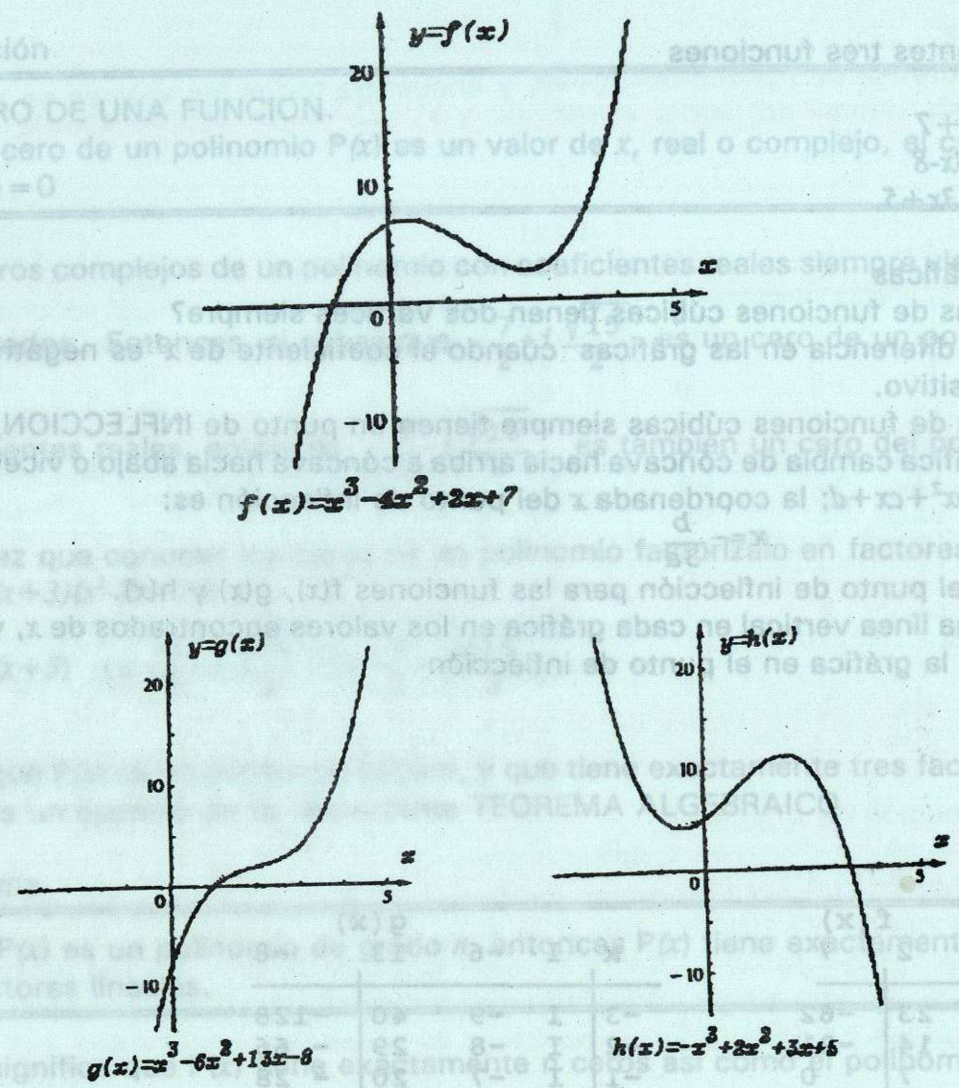


Fig. 1.4c

b. No. Las funciones f(x) y h(x) tienen dos vértices. En la función g(x) la gráfica empieza a cambiar de sentido (LA CURVA) pareciendo formar el vértice pero vuelve a cambiar repentinamente en el otro sentido antes de que el vértice sea formado.

c. Si el coeficiente de x^3 es negativo, la gráfica viene hacia abajo desde la parte izquierda superior del plano de coordenadas y va hacia la parte inferior derecha del mismo plano coordenado para valores grandes de x. El término x^3 es mucho más grande que los otros términos. Así si $y=ax^3$ verás que si x es un número grande negativo y a es negativo, entonces y será positivo, y la gráfica estará en el segundo cuadrante. Similarmente si x es un gran número positivo y a es negativo, luego y será negativo y la gráfica estará en el cuarto cuadrante.

