CAPITULO 2

SUCESIONES Y SERIES

Se cuenta que el inventor del ajedrez pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla del tablero; dos granos por la segunda; cuatro por la tercera, y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas. Afortunadamente (no para él, claro) este deseo de aspecto modesto fué analizado antes de ser concedido y se encontró que al llegar a la vigésima casilla la recomensa habría ascendido a más de un millón de granos de trigo; para la sexagésima casilla el número resultante representaría una cantidad astronómica, la que hubiera excedido con mucho el total de granos de trigo existentes en aquel reino oriental.

La base de esta leyenda, que es una sucesión de números relacionados de una manera especial, tiene aplicaciones importantes que van desde el dinero en una cuenta de ahorros hasta las notas musiclaes en un piano.

En estas sucesiones la variable independiente toma valores enteros por lo que sus gráficas no serán continuas.

Problema de los granos de trigo.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

2.1 Introducción a las sucesiones

Los números 3,5,7..., parecen seguir un patrón. Un conjunto de números es comúnmente llamado una "sucesión" y cada uno de los números en el conjunto es llamado "término de la sucesión". Si sabes cual es el patrón puedes reemplazar los puntos marcados con otros términos de la sucesión. Por ejemplo podrías escribir 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ...., asumiendo que esta es una sucesión de enteros impares empezando con 3. También podría ser 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 .... lo cual es una sucesión de números primos por lo cual puedes obtener el patrón.

Las sucesiones pueden incluirse dentro de un marco de trabajo que ya haz aprendido hasta el momento, considerando las funciones. Cada término en una sucesión tiene una posición o número de término (1^{ro}, 5^{to}, 976^{avo}, etc.) y un valor (3, 11, 1953, etc.). La secuencia de enteros impares anteriores puede ser escrita.

Valor del término:	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,..........
Número del término:	1 2 3 4 5 6 7...........

Para cada número del término hay un solo valor correspondiente. Entonces una sucesión puede ser pensada como una función.

Definición

> Una <u>sucesión</u> es una función cuyo dominio es un conjunto de números naturales (los números de los términos) y cuyo rango es un conjunto de valores de los términos.

Notas:

1. Esta definición implica que la sucesión tiene un número infinito de términos.
2. La letra n será usada normalmente para indicar el número del término, y la notación a_n para el valor del término. La notación de una función normal como $a_{(n)}$ hace a las fórmulas incómodas para leer y escribir. El símbolo a_n es pronunciado "a sub-n" o simplemente "número del término n".

Objetivo

> Dados los primeros términos de una sucesión
> a. Descubre el patrón
> b. Escribe más términos de la sucesión
> c. Obtén una fórmula para a_n
> d. Usa la fórmula para calcular el valor de otros términos.
> e. Dibuja la gráfica de la sucesión

Ejemplo

Haz las anteriores 5 cuestiones para la sucesión 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...

a. Un patrón obvio es que los términos aumentan en 2 para términos consecutivos.

b. Usando este patrón los siguientes términos son 17, 19, 21, 23,...

c. Descubrir la fórmula es engañoso y pondrá a prueba tu ingenio. Lo que debes hacer es encontrar una relación entre el número del término y el valor del mismo. Esto te ayudará a escribir los dos conjuntos de números cerca uno del otro.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,.......... Valores de los términos
1 2 3 4 5 6 7......... número de términos

En este caso parece que los valores de los términos aumentan dos veces más rápido que los números de los términos. Si escribes los valores $2n$ por los valores de a_n, como lo muestra el patrón.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,..................a_n
1 2 3 4 5 6 7.................n
2 4 6 8 10 12 14..................$2n$

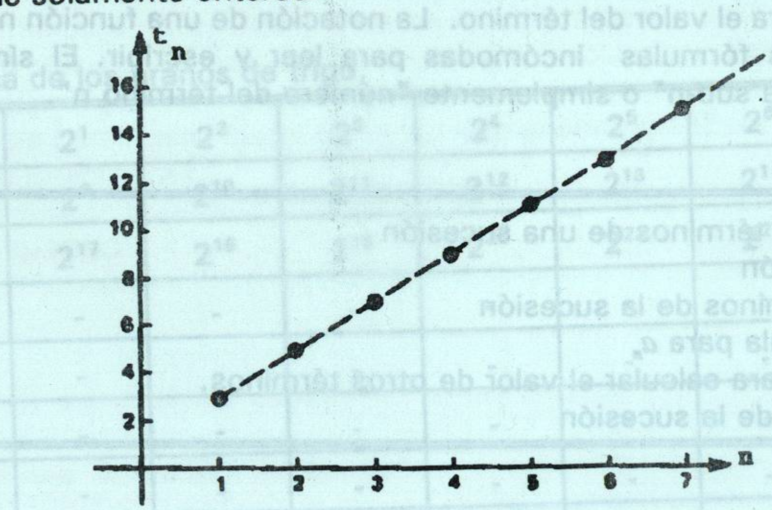
El valor de a_n es siempre uno más que el valor de $2n$, por lo tanto la fórmula podría ser :

