La cual es una sucesión aritmética con una diferencia de 4. Los números 8 y 12 son llamados dos medias aritméticas entre 4 y 16, insertando únicamente el número 8 entre 4 y 16 forma 4, 8, 16,...

La cual es una sucesión geométrica con una razón de 2. Entonces 8 es llamado la media geométrica de 4 y 16. El artículo indefinido es usado aquí porque hay otra media geométrica de 4 y 16 que es -8. Esto es porque la sucesión 4, -8, 16, ... es geométrica con razón común del -2. En esta sección aprenderás como encontrar números específicos de medias entre dos números dados.

Definición

| |
|---|
| Medias geométricas o aritméticas entre dos números, son números los cuales forman sucesións aritméticas o geométricas con los dos numeros dados. |

Objetivo

| |
|---|
| Dados dos números, ser capaz de encontrar un número específico de la media aritmética o geométrica que esta entre ellos. |

La clave para lograr este objetivo es encontrar la diferencia común o la razón común. Conociendo este número tu puedes usar la definición de sucesión aritmética o geométrica para escribir la media deseada.

Ejemplo.
Encuentra 5 medias aritméticas entre 36 y 54.

Solución
La manera más segura para encontrar estas medias es escribir 36 y 54 con cinco espacios entre ellos, en los cuales tu puedes escribir las medias.
36, ______ ______, ______ ______ ______, 54

Estos son los primeros 7 términos de la sucesión. *Por lo tanto* $n=7$, $a_7=54$ y $a_1=36$.
Encuentra *la diferencia* común (d).

$a_7 = a_1 + (n-1)d$
$54 = 36+(7-1)d$
$54 = 36+6d$
$18 = 6d$
$d = 3$

Conociendo $d$ las medias pueden ser escritas agregando $d$ a los términos siguientes

36, 39, 42, 45, 48, 51, 54

Ejemplo 2
Encuentra tres medias geométricas entre 3 y 48



Solución
El proceso anterior trabaja también para las medias geométricas. Escribiendo
3, ______, ______, ______, 48
Te das cuenta que hay 5 términos. Donde $a_5=48$, $a_1=3$ y $n=5$.

Recordando que: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

$a_5=a_1\cdot r^{5-1}$
$48=3r^4$
$16=r^4$
$\sqrt{r^4}=\sqrt{16}$
$r^2=\pm 4$

$r^2=4$ y $r^2=-4$
$r=\pm 2$ y $r=\pm 2i$

Donde obtenemos cuatro soluciones, dos reales y dos imaginarios.
Las soluciones reales para $r=\pm 2$ tenemos:

$3, 6, 12, 24, 48 \quad ; r=2$
$3, -6, 12, -24, 48 \quad ; r=-2$

Las sucesiones imaginarias para $r=\pm 2i$ tenemos:

$3, 6i, -12, -24i, 48 \quad ; r=2i$
$3, -6i, -12, 24i, 48 \quad ; r=-2i$

El ejercicio siguiente esta diseñado para darte práctica encontrando medias geométricas y aritméticas. También vas a descubrir algunas propiedades sobre las medias geométricas y aritméticas.

Ejercicio 2.3

Para los problemas del 1 al 6 encuentra la media aritmética indicada entre dos números dados.

1. Tres medias entre 42 y 70
2. Seis medias entre -107 y -86
3. Cinco medias entre 23 y 31
4. Dos medias entre -143 y -215
5. Tres medias entre 53 y 75
6. Cuatro medias entre 123 y 55

Para los problemas del 7 al 12, encuentra la media geométrica indicada entre los números dados. (Ahí tal vez habrá más de un grupo de medias reales)

7. Dos medias entre 5 y 135
8. Tres medias entre 81 y 16
9. Cuatro medias entre 1/32 y 32
10. Dos medias entre 13y-4459
11. Cinco medias entre $x^5$ y $x^{17}$
12. Dos medias entre 13 y 26

Para los problemas del 13 al 16, encuentra la media geométrica indicada. (Encontraras medias imaginarias)

13. Tres medias entre 2 y 162
14. Tres medias entre 1 y 16
15. Tres medias entre 5 y 80
16. Tres medias entre 2 y 32

Para los problemas del 17 al 20 encuentra la media aritmética y la media geométrica de los números dados.