d. f(x): $x=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{(-4)}{(3)(1)}=\dfrac{4}{3}$

g(x): $x=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{(-6)}{(3)(1)}=2$

h(x): $x=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{(2)}{(3)(-1)}=\dfrac{2}{3}$

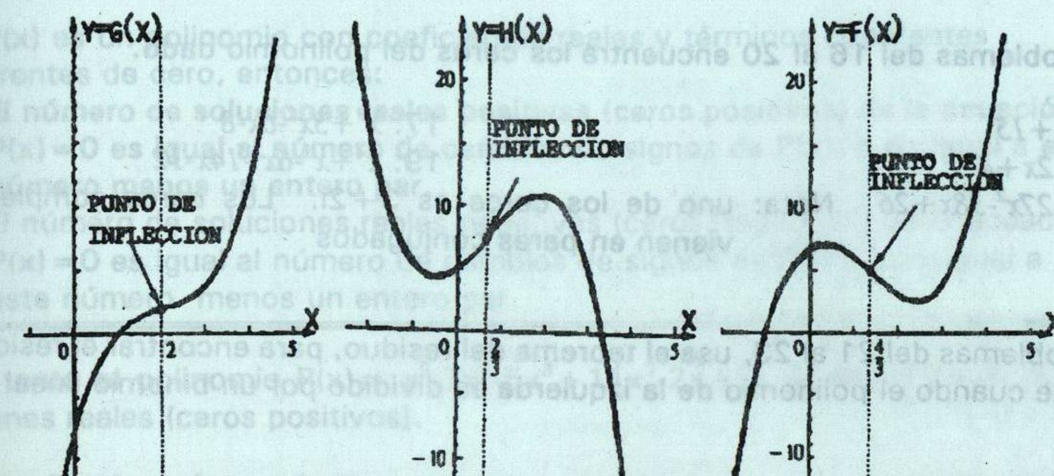


Fig. 1.4d

El ejercicio que sigue es dirigido para darte práctica en analizar polinomios de grado superior encontrando los ceros y los puntos de inflección y trazar las gráficas.

Ejercicio 1.4

Para los problemas del 1 al 5 encuentra el valor de la función indicado por sustitución sintética

1. $f(x)=x^3+7x^2-11x+4$.	Encuentra f(2)
2. $h(x)=5x^3-3x^2-8x+20$.	Encuentra h(4)
3. $p(x)=-2x^3+4x^2-9x+40$.	Encuentra p(3)
4. $r(x)=x^3+6x^2-4x+11$.	Encuentra r(-5)
5. $m(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2+4x+21$.	Encuentra m(2)

Para los problemas del 6 al 15.

a. Haz la gráfica en el dominio dado, calculando los puntos a trazar por sustitución sintética.

b. Encuentra todos los ceros reales y complejos.

6. $p(x)=x^3-4x^2+x+6$	$-3\le x\le 5$
7. $p(x)=x^3-7x^2+11x+3$	$-2\le x\le 6$
8. $p(x)=x^3+x^2-4x+6$	$-4\le x\le 3$
9. $p(x)=x^3+2x^2-4x-8$	$-4\le x\le 3$

10. $p(x)=x^3-6x^2+12x+19$ $-2\leq x\leq 5$
11. $p(x)=-2x^3-3x^2+8x+12$ $-4\leq x\leq 3$
12. $p(x)=2x^3+4x^2-17x-39$ $-4\leq x\leq 4$
13. $p(x)=x^4-x^3-11x^2+9x+18$ $-4\leq x\leq 4$
14. $p(x)=x^4-5x^3+2x^2+22x-20$ $-3\leq x\leq 5$
15. $p(x)=-x^4-4x^3+12x^2+44x-51$ $-5\leq x\leq 4$

Para los problemas del 16 al 20 encuentra los ceros del polinomio dado.