$$a_n = 2n+1$$

d. Puedes calcular a_n para valores grandes de n. Deberás usar la fórmula en lugar de continuar el paarón. Por ejemplo, si n fuera 256, entonces:

$$a_{256} = 2(256)+1$$
$$a_{256} = 513$$

e. La gráfica puede ser punteada como lo muestra la figura 2.1a. Los puntos no deben ser conectados con una línea continua dado que el dominio contiene solamente enteros.



Gráfica 2.1a

No todas las gráficas de sucesiones son lineales. Por ejemplo, la gráfica de 24, 12, 6, 3, 1½, ..., es mostrada en la figura 2.1b

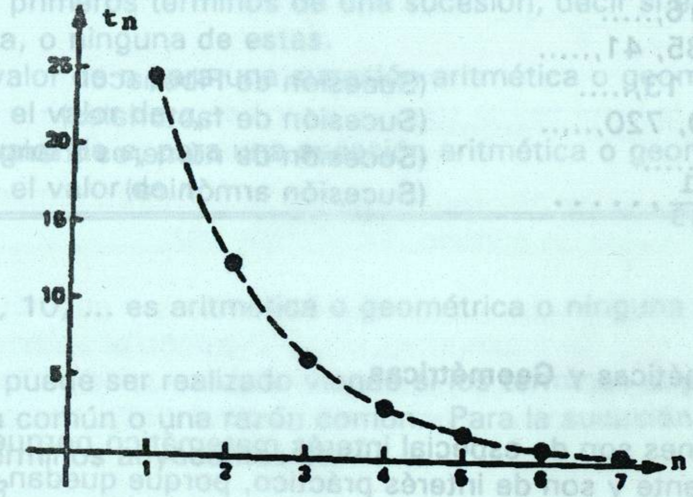


Figura 2.1b

Ejercicio 2.1

El ejercicio que sigue es diseñado para darte práctica y ayudarte a cumplir con los objetivos de esta sección.

En los problemas del 1 al 6, a_1 hasta a_6 de una sucesión están en lista. Para cada sucesión, haz lo siguiente:

a. Dibuja la gráfica
b. Encuentra a_7 y a_8
c. Encuentra la fórmula para a_n
d. Calcula a_{100}

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\ldots$
2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \ldots\ldots$
3. 3, 4, 5, 6, 7, 8,.....
4. 3, 6, 12, 24, 48, 96,.....
5. 32, -16, 8, -4, 2, -1,.....
6. $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, \ldots\ldots$

Para los problemas del 7 al 12 escribe los siguientes dos términos de la sucesión, y di qué patrón fue usado.

7. 1, 2, 4, 7, 11, 16,.....
8. 1, 11, 20, 28, 35, 41,.....
9. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..... (Sucesión de Fibonacci)
10. 1, 2, 6, 24, 120, 720,..... (Sucesión de factoriales)
11. 1, 3, 6, 10, 15,..... (Sucesión de números triangulares)
12. $\frac{1}{12}, \frac{1}{19}, \frac{1}{26}, \frac{1}{33}, \ldots\ldots$ (Sucesión armónica)

2.2 Sucesiones Aritméticas y Geométricas

Dos tipos de sucesiónes son de especial interés matemático porque las fórmulas son derivadas fácilmente y son de interés práctico, porque quedan como modelos matemáticos en muchas situaciones del mundo real, son ejemplos:
3, 10, 17, 24, 31, 38,..... y
3, 6, 12, 24, 48, 96,.....

En la primera sucesión el siguiente término es formado agregando 7 al término anterior. En la otra el siguiente término es encontrado multiplicando el término anterior por la constante 2.

Definición

> Una sucesión aritmética es una sucesión en la cual se agrega una constante al término anterior para obtener el siguiente y así sucesivamente.

La constante para una sucesión aritmética es llamada "diferencia común" (d) porque la diferencia entre cualquiera de dos términos adyacentes es igual a esta constante. En la primera sucesión 10-3=7, 17-10=7, 24-17=7,

Definición

> Una sucesión geométrica es una sucesión en la cual se multiplica el término anterior por una constante para obtener el siguiente.

La constante para una sucesión geométrica es llamada "razón común" *(r)*. Por que la razón de un término con el término anterior es igual a esta constante.