17. 2 y 18
18. 3 y 108
19. $\frac{2}{3}$ y 24
20. $\frac{3}{5}$ y 15

### 2.4 Introducción a las series

Si tu sumas los términos de una sucesión, el resultado es llamado una serie. Por ejemplo, la serie de la cual proviene 3,5,7,9,.... es $3+5+7+9+11+\ldots$.

Definición

**SERIES**
Una serie es una suma indicada de los términos de una sucesión.

Ya que una sucesión tiene un número infinito de términos. Una serie es la suma de número infinito de términos. La suma de todos los términos de una serie va a ser usualmente infinita. Por esta razón es conveniente estudiar solo sumas de números finitos de términos de una serie. Por ejemplo la suma de los primeros 4 términos de la serie anterior es

$3+5+7+9,$

Lo cuál es igual a 24. La suma de una parte de la serie es llamada suma parcial. $3+5+7+9$ es llamada suma parcial de cuatro términos de la serie anterior porque esta es la suma de los 4 primeros términos.

Definición

**SUMA PARCIAL DE *N* TERMINOS**
La suma parcial de $n$ términos de, una serie es la suma de los primeros $n$ términos de una serie.



El símbolo $S_n$ va a ser usado para representar la suma parcial de una serie. El valor de la suma parcial es claramente la variable dependiente en la función en la cual la variable independiente es n. Para la serie anterior

$S_1 = 3$
$S_2 = 3+5=8$
$S_3 = 3+5+7=15$
$S_4 = 3+5+7+9=24$

Nota que la suma parcial por si solas forman un sucesión,
3, 8, 15, 24

Considerándolas como sucesiones de sumas parciales.

Desafortunadamente no hay muchas series para las cuales hay un fórmula conveniente para calcular $S_n$. Entonces matemáticos inventaron simplemente un símbolo que te diga como construir la suma parcial. El símbolo usado es letra griega Σ (Sigma) y se escribe:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

El símbolo se lee "La suma de $k=1$ hasta $k=n$ del *k-ésimo termino*" y significa $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_k$. La variable $k$ es llamada índice. Por ejemplo si $a_k=2\cdot 3^k$, entonces:

$$S_4=\sum_{k=1}^{4} 2\cdot 3^k=2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4$$

$$=6+18+54+162$$
$$=240$$

Objetivos

1. Dada la suma parcial en la notación $\sum$, evaluarla escribiendo todos los términos, y sumarlos después.
2. Dados los primeros términos de una serie, escribe $S_n$ usando la notación $\sum$.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que logres este objetivo.

Ejercicio 2.4

De los problemas del 1 al 10 evalúa la expresión escribiendo los términos y después sumalos.

1. $\sum_{k=1}^{5} 2k+7$
2. $\sum_{k=1}^{10} k$
3. $\sum_{k=1}^{4} {}^1/_k$
4. $\sum_{k=1}^{6} k^2+1$

5. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \ (2k+3)$ 6. $\sum_{k=1}^{5} 2^k$ 7. $\sum_{k=1}^{3} (1.02)^k$ 8. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1}(2)(3^{k-1})$

9. $\sum_{k=1}^{4} 5\ (3)^k$ 10. $5\sum_{k=1}^{4} 3^k$

11. Las respuestas de los problemas 9 y 10 son iguales. Explica la razón de esto.

12. La notación puede ser usada con otros números y otras variables aparte de K. Escribe a que es igual lo siguiente

 a. $\sum_{k=3}^{5} 4k-7$ b. $\sum_{j=1}^{10} (-1)^j x^j$

De los problemas del 13 al 18 escribe $S_n$ usando la notación $\Sigma$

13. $S_{10}$ para $1+4+9+16+25+\ldots$
14. $S_{100}$ para $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots$
15. $S_{40}$ para $2+6+18+54+162+\ \ldots$
16. $S_{90}$ para $2+6+10+14+18+\ldots$
17. $S_{20}$ para $0-10+20-30+40-\ldots$
18. $S_{55}$ para $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots$

19. Imagina que $S_n=\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

Encuentra $S_n$ para cada valor de n $\in\{1,2,3,\ldots 7\}$ ¿Qué piensas que podría ser la fórmula para $S_n$?

