$$5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+\frac{5}{32}+\ldots$$

Las primeras sumas parciales son

$S_1 = 5$

$S_2 = 5+\frac{5}{2} = 7\,1/2$

$S_3 = 5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4} = 8\frac{3}{4}$

$S_4 = 5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8} = 9\frac{3}{8}$

$S_5 = 5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16} = 9\frac{11}{16}$

Las sumas parciales se van haciendo mayores, pero parece ser menos de 10. Par ver que pasa cuando n es mayor, tu puedes usar la fórmula. Por ejemplo, la suma parcial de 20 términos es

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{20} = 5\left[\frac{1-(\frac{1}{2})^{20}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_{20} = 5\left(\frac{1-0.0000009537}{\frac{1}{2}}\right)$$

Dividiendo 5 entre $\frac{1}{2}$ (obtienes 10) y haciendo la resta

$$S_{20} \approx 10(0.9999990463)$$
$$\approx 9.999990463$$

Este número es muy cercano al 10. La gráfica de la suma parcial es mostrada en la figura 2-6a.

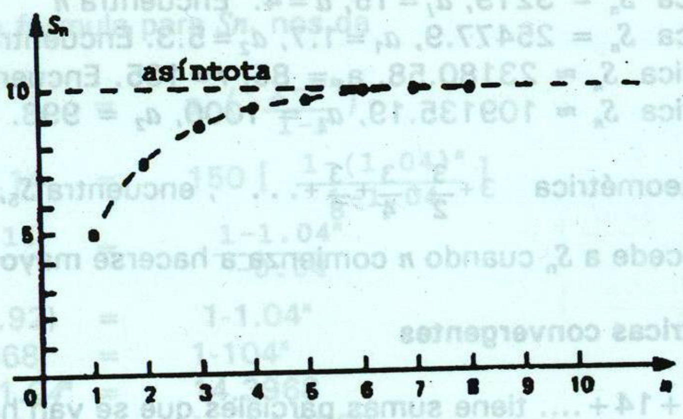


Figura 2-6a

La línea horizontal en 10 es una asíntota de la gráfica. Tu puedes ver que S_n nunca será más grande que 10, porque este será siempre multiplicado por una cantidad menor que 1 desde que los puntos se acercan mas y más a 10, se dice que la serie "CONVERGE A DIEZ".

Definición

Una serie converge a un número S si la suma parcial S_n, esta cada vez más cerca de S cuando n crece demasiado.

Dos preguntas surgen ahora:

1. ¿Bajo qué condiciones una serie geométrica será convergente?

2. ¿Cómo encontrarás el número al cual converge la serie geométrica?

La serie de arriba es convergente porque el término $(\frac{1}{2})^n$ en la fórmula para S_n es muy cercana al cero cuando n crece. Esto pasará siempre y cuando la razón común sea una fracción propia. Esto es $-1<r<1$. Entonces la serie va a converger si $|r|<1$.

Para encontrar el número al cual la serie converge simplemente reemplaza el término r^n por cero en la fórmula para S_n, obteniendo

$$a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow a_1\cdot\frac{1-0}{1-r} = a_1\cdot\frac{1}{1-r}$$

Este número es llamado el límite de la serie cuando n se aproxima al infinito. Esto es abreviando de esta manera:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Conclusión

SERIES GEOMETRICAS CONVERGENTES. La serie geométrica converge si $\lvert r \rvert < 1$. El límite S, al cual converge es dado por $S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1\cdot\frac{1}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$

Nota:
Aunque hay un número infinito de términos en las series ahora tienes una definición razonable para la suma de todos los términos. En el ejemplo anterior si tu sumas cualquier número finito de términos, la respuesta es menor a 10. Pero podrías definir la suma de todos los términos como si fuera igual a 10. Esta definición te permite encontrar valores exactos de decimales repetidas, como las vas a ver enseguida.

