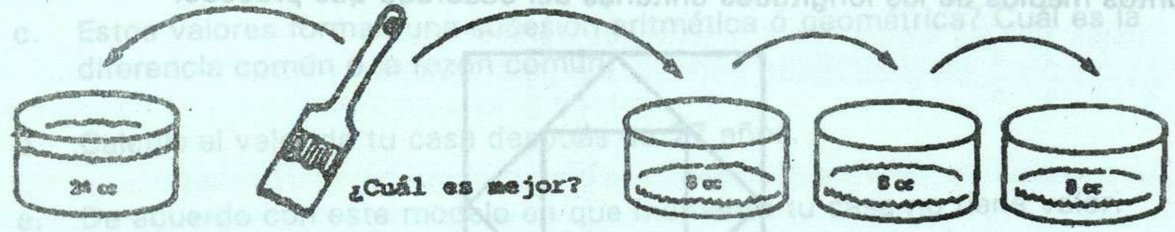
pura. Si $8cm^3$ de tinher es usado en la enjuagada, el volumen total de pintura y tinher que mezclas es $2+8=10cm^3$. ¿Cuál es el porcentaje de la pintura en esta mezcla?

b. Cuando tu sacudes la brocha, solo $2\ cm^3$ de la mezcla quedan en ella. ¿Qué porcentaje de la pintura original queda en ella?

c. Si tu enjuagas de nuevo con $8\ cm^3$ de tinher, ¿Qué porcentaje de pintura queda en la brocha después de la segunda enjuagada? ¿Después de la tercera enjuagada?

d. ¿Qué porcentaje de la pintura quedaría si usas $24\ cm^3$ para enjuagarla en lugar de enjuagarla 3 veces usando $8\ cm^3$ de tinher?

e. ¿Cuál es la forma más económica de usar los $24\ cm^3$ de tinher?



Dibujo

8. Problema del tío rico

Claudia I. tiene un tío rico quien desea darle 1000 pesos en su cumpleaños números 21. Claudia debe calcular cuánto dinero tiene que invertir su tío ahora en una cuenta de ahorros para tener los 1000 pesos en su cumpleaños, Claudia tiene 16 años y 7 meses. La cuenta de ahorros paga el 6.2% de interés por año, acumulándolo trimestralmente. Ya que Claudia ha estudiado sucesiones geométricas se da cuenta que el valor de 1000 pesos si es dejado en la cuenta de ahorros después de su cumpleaños número 21 va a ser un término en una sucesión geométrica, con una variable independiente P que es el número de trimestres que el dinero ha estado en la cuenta. El valor de 1000 pesos antes de su cumpleaños va a ser dado en la misma sucesión, pero con el apropiado valor negativo sustituido por p. ¿Cuánto dinero tiene que decirle Claudia a su tío que invierta?

9. Problema de la fórmula general para sucesións aritméticas

Prueba que el enésimo término de una sucesión aritmética es igual al *k*ésimo término más *(n-k)* diferencia común. Esto $a_n=a_k+(n-k)d$

10. Problema del intermediario.

Cuando tu compras comida, ropa, etc. en una tienda, el objeto pasa por muchas manos antes de llegar a ti. Por ejemplo el granjero se lo vende a un trailero y este

a un mayorista el cual lo vende a una empacadora y de esta pasa a una distribuidora y de ahí va a las tiendas y por último a ti. Cada persona entre tu y el granjero es llamada intermediario. Supón que el granjero gasta 50 centavos en la producción de una libra de carne.

a. **Si el granjero y cada uno de los cinco intermediarios sacan un 30% de ganancia de lo que invirtieron por la libra de carne ¿Cuánto tienes que pagar tu "consumidor" por la carne?**

b. **¿Cuántos centavos de ganancia hace el granjero? ¿Cuántos centavos de ganancia hacen los cinco intermediarios?**

c. **El granjero y cada uno de los intermediarios insisten