	753	754	755
756	757	758	759	760	761	762	763
764	765	766	767	768	769	770	771
772	773	774	775	776	777	778	779
780	781	782	783	784	785	786	787
788	789	790	791	792	793	794	795
796	797	798	799	800	801	802	803
804	805	806	807	808	809	810	811
812	813	814	815	816	817	818	819
820	821	822	823	824	825	826	827
828	829	830	831	832	833	834	835
836	837	838	839	840	841	842	843
844	845	846	847	848	849	850	851
852	853	854	855	856	857	858	859
860	861	862	863	864	865	866	867
868	869	870	871	872	873	874	875
876	877	878	879	880	881	882	883
884	885	886	887	888	889	890	891
892	893	894	895	896	897	898	899
900	901	902	903	904	905	906	907
908	909	910	911	912	913	914	915
916	917	918	919	920	921	922	923
924	925	926	927	928	929	930	931
932	933	934	935	936	937	938	939
940	941	942	943	944	945	946	947
948	949	950	951	952	953	954	955
956	957	958	959	960	961	962	963
964	965	966	967	968	969	970	971
972	973	974	975	976	977	978	979
980	981	982	983	984	985	986	987
988	989	990	991	992	993	994	995
996	997	998	999	1000			