Objetivos

1.	Dada una serie geométrica decir si converge o no. Si converge, encuentra el límite en el cual converge.
2.	Dado un decimal repetido escríbelo como una serie geométrica convergente, y encuentra el número racional igual al decimal.

Ejemplo 1.
Di si la serie geométrica 15 - 4.5 + 1.35 - ... , converge?. Si es así en que número converge.

Solución
La razón común es $r=-\frac{4.5}{15}=-0.3$

Ya que $|r| < 1$ la serie converge. mediante la formula, $S=\frac{15}{1-(-.3)}=\frac{15}{1.3}=11.$

Ejemplo 2.
Di si la serie geométrica 2 - 3 + 4.5 - ... es convergente; si es así a que número converge.

Solución.
La razón común es $r=-\frac{3}{2}=-1.5$, ya que $|r|$ no es menor que 1, la serie no converge. La figura 2.6b muestra que pasa con las sumas parciales de esta serie. Si la serie no converge, puedes decir que diverge.

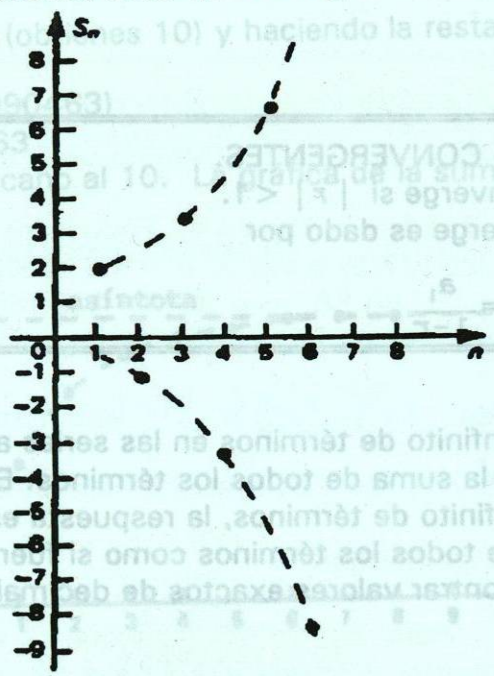


Figura 2.6b

Ejemplo 3.
Expresa 0.324324324..., cómo la razón de dos enteros, y simplifica.

Solución

Deja que x represente 0.324324324..., ya que el decimal se repite cada 3 dígitos, puedes escribir.

$x = 0.324 + 0.000324 + 0.000000324 + ...$

Esto es una serie geométrica, con $a_1 = 0.324$ y razón común $r=0.001$. Entonces x es la suma de todos los términos de la serie. Es razonable pensar que esta suma va a ser el número en la cual la serie converge. Tu puedes escribir.

$$x = \frac{0.324}{1-0.001}$$

$$= \frac{0.324}{0.999}$$

$$= \frac{324}{999}$$

$$= \frac{12}{37}$$

Ejemplo 4.
Expresa 0.26717171..., como la razón de dos enteros primos relativos.

Solución
En este caso el decimal no se repite hasta después de los dos lugares. Entonces tu divides la parte no repetitiva y expresas el residuo como una serie geométrica convergente. Dejando que x sea igual a:

$$x = 0.26 + 0.0071 + 0.000071 + 0.00000071 + \ldots$$

$$= 0.26+\frac{0.0071}{1-0.01}$$

$$= 0.26+\frac{0.0071}{0.99}$$

$$= \frac{26}{100}+\frac{71}{9900}$$

$$= \frac{2645}{9900}$$

$$= \frac{529}{1980}$$

Los cálculos mostrados te demuestran que una decimal repetida puede ser escrita como la razón de dos enteros.

Conclusión

Si x es un número con la parte decimal repetida, entonces x es un número racional.

Ejercicio 1.6.

Para los problemas del 1 al 5, determina si la serie geométrica indicada converge o no. Si es convergente encontrar el valor al cual converge.