En la segunda sucesión $\frac{6}{3}=2, \frac{12}{6}=2, \frac{24}{12}=2$

Las sucesiónes aritméticas y geométricas son llamadas "progresiones" porque los términos "progresan" de uno a otro (adyacentes) de manera regular. La palabra "progresión" es usada frecuentemente cuando hay un número finito de términos. Las sucesiónes tienen un número infinito de términos.

Objetivos

> 1. Dados los primeros términos de una sucesión, decir si es aritmética o geométrica, o ninguna de estas.
> 2. Dado un valor de n para una sucesión aritmética o geométrica encuentra el valor de a_n.
> 3. Dado un valor de a_n para una sucesión aritmética o geométrica encuentra el valor de *n*.

Ejemplo 1.
¿La sucesión 4, 7, 10, ... es aritmética o geométrica o ninguna de éstas?

El primer objetivo puede ser realizado viendo si los términos adyacentes tienen ya sea una diferencia común o una razón común. Para la sucesión 4, 7, 10, ... la diferencia entre términos adyacentes es:

$a_2-a_1=7-4=3$
$a_3-a_2=10-7=3$

Ya que estos términos tienen una diferencia común, la sucesión es aritmética.

Los términos no tienen una razón común, ya que $\frac{10}{7} \neq \frac{7}{4}$, entonces la sucesión no es geométrica.

Ejemplo 2.
¿La sucesión 3, 6, 12,... es aritmética o geométrica o ninguna de éstas?

Solución
Para esta sucesión las diferencias son:

$a_2-a_1=6-3=3$ y
$a_3-a_2=12-6=6$

Por lo tanto la sucesión no es aritmética. Pero las razones son

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{3}=2$ y $\frac{a_3}{a_2}=\frac{12}{6}=2$

Entonces la sucesión es geométrica, porque los términos adyacentes tienen una razón común. Cada término es formado multiplicando por 2 el término anterior.

Ejemplo 3.
La sucesión 2, 6, 24, ... ¿es progresión aritmética, geométrica o ninguna de estas?

Solución
Para esta sucesión la diferencia es:

$a_2-a_1=6-2=4$ y
$a_3-a_2=24-6=18$

Las razones son:

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$ y $\frac{a_3}{a_2}=\frac{24}{6}=4$

Por lo tanto no es aritmética ni geométrica.

(Esto resultó ser una sucesión "factorial") donde el siguiente término es formado multiplicando el anterior por un número mayor cada vez.

Las fórmulas para calcular a_n para sucesiones aritméticas y geométricas pueden se encontradas mediante el enlace del término numérico con el valor del término como lo hiciste en la sección anterior. La sucesión aritmética 3, 10, 17, 24, 31,..... tiene como primer término $a_1=3$ y la diferencia común $d=7$. Los primeros términos pueden ser construidos sumando 7 al término que precede.

$a_1=3$
$a_2=3+7$
$a_3=3+7+7=3+2(7)$
$a_4=3+7+7+7=3+3(7)$
$a_5=3+7+7+7+7=3+4(7)$

Por lo tanto el patrón consiste en sumar *(n-1)* diferencias comunes al primer término a_1, entonces la fórmula es como sigue:

Conclusión

El valor del enésimo término (a_n) de una sucesión aritmética es igual al primer término más *(n-1)* diferencias comunes. Esto es:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

Esta fórmula te revela que una sucesión aritmética no es más que una función lineal, inteligentemente disfrazada, porque la variable independiente n aparece en el primer grado. La pendiente de la función es la diferencia común d y la intersección de y va a ser a_0, la cual es igual a_1-d si cero esta en el dominio de la función.
El mismo procedimiento nos da la fórmula para a_n de una sucesión geométrica.

La sucesión 3, 6, 12, 24, ... tiene $a_1=3$ y razón común $r=2$, los primeros términos pueden ser construidos multiplicando por 2 el término anterior.

$a_1=3$
$a_2=3\cdot 2$
$a_3=3\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^2$
$a_4=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^3$
$a_5=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^4$

Entonces el patrón consiste en multiplicar el primer término a_1 por la razón común, r, *(n-1)* veces.

Conclusión

El enésimo término de una sucesión geométrica (a_n) es igual al primer término multiplicado por *(n-1)* veces la razón. Esto es:

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$$

Notas:
Ya que la variable independiente n aparece como exponente, la sucesión geométrica es un ejemplo de una función exponencial. la única diferencia es que el dominio de una sucesión geométrica es de enteros positivos en lugar de que sean todos números reales.

Las fórmulas para las sucesiones aritméticas y geométricas son parecidas, la única diferencia es la operación que se realiza. Para la sucesión aritmética la diferencia común d multiplicada por n-1 se suma al primer término a_1. Para la sucesión geométrica la razón común elevada a la n-1 se multiplica por el primer término a_1.

Con la ayuda de estas conclusiones el segundo y tercer objetivo de esta sección pueden ser realizados.