20. Supón que $S_n = \sum_{k=1}^{n} {}^{k}/_{2}\ (k+1)$

 a. Escribe los primeros 5 términos de la serie
 b. Estos términos son llamados números triangulares. Muestra que cada valor de $t_k$ es el número de pelotas que pueden ser puestas en un triángulo. Con $k$ pelotas en la orilla
 c. Encuentra las primeras 5 sumas parciales de la serie
 d. Estas sumas parciales son llamadas números piramidales. Muestran que cada valor de $S_n$ es el número de pelotas que pueden ser colocadas en una pirámide triangular. Con $n$ pelotas en cada lado de la base.

## 2.5 Series Aritméticas y Geométricas.

Haz aprendido que una serie es lo que resulta de la suma de los términos de una sucesión.

En esta sección vas a estudiar series las cuales provienen de la suma de los términos de sucesións aritméticas y geométricas.



Definición

> Una serie aritmética o geométrica es el resultado de la suma de los términos de una sucesión aritmética o geométrica respectivamente.

En el ejercicio 2.4 tú calculaste sumas parciales de series escribiendo cada término y sumándolos. Para encontrar una suma parcial más rápidamente es deseable tener una fórmula para $S_n$.

Objetivo

> Dada una serie aritmética o geométrica ser capaz de calcular $S_n$ la enésima suma parcial rápidamente y viceversa

Supón que debes encontrar la suma de los primeros 100 términos de una serie aritmética.

$7+13+19+25+31+\ldots.$

El término 100 de la serie puede ser calculado mediante el patrón que ya conoces

$a_{100}=a_1+(100-1)d$

Ya que $d=6$ para esta serie, la fórmula nos da

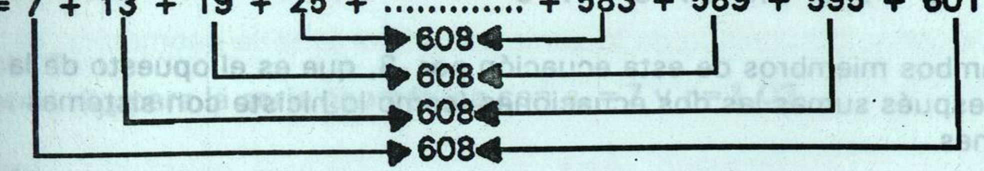
$a_{100}=7+(99)(6)$

$a_{100}=601$ entonces los últimos términos de la suma parcial son ... 583, 589, 595, 601

La suma parcial es $S_{100}=7+13+19+25+31+\ldots..+583+589+595+601$

Un patrón interesante muestra que si tú sumas el primero y el último término, el segundo *y* el penúltimo y así sucesivamente.

$S_{100}= 7 + 13 + 19 + 25 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 583 + 589 + 595 + 601$




*Cada par de términos sumados da 608. Por lo tanto tendrás 100/2= 50 pares como estos. Entonces la suma parcial es.*

$S_{100}=608+608+\ldots.+608$ (50 términos)
$S_{100}=(50)(608)$
$S_{100}=30,\ 400$

De este ejemplo tú puedes encontrar la fórmula para $S_n$. El 50 es igual a 1/2 del números de términos o $n/2$ y el 608 es igual a $t_1+a_n$. Por lo tanto la fórmula es.