1. $a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{5}$ 2. $a_1 = 42$ y $r = -\frac{3}{4}$

3. $a_1 = 18$ y $r = -\frac{7}{5}$ 4. $a_1 = 10$ y $r = 0.1$

5. $a_1 = 100$ y $a_3 = 1$ (Dos respuestas).

Para problemas del 6 al 11, escribe la decimal repetida como la razón de dos enteros y simplifica.

6. 0.636363... 7. 0.567567567...

8. 1.0606060... 9. 1.4272727...

10. 0.4999999...

11. 0.012345679012345679012345679...
(pista: La simplificación de la fracción es difícil, pero obvia)

12. La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ es llamada una sucesión armónica. Claramente a_n se acerca y se acerca a cero cuando n es muy grande.

La serie armónica $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ no converge; solamente se va haciendo más grande cuando n se incrementa. Asociando términos muestra que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Y usa este resultado para mostrar que la serie "diverge"

13. Usando la técnica para series geométricas convergentes, es posible mostrar que la serie

$$1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^4+\ldots$$

Converge a un número finito. Encuentra a que es igual este número.

2.7 Sucesiones y series como modelos matemáticos.

Ya que la sucesión es una función en la cual su dominio es un conjunto de enteros la gráfica de la sucesión cambia dando saltos sin ser una curva continua. Por lo tanto, las sucesións son apropiadas como modelos matemáticos para los fenómenos del mundo real en los cuales la variable dependiente cambia de una manera repentina en lugar de la continuidad que hasta ahora habías manejado. Por ejemplo, cuando tu introduces un clavo en la tabla, la profundidad del clavo en la tabla depende del número de veces que lo golpeaste con el martillo.

Objetivo

Dada una situación del mundo real en la cual la variable dependiente cambia ampliamente, usa sucesiones y/o series, aritméticas o geométricas como modelo matemático.

Ejemplo 1.

Supón que empiezas a golpear un clavo en una tabla. Con el primer impacto el clavo se introduce 20 mm.

Con el segundo impacto se introduce 18 mm. más. Predice la distancia que se introduce y la distancia total que se introdujo en la tabla, asumiendo que las distancias que se introduce forman:

a. Una sucesión aritmética.
b. Una sucesión geométrica

Solución.
n= número de impactos
a_n= número de milímetros que el clavo se introduce en el enésimo impacto. (Ver la figura 2.7a)
S_n= al número total de milímetros que el clavo se ha introducido después de n impactos.

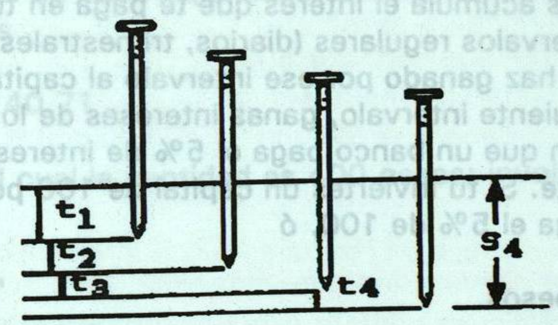


Figura 2.7a

a. Asumiendo que es una sucesión aritmética, $d = 18 - 20 = -2$, por lo tanto,
$a_n = 20 + (n\text{-}1)(-2)$
En el cuarto impacto el clavo se introduce
$a_4 = 20 + (4\text{-}1)(-2)$
$a_4 = 20 - 6 = 14$ mm.

La distancia total que el clavo se ha introducido después de cuatro impactos, será la suma parcial de los cuatro impactos de la serie aritmética correspondiente. Ya que $a_4 = 14$mm.

$$S_4 = \frac{4}{2}(20+14) = 68mm$$

b. Si es una sucesión geométrica la razón común será $r = 18/20 = 0.9$. En el cuarto impacto el clavo irá hasta
$a_4 = 20(0.9)^{4\text{-}1} = 14.58$ mm.