Ejemplo 4.
Calcula a_{100} para la sucesión aritmética 17, 22, 27, 32, ...

Solución
Por medio de la resta de términos adyacentes encuentra que la diferencia común es $d=5$. Sumando (100-1) 5 veces al primer término nos da:

$$a_n = a_1+(n-1)d$$
$$a_{100} = 17+(100-1)(5)$$
$$a_{100} = 17+495$$
$$a_{100} = 512$$

Ejemplo 5.
Calcula a_{100} para la sucesión geométrica que tiene primer término $a_1=35$ y razón común $r=1.05$

Solución
Ya que conoces a_1, r y n, puedes encontrar a_{100}.

$$a_n = a_1r^{(n-1)}$$
$$a_{100} = 35(1.05)^{100-1}$$
$$a_{100} = 35(1.05)^{99}$$
$$a_{100} \approx 4383.375262$$

Ejemplo 6
El número 68 es un término en la sucesión aritmética que tiene $a_1=5,\ d=3$ ¿Qué término es?

Solución
En este caso tu sabes que $a_n=68$ y debes encontrar el número del término n, usando la fórmula

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ 68 &= 5+(n-1)3 \\ 63 &= (n-1)(3) \\ 21 &= n-1 \\ \therefore n &= 22 \end{aligned}$$

Ejemplo 7
Una sucesión geométrica tiene $a_1=17$ y $r=2$. Si $a_n=34816$, encuentra n.

Solución
Sustituyendo en la fórmula nos da

$$\begin{aligned} a_n &= a_1\ r^{n-1} \\ 34816 &= 17(2)^{n-1} \\ 2048 &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

tomando el logaritmo de cada miembro

$$\begin{aligned} \log 2048 &= \log 2^{n-1} \\ \log 2048 &= (n-1) \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\log 2048}{\log 2} &= n-1 \\ 11 &= n-1 \\ \therefore n &= 12 \end{aligned}$$

El siguiente ejercicio esta diseñado para darte práctica identificando las sucesiones ya sean geométricas o aritméticas y para encontrar el valor del término o el número del término de tales sucesiones.

Ejercicio 2.2

En los problemas del 1 al 8 di si la sucesión es aritmética o geométrica o ninguna de éstas. Si es aritmética encuentra la diferencia común, si es geométrica encuentra la razón común.

1. 7,12,17, ...
2. 5, 10, 12, ...
3. 1, 1, -1, ...
4. 25, 50, 100, ...
5. 2, -4, 6, ...
6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ...
7. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}$....
8. 25, 75, 100, ...

En los problemas del 9 al 13 encuentra el término indicado de la sucesión aritmética.

9. Término 45 de 2, 5, 8, ...
10. Término 51 de 18, 14, 10, ...
11. Término 13 de $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}$, ...
12. Término 17 de $3\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 11\sqrt{2}$, ...
13. Términos 64, 65, 66 de 8, 11, 14, ...

Para los problemas del 14 al 20 encuentra el término indicado de la sucesión geométrica usa *logaritmos* si no tienes acceso a una calculadora.

14. Término 7 de 2, 6, 18, ...
15. Término 9 de 1, 2, 4, 8, ...
16. Término 10 de 1, -2, 4, ...
17. Término 51 de la sucesión en la cual $a_1=7$ y $r=1.02$
18. Término 37 de la sucesión en la cual $a_1=29$ y $r=0.92$
19. Término 28 de la sucesión en la cual $a_1=0.01$ y $r=-3$
20. Término 64 de la sucesión en la cual $a_1=1$ y $r=-2$

Para los problemas del 21 al 25 encuentra cual es el término *(n)* del número dado en la sucesión indicada.

21. 101 en la sucesión aritmética con $a_1=5\ d=3$
22. 13 en la sucesión aritmética con $a_1=88$ y $d=-5$
23. 1536 en la sucesión geométrica $a_1=3$ y $r=2$
24. 1 en la sucesión geométrica $a_1=729$ y $r=\frac{1}{3}$
25. -1215 en la sucesión geométrica $a_1=5$ y $r=-3$
26. ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión geométrica y una progresión geométrica?

2.3 Medias aritméticas y geométricas

Imagina que te preguntan encontrar el promedio de dos números, supón que son 4 y 16 sumando los números y dividiéndolos entre 2 nos da 10. Los números 4, 10, 16 forman una sucesión aritmética ya que cada par de términos adyacentes tienen una diferencia común de 6. El número 10 es llamado la media aritmética de 4 y 6, la palabra "media" significa promedio o en medio de.

Hay otras maneras de insertar números entre el 4 y el 16 para formar sucesiónes ya sean aritméticas o geométricas. Por ejemplo poniendo 8 y 12 en medio de 4 y 16 forman 4, 8, 12, 16,...