Conclusión

**SUMA PARCIAL DE SERIES ARITMETICAS.**
La enésima suma parcial de una serie aritmética es :
a. La suma del primer y último término, multiplicados por la mitad del número de términos, o
b. n veces el promedio del primer y último término.

Esto es: $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = n[\frac{a_1 + a_n}{2}]$

Una forma alternativa de esta fórmula puede ser encontrada mediante la sustitución de la cantidad $a_1 + (n-1)d$ por $a_n$

$Sn = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ Fórmula previa

$Sn = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$ Sustitución

$Sn = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ Para series aritméticas

Esta fórmula es más conveniente si tu conoces $d$, pero no $a_n$, o si tu quieres calcular $n$ cuando conoces $Sn$, $a_1$ y $d$.

Otro truco interesante algebraico nos da la fórmula de $Sn$ para las series geométricas. Supón que tienes que encontrar $S_{100}$ para la serie geométrica $7 + 21 + 63 + \ldots$

En este caso $a_1 = 7$ y $r = 3$ esto nos ayuda a escribir los términos en forma factorizada.

$S_{100} = 7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \ldots + 7 \cdot 3^{98} + 7 \cdot 3^{99}$

Si multiplicas ambos miembros de esta ecuación por -3, que es el opuesto de la razón común después sumas las dos ecuaciones (como lo hiciste con sistemas lineales), obtienes

$$\begin{array}{rl} S_{100} & = 7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \ldots + 7 \cdot 3^{98} + 7 \cdot 3^{99} \\ -3\,S_{100} & = \quad -7 \cdot 3 - 7 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3^3 - \ldots - 7 \cdot 3^{98} - 7 \cdot 3^{99} - 7 \cdot 3^{100} \\ \hline S_{100} - 3S_{100} & = 7 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 - 7 \cdot 3^{100} \end{array}$$

Todos los términos excepto uno en la ecuación de arriba tiene su opuesto en la ecuación de abajo.
Quedando solo 7 y $-7 \cdot 3^{100}$. El resultado es $S_{100} - 3 \cdot S_{100} = 7 - 7 \cdot 3^{100}$

$$S_{100}\,(1-3) = 7(1-3^{100})$$

$$= 7\,\left(\frac{1-3^{100}}{1-3}\right)$$



De estos datos se puede obtener la fórmula para $S_n$. El 7 es igual a $a_1$, el 3 es la razón común $(r)$, y el 100 es el número de términos $(n)$. Entonces la fórmula es como sigue:

Conclusión

**SUMA PARCIAL DE UNA SERIE GEOMETRICA.**
La enésima suma parcial de una serie geométrica es igual al primer término $a_1$ multiplicado por la fracción. La fracción es $\frac{(1-r^n)}{1-r}$

Esto es: $S_n = a_1(\frac{1-r^n}{1-r})$

Ejemplo 1.
Encuentra la suma parcial de 127 términos de la serie aritmética con $a_1 = 17$ y $d = 4$

Solución
De la segunda forma de la fórmula de series aritméticas obtienes

$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$

$S_{127} = \frac{127}{2}[2(17) + (127-1)4]$

$S_{127} = \frac{127}{2}(34 + 504)$

$S_{127} = \frac{127}{2}(538)$

$S_{127} = 34,163$

Esto es mucho más rápido que calcular los 127 términos y sumarlos.

Ejemplo 2
Encuentra $S_{34}$ para la serie geométrica con $a_1 = 7$ y $r = 1.03$

Solución
De la fórmula de series geométricas obtienes:

$S_n = a_1(\frac{1-r^n}{1-r})$

$S_{34} = 7[\frac{1-(1.03)^{34}}{1-1.03}]$

$S_{34} = 7(\frac{1-2.731905296}{-0.03})$

$S_{34} = 7(\frac{-1.731905296}{-0.03})$

$S_{34} \approx 404.1112356$

Ejemplo 3
30705 es la suma parcial de la serie aritmética con $a_1 = 17$ y $d = 3$. ¿Cuál suma parcial es esta?