16. x^3+x^2-x+15
17. x^3+3x^2-6x-8
18. x^3-4x^2+2x+4
19. $x^4+x^3-6x^2-14x-12$
20. $x^4-8x^3+27x^2-38x+26$ Nota: uno de los ceros es $3+2i$. Los ceros complejos vienen en pares conjugados

Para los problemas del 21 al 23, usa el teorema del residuo, para encontrar el residuo rápidamente cuando el polinomio de la izquierda es dividido por un binomio lineal de la derecha.

21. $2x^3-5x^2+11x+6$ por $x-4$
22. x^5-3x^2+14 por $x+2$
23. $x^{51}+51$ por $x+1$

Para los problemas del 24 al 29 usa lo que haz observado acerca de las funciones de más alto grado y lo que sabes acerca del teorema fundamental del álgebra y su corolario, para graficar las funciones descritas.

24. Función a la quinta con tres ceros reales exactamente.
25. Función de grado sexto con cuatro ceros reales exactamente.
26. Función cúbica con dos distintos ceros reales exactamente.
27. Función a la cuarta sin ceros reales.
28. Función cúbica sin ceros reales.
29. Función a la cuarta con 5 ceros reales exactamente.

1.5 Regla de los signos de Descartes

Conoces el teorema del factor que dice que $(x-c)$ es un factor del polinomio $P(x)$ sí y solo sí $P(c)=0$. El número c es llamado un cero de $P(x)$, o una solución de la ecuación $P(x)=0$. Aquí aprenderás las propiedades que hacen más corta la búsqueda de los factores o ceros de un polinomio por medio de la prueba y error.

Dando a x un valor positivo en un polinomio como $P(x)=3x^4+5x^3+x^2+8x+6$ que solo tiene coeficientes positivos siempre produce una respuesta positiva. Si el polinomio tiene tanto coeficientes positivos como negativos, puede haber ceros positivos. A René Descartes se le acredita el descubrimiento de que el número de cambio de signos

de término a término limita el número de los ceros positivos. Por ejemplo: $P(x)=x^5-7x^4-5x^3+11x^2-2x+5$ tiene cuatro cambios de signo. la regla de los signos de Descartes es como sigue:

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES:

Si P(x) es un polinomio con coeficientes reales y términos constantes diferentes de cero, entonces:

i) **El número de soluciones reales positivas (ceros positivos) de la ecuación $P(x)=0$ es igual al número de cambios de signos de P(x), o es igual a este número menos un entero par.**

ii) El número de soluciones reales negativas (ceros negativos) de la ecuación $P(x)=0$ es igual al número de cambios de signos de P(-x), o es igual a este número menos un entero par.

Por lo tanto el polinomio $P(x)= x^5-7x^4-5x^3+11x^2-2x+5$, puede tener 4, 2 o cero soluciones reales (ceros positivos).

$P(-x)= -x^5-7x^4+5x^3+11x^2+2x+5$, tiene un cambio de signo, por lo tanto una solución real negativa (cero negativo). Por el corolario del Teoréma Fundamental del Algebra P(x) tiene exactamente cinco soluciones (cinco ceros). En la siguinte tabla se resumen las distintas posibilidades para las soluciones de la ecuación $P(x)=0$.

Número de soluciones reales positivas	4	2	0
Número de soluciones reales negativas	1	1	1
Número de soluciones complejas	0	2	4
Número total de soluciones	5	5	5

Un teorema relacionado habla acerca del máximo y el mínimo del valor posible de los ceros reales.

Teorema

TEOREMA DE COTAS PARA LAS RAICES REALES DE UN POLINOMIO P(x)

Supongamos que P(x) es un polinomio con coeficientes reales cuyo coeficiente principal es positivo y supongamos efectuada la división sintética de P(x) entre (x-C).

1) Si C>0, y si todos los números del tercer renglón de la división sintética son positivos o cero, entonces C es una cota superior de las soluciones reales de $P(x)=0$.