Después de 4 impactos, el clavo se habrá introducido un total de

$$S_4 = \frac{20(1-0.9^4)}{1-0.9} = 68.78mm$$

Ya que la razón común tiene un valor absoluto menor a 1, la suma parcial converge a un número cuando n es muy grande. Después de muchos impactos, la distancia total que el clavo se a introducido en la tabla se acerca a.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{20}{1-0.9} = \frac{20}{.1} = 200mm$$

Basado en este modelo, si el clavo fuera de más de 200 mm. de largo, no penetraría en la tabla totalmente. Si fuera menos de
200 mm. de largo el clavo se introducirá totalmente en la tabla.

Ejemplo 2.

La mayoría de los bancos acumula el interés que te paga en tus cuentas de ahorro. Esto significa que en intervalos regulares (diarios, trimestrales, anuales, etc.) suman los intereses que haz ganado por ese intervalo al capital el cual haz invertido. Durante el siguiente intervalo, ganas intereses de los intereses así como de capital original. Supón que un banco paga el 5% de intereses al año, acumulándolo anualmente. Si tu inviertes un capital de 100 pesos entonces al final de 1 año el banco te paga el 5% de 100, ó

(0.05) (100) = 5 pesos.

entonces el capital nuevo para el próximo período acumulado es 100 + 5, o 105. Al final del segundo año el banco te paga el 5% de 105, ó

(0.05) (105) = 5.25 pesos.

haciendo el nuevo capital de 105 + 5.25 = 110.25, y así sucesivamente. La cantidad de dinero que tienes en el banco en cualquier tiempo es un término en una sucesión

100,105,110.25,...

la sucesión es geométrica, con una razón común de 1.05, como lo podrías descubrir si divides los términos adyacentes. Algunas factorizaciones mas inteligentes muestran lo mismo más detalladamente.
n = número de años que el dinero ha estado en el banco.
a_n = número de pesos que tienes en el banco.

Cuando hiciste el primer depósito, tiempo = 0. Por lo tanto, es conveniente empezar con n como CERO en lugar de 1 como lo haz estado haciendo hasta ahora; por lo tanto, $a_0 = 100$.

Al final de un año, cuando $n = 1$, el interés es sumado para tener el siguiente término. Por lo tanto,
$a_1 = 100 + (0.05)(100)$ sumando 5% de interés
$= 100(1 + 0.05)$
$= 100(1.05)$

Para encontrar a_2, sumas al interés del segundo año a a_1 (El capital del primer año) obteniendo

$$\begin{aligned} a_2 &= 100(1.05) + 0.05(100)(1.05) \\ &= 100(1.05)(1 + 0.05) \\ &= 100(1.05)(1.05) \\ &= 100(1.05)^2 \end{aligned}$$

Similarmente, $a_3 = 100(1.05)^3$, $a_4 = 100(1.05)^4$, y así sucesivamente. Ya que el exponente siempre es igual al número de término, $a_n = 100(1.05)^n$. Esta es la fórmula para el enésimo término de una sucesión geométrica con $r = 1.05$ y que el primer término igual a 100. El exponente es n en lugar de n-1 porque la sucesión empezó en el término CERO en lugar del término UNO.

Para encontrar la cantidad de dinero que tendrás después de 7 años vas a sustituir 7 por n y haz los cálculos

$$a_7 = 100(1.5)^7 = 140.71$$

Encontrar el tiempo en el cual la cantidad es 400 pesos; involucra encontrar el exponente n.

$$\begin{aligned} 400 &= 100(1.05)^n \\ 4 &= 1.05^n \\ \log 4 &= \log 1.05^n \\ \log 4 &= n \log 1.05 \end{aligned}$$

$$\frac{\log 4}{\log 1.05} = n$$

$$n = 28.413$$

Después de 29 años es la respuesta.

Ejemplo 3.

Supón que invertiste 100 pesos en una cuenta de ahorros que paga 5% anual, pero el interés es acumulado trimestralmente. Cuánto tendrás al final de 7 años?