Solución
Encontrar el número de términos requiere retroceder con el patrón que haz aprendido. Ya que $a_1$ y $d$ son conocidos,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$30705 = \frac{n}{2}[2(17) + (n-1)3]$$

$$30705 = \frac{n}{2}(34 + 3n - 3)$$

$$61410 = n(31 + 3n)$$

$$61410 = 31n + 3n^2$$

$$3n^2 + 31n - 61410 = 0$$

usando la fórmula cuadrática tenemos:

$$n = \frac{-31 \pm \sqrt{961 + 736920}}{6}$$

$$n = \frac{-31 \pm \sqrt{737881}}{6}$$

$$n = \frac{-31 \pm 859}{6}$$

$n = 138$ y/o $n = -148.33$

La única respuesta posible es $n = 138$

Ejemplo 4
50238.14 es el valor aproximado de la suma parcial de la serie geométrica con $a_1 = 150$ y $r = 1.04$ ¿Cuántos términos tiene?

Solución
Sustituyéndolo en la fórmula para $Sn_1$ nos da

$$S_n = a_1 \left( \frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$50238.14 = 150 \left[ \frac{1-(1.04)^n}{1-1.04} \right]$$

$$\frac{50238.14}{150} = \frac{1-1.04^n}{-0.04}$$

$$-0.04(3334.92) = 1-1.04^n$$

$$-13.3968 = 1-104^n$$

$$1.04^n = 14.3968$$

$$\log 1.04^n = \log 14.3968$$

$$n \log 1.04 = \log 14.3968$$



$$n = \frac{\log 14.3968}{\log 1.04}$$

$$n = 68.000001$$

entonces $n = 68$

Ejercicio 2.5

Para los problemas del 1 al 5 encuentra $Sn$ para la serie aritmética indicada, ya sea calculando los términos y sumándolos o usando la fórmula.

1. $S_{10}$ para $4+7+10+\ldots$
2. $S_{20}$ para la serie con $a_1 = 15$ y $d = 10$
3. $S_{15}$ para la serie con $a_1 = 14$ y $d = -2$
4. $S_{40}$ para la serie con $a_1 = 8$ y $a_6 = 38$
5. $\sum_{k=1}^{60} 3 + 2(k-1)$

Para los problemas del 6 al 12, encuentra $Sn$ para la serie geométrica indicada, ya sea calculando los términos y sumándolos o usando la fórmula.

6. $S_5$ para $1+2+4+\ldots$
7. $S_6$ para $1-3+9-\ldots$
8. $S_{10}$ para la serie con $a_1 = 5$ y $r = 3$
9. $S_9$ para la serie con $a_1 = 6$ y $r = -2$
10. $S_{20}$ para la serie con $a_1 = 11$ y $r = 1.3$
11. $S_{11}$ para la serie con $a_1 = 10$ y $a_2 = 9$
12. $\sum_{k=1}^{6} 2(3)^{k-1}$

Para los problemas del 13 al 16 la suma parcial de las series es dada, junto con otra información. Encuentra el número del término de la suma parcial.

13. Serie aritmética $S_n = 3219$, $a_1 = 15$, $d = 4$. Encuentra $n$
14. Serie aritmética $S_n = 25477.9$, $a_1 = 1.7$, $a_2 = 5.3$. Encuentra $n$
15. Serie geométrica $S_n \approx 23180.58$, $a_1 = 85$, $r = 105$. Encuentra $n$
16. Serie geométrica $S_n \approx 109135.19$, $a_1 = 1000$, $a_2 = 998$. Encuentra $n$

17. Para la serie geométrica $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$ , encuentra $S_5$, $S_{10}$ y $S_{20}$. ¿Qué notas que le sucede a $S_n$ cuando $n$ comienza a hacerse mayor?

### 2.6 Series geométricas convergentes

La serie $5+8+11+14+\ldots.$ tiene sumas parciales que se van haciendo grandes y más grandes cuando $n$ aumenta. Considera que pasa con la siguiente serie geométrica