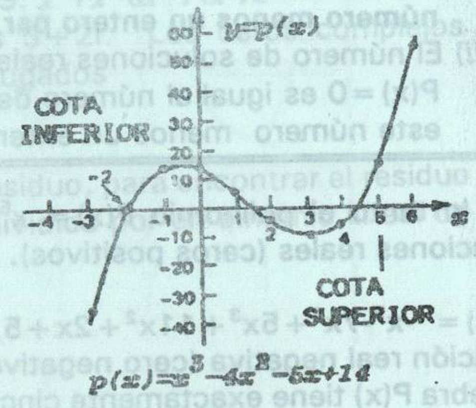
2) Si C<0, y si los números del tercer renglón de la división sintética son alternadamente pósitivos y negativos (donde se considera que un cero del tercer renglón es positivo o negativo), entonces C es una cota inferior de las soluciones reales de $P(x)=0$.

Ejemplo
Hallar las cotas superior e inferior del polinomio $P(x)=x^3-4x^2-5x+14$ cuya gráfica se muestra en la figura 1-5a.

En la gráfica tienes dos ceros positivos y un cero negativo, lo cual confirma la regla de los signos de Descartes.

$P(x)=x^3-4x^2-5x+14$	2	cambio de signo
$P(-x)=-x^3-4x^2+5x+14$	1	cambio de signo

	P(x)			
x	1	-4	-5	14
-4	1	-8	27	-94
-3	1	-7	16	-34
-2	1	-6	7	0
-1	1	-5	0	14
0	1	-4	-5	14
1	1	-3	-8	6
2	1	-2	-9	-4
3	1	-1	-8	-10
4	1	0	-5	-6
5	1	1	0	14
6	1	2	7	56



TRES CEROS REALES

Fig. 1-5a

De la tabla puedes ver que si $x \geq 5$ los signos del cociente y el residuo son todos positivos, entonces 5 es una cota superior de las soluciones reales. Y si $x \leq -3$ los signos del cociente y el residuo se alternan, entonces -3 es una cota inferior de las soluciones reales. Todas las soluciones reales de la función dada están en el intervalo [-3;5].

En el siguiente ejercicio aprenderás lo que la regla de los signos de Descartes y el teorema de la cota superior e inferior dicen.

Ejercicio 1-5

Para los problemas del 1 al 5 encuentra el número de las posibles soluciones, positivas, negativas y complejas

1. $P(x)=x^3-5x^2+3x+7$
2. $P(x)=x^3-5x^2+3x-1$
3. $P(x)=x^4-2x^3-x+1$
4. $P(x)=x^4+x^3-5x^2+x-6$
5. $P(x)=x^8+3x^6+4x^2+5$

Para los problemas del 6 al 9 encuentra los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior, respectivamente. Traza la gráfica para los valores de x entre estos dos enteros inclusive.

6. $P(x)=x^3-2x^2-5x+3$
7. $P(x)=x^3+2x^2+4x-5$
8. $P(x)=3x^3-5x^2+7x+4$
9. $P(x)=2x^3+2x^2-8x-3$

10. El trinomio x^2+2x+8 no tiene ceros positivos porque no hay cambio de signo. Si este trinomio es multiplicado por $(x-c)$ el polinomio que resulta, $P(x)=(x-c)(x^2+2x+8)$ tiene exactamente un cero positivo, llámalo C (C es un número positivo)
a. Encuentra un valor de C para el cual $P(x)$, cuando es multiplicado, tiene un solo cambio de signo.
b. Encuentra un valor de C para el cual $P(x)$ tiene exactamente 3 cambios de signo.
c. Explique porque $P(x)$ no puede tener dos cambios de signo exactamente.

11. El trinomio $x^2-3x+15$ tiene 2 cambios de signo
a. De acuerdo a la regla de Descartes ¿cuántos ceros puede tener?
b. ¿Cuántos ceros positivos tiene? Justifica la respuesta.
c. Usa la regla de Descartes para mostrar que el trinomio no tiene ceros negativos.
d. Si C es un número positivo, luego el polinomio $P(x)=(x+c)(x^2-3x+15)$ tiene exactamente un cero negativo llamado -C. Encuentra un valor de C para el cual $P(-x)$ cuando se multiplica, tiene exactamente 3 cambios de signo.
e. Explica porque $P(-x)$ en la parte d no puede tener 2 cambios de signo exactamente.