Solución

$n =$ número de trimestres que el dinero ha estado en el banco

$a_n =$ número de pesos que tienes en el banco

El banco te pagará un cuarto de 5% de interés después de cada período acumulado, ó 1.25% (0.0125).

$$a_0 = 100$$
$$a_1 = 100(1.0125)$$
$$a_2 = 100(1.0125)^2$$
$$a_3 = 100(1.0125)^3$$
$$a_n = 100(1.0125)^n$$

La cantidad de dinero que vas a tener después de 7 años sería a_{28} porque hay 28 trimestres en 7 años. Por lo tanto,

$$a_{28} = 100(1.0125)^{28} \approx 141.60$$

Comparando esta respuesta con la del ejemplo 2, obtienes 89 centavos más en 7 años si el interés es acumulado trimestralmente.

Ejercicio 2.7

Los siguientes problemas pretende que recuerdes tus conocimientos y habilidades con sucesiones y series antes de que trabajes con problemas de modelos matemáticos.

S1. Una serie geométrica tiene $a_1 = 34$ y $r = 1.7$. Encuentra el término número 20 y la veinteava suma parcial.

S2. Una serie aritmética tiene $a_1 = 78$ y $d = 3.2$. Encuentra a_{30} y S_{30}.

S3. Una serie aritmética tiene $a_1 = 44$ y $a_3 = 66$. Encuentra a_2 y S_{100}.

S4. Una serie geométrica tiene $a_1 = 100$ y $a_2 = 80$. Encuentra el límite en el cual la suma parcial converge.

S5. Una sucesión tiene la propiedad de que cada término es 95% del término anterior $a_1 = 800$. Cuál es a_{10}? Qué tipo de sucesión es?

S6. Una sucesión tiene la propiedad de que cada término es menor por 7 al término anterior. $a_1 = 900$. *Encuentra* a_{10}. Cuál es el número del término del primer término negativo?

S7. Una serie geométrica tiene $a_1 = 12$ y $a_{10} = 120$; cuál es la razón común? 1200 es un término en esta serie? ó cuál es el número del término?

S8. Una serie aritmética tiene $a_1 = 17$ y $a_{10} = 27$. Cuál es a_{20}?

S9. Cuáles son los siguientes dos términos de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, Es la sucesión aritmética o geométrica?

S10. Un factorial es un producto parcial de los términos de una sucesión. Encuentra el décimo producto parcial de la sucesión de números.

1. Problema de formación de músculos.

Supón que empezaste un programa de ejercicios para formar (construir) tus bíceps. En el primer día tus bíceps aumentan 3 mm. La cantidad que aumentan en cada uno de los días siguientes es 0.95 veces la cantidad que aumentó el día anterior.

a. Cuánto aumentaron tus bíceps el décimo día.
b. Cuántos milímetros en total han aumentado tus bíceps después de 10 días.
c. Si tú continuaras con el programa de ejercicio por mucho tiempo, qué número da el total de aumento de bíceps.

2. Problema de George Washington.

Recientemente, Ana Ward descubrió que es un pariente lejano de George Washington. Cuando él murió en 1799 él dejó 1000 dólares en su testamento, los cuales son de ella ahora. El dinero ha estado en una cuenta de ahorros en banco, donde ha estado ganando interés del 5% por año, acumulándolo anualmente. Cuánto dinero tiene Ana este año? Porqué supones que hay leyes que limitan la responsabilidad para pagar intereses de una cuenta de ahorros sin movimiento?

3. Problema de la Isla.

En 1626, el Presidente de una compañía, compró una isla a los nativos por 24 pesos en mercancía (collares, pieles, etc.). Supón que los 24 pesos obtenidos por los nativos se invirtieron en una cuenta de ahorros que paga el 6% por año, acumulandolo anualmente. Cuánto tuvieran depositado en este año.

4. Problema de depreciación en línea recta.

Suponiendo que el valor catastral del precio original de una casa decrese por un número constante de pesos cada año. Por ejemplo:
una casa se deprecia por $\frac{1}{40}$ de su valor original cada año.

a. Si tu casa originalmente valía 84,000 pesos. Cuántos pesos se depreciaría cada año.

b. Qué precio tiene tu casa después de 0, 1, 2, 3 años.

c. Estos valores forman una sucesión aritmética ó geométrica? Cuál es la diferencia común ó la razón común.

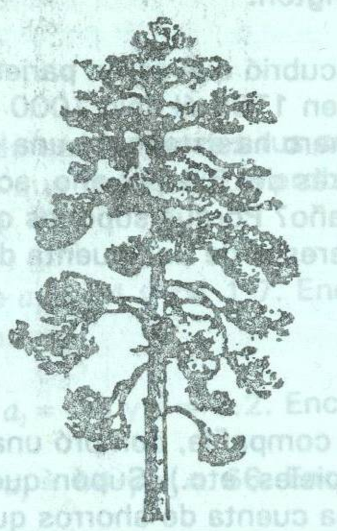
d. Calcula el valor de tu casa después de 27 años.

e. De acuerdo con este modelo en que momento tu casa no tiene valor. Explícalo.

f. Dibuja la gráfica de esta sucesión usando los resultados de los incisos b, d, y e. Porqué supones que el valor catastral nombra este modelo DEPRECIACION EN LINEA RECTA.

5. Problema de las ramas de un árbol.

Las ramas de un pino crecen en capas (ver el dibujo). Cuando la luz solar pega en la capa de arriba, una cierta fracción de esta luz es absorbida por estas ramas y el resto pasa a la siguiente capa. El 100% de la luz solar llega a la capa superior. Supón que tu encuentras que el 45% de la luz solar llega a la tierra después de pasar las 5 capas de ramas de un árbol en particular.

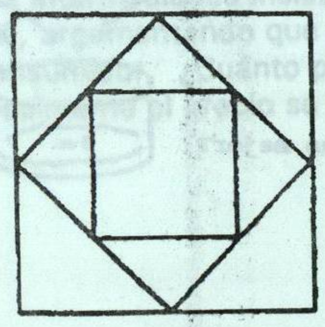


Dibujo

a. ¿Qué fracción de la luz que llega a una capa pasa a la siguiente?
b. Encuentra el porcentaje de la luz original que llega a la segunda, tercera, cuarta y quinta capa.
c. Si una capa de ramas obtiene menos del 20% de la luz solar original las ramas de esa capa morirán y se caerán. ¿Cuál es el número máximo de capas de ramas que esperas encontrar en ese árbol?

6. Problema de cuadrados inscritos

Un conjunto de cuadrados inscritos es dibujado adentro de un cuadrado tocando los puntos medios de las longitudes unitarias del cuadrado que precede.



Dibujo

a. Muestra que las longitudes de los lados de los cuadrados forman una sucesión geométrica.
b. Muestra que los perímetros de los cuadrados forman una sucesión geométrica.
c. Muestra que las áreas de los cuadrados forman una sucesión geométrica.
d. Encuentra el área del décimo cuadrado.
e. Encuentra el perímetro del décimo cuadrado.
f. Encuentra la suma de las áreas de los primeros 10 cuadrados
g. Encuentra la suma de los perímetros de los primeros 10 cuadrados.
h. Muestra que la suma de las áreas de los cuadrados se aproxima a un número finito, y di cuál es este número.
i. La suma de los perímetros se aproxima a un número finito. Explícalo.

7. Problema de la brocha de pintar

Cuando tu limpias una brocha de pintar la cantidad de pintura que queda en la brocha depende del número de veces que la enjuagas con tinher y en el volumen de tinher que uses para cada enjuagada. Asume que la brocha retiene 2 cm^3 del fluido después de sacudirla.

a. Antes de la primera enjuagada, los 2cm^3 que retiene la brocha es pintura