12. De acuerdo a la regla de Descartes, que puede ser dicho a cerca del número de ceros de polinomios que empiezan y terminan como los siguientes.
a. $x^{14}....+8$
b. $x^{15}....+8$
c. $x^9....-4$
d. $x^8....-4$

13. Basado en la respuesta del problema 12, escribe una conclusión concerniente a la paridad (par o impar) del número de cambios de signo en un polinomio en el que el primer término es positivo.

14. Encuentra los ceros reales, luego usa la regla de Descartes para probar que no hay otros ceros reales.
a. $P(x)=x^5-32$
b. $P(x)=x^5+32$
c. $P(x)=x^6-64$
d. $P(x)=x^{10}+1$

15. El polinomio $P(x)=2x^3-8x^2+2x+13$ tiene dos cambios de signo, por lo tanto puede tener 0 ó 2 ceros positivos.
a. Muestra que aunque P(2) y P(3) son positivos, hay un cero entre $x=2$ y $x=3$. Dibuja la gráfica.
b. Usa el teorema de los límites para mostrar que 4 es un límite superior para los ceros de $P(x)$.
c. Explica porque 3 es también un límite superior para los ceros aunque el cociente $\frac{P(x)}{x-3}$ no tiene cambios de signo. Como es este factor consistente con el teorema de los límites superiores.

1.6 Funciones de grado superior como "Modelos Matemáticos"

Las funciones de grado superior son usados como modelos matemáticos en dos formas básicamente. Una función puede volverse un polinomio basado en consideraciones teóricas. Por ejemplo, la figura en la cual una viga de madera cargada es la gráfica de una función polinomial. El grado de la función es determinado por la forma en que el peso es distribuido a lo largo de la viga y de la manera en que la viga soporta el peso.

La segunda forma de funciones polinomiales que son aplicados es empezar por asumir que la función polinomial es un modelo razonable, y luego se acondiciona a la gráfica de polinomio para medir puntos experimentales. Un modelo creado en esta forma es llamado un modelo "empírico". Por ejemplo si asumes una función cúbica, entonces es una ecuación de la forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$ donde a,b,c,d son constantes. Acondicionando el modelo de los datos requiere encontrar valores de estas constantes sustituyendo los valores de (x,y) y resolviendo el sistema.

Objetivo

Dada una situación real en la cual una variable depende de otra ya sea función cúbica o de más alto grado. Encuentra la ecuación particular y usa esto como modelo matemático.

Dado que la técnica de encontrar una ecuación particular es familiar, aquí no presentamos ejemplos específicos.

El ejercicio que sigue contiene problemas de los dos tipos. También hay problemas en los cuales funciones polinómicas son usados como modelos matemáticos del mundo matemático.

Ejercicio 1.6

1. Problema de la deflección de una viga.
Una viga horizontal de 10 mts. de largo termina en su parte izquierda dentro de una pared y su extremo derecho termina y descansa en un soporte, como se muestra en la figura 1.6a. la viga es cargada con peso uniformemente distribuido a lo largo. Como resultado la viga cuelga de arriba hacia abajo de acuerdo a la ecuación $y=-x^4+25x^3-150x^2$, donde x es el número de metros de la pared a un punto de la viga, y y es el número de centésimas de un milímetro de eje x a la viga.

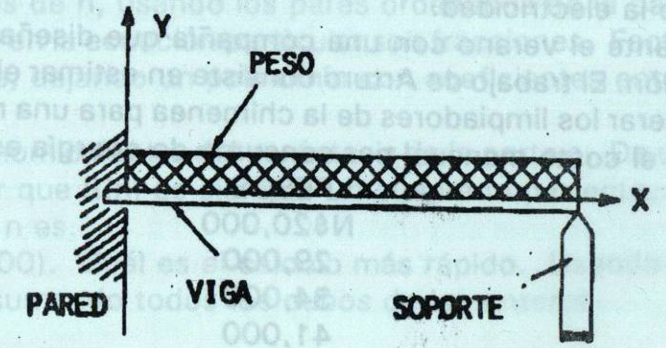


Fig. 1.6a

a. ¿Cuál es el dominio apropiado para x ?
b. Encuentra los ceros de esta función y di lo que representan en el mundo real.
c. Usando todos los valores enteros de x en el dominio traza la gráfica de esta función.

2. Problema de la tabla de clavados. (Trampolín)
Cuando te paras en un trampolín (Fig. 1.6b) la cantidad que la tabla se dobla, abajo de su punto de descanso es una función cúbica de x. Supón que mides las siguientes deflecciones del punto de descanso al punto del trampolín.

x (pies)	y (milésimas de pulgada)
0	0
1	116
2	448
3	972

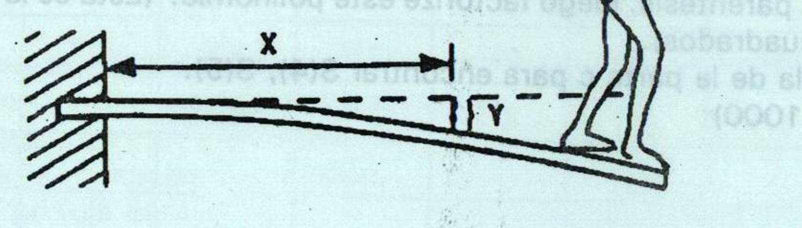


Fig. 1.6b

a. Deriva la ecuación particular expresando y en términos de x.
b. La tabla tiene 10 pies de largo. ¿Qué tanto se inclina hacia abajo de la longitud?

3. Problema del costo de la electricidad.
El Sr. Arturo trabaja durante el verano con una compañía que diseña equipo para el control de la contaminación. El trabajo de Arturo consiste en estimar el costo mensual de la electricidad para operar los limpiadores de la chimenea para una nueva planta de cemento. Encuentra que el costo mensual por consumo de energía es la siguiente:

Kilowatt/h (kwh)	PESOS
1,000,000	N$20,000
2,000,000	29,000
3,000,000	34,000
4,000,000	41,000

Como necesita el costo de cualquier cantidad de energía de 1,000,000 a 4,000,000 kwh, debe tener una ecuación expresando el costo en términos de kwh. Decide si una función cúbica es razonable.

a. Deja que D = número de miles de dólares por mes, y deja a K = número de millones de kwh por mes. Escribe la ecuación particular expresando D en términos de K.
b. ¿Cuál será el costo de 1.5 millones de kwh?
c. De acuerdo con tu modelo, cuanto pagarías si no usas electricidad en un mes dado? ¿Es razonable? Explica.
d. Sin exceder de $35000 por mes cuánta electricidad puede ser usada. Dibuja una gráfica de D contra K, y usa la gráfica para estimar este número.

4. Problema de la suma de los cuadrados.

Deja a S(n) ser la suma de los cuadrados de los enteros de 0 a n. Que es $S(n) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 .... + n^2$

a. Encuentra S(0), S(1), S(2), S(3)
b. S(n) es una función cúbica de n. Encuentra la ecuación particular para expresar S(n) en términos de n usando los pares ordenados de la parte a.
c. Los coeficientes de la ecuación particular son fracciones. Factoriza apropiadamente las fracciones dejando un polinomio con coeficientes enteros dentro de los paréntesis, luego factorize este polinomio. (Esta es la fórmula para la suma de cuadrados).
d. Usa la fórmula de la parte c para encontrar S(4), S(5).
e. Encuentra S(1000)

5. Problema de la suma de los cubos

Deja que S(n) sea la suma de los cubos de los enteros de 0 a n. Esto es $S(n) = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

a. Encuentra S(0), S(1), S(2), S(3) y S(4). Verás que todos los números son cuadrados perfectos.
b. S(n) es una función cuártica de n. Encuentra la ecuación particular expresando

S(n) en términos de n, usando los pares ordenados de la parte a.
c. Los coeficientes en la ecuación particular son fracciones. Factoriza las fracciones apropiadamente, dejando un polinomio con coeficientes enteros dentro del paréntesis.
d. Factoriza el polinomio dentro del paréntesis de la parte c. Da una respuesta como puedes concluir que S(n) es siempre un cuadrado perfecto, no importando que entero positivo n es.
e. Encuentra F(1000). Cuál es el cálculo más rápido. Usando la fórmula que encontraste o sumando todos los cubos de los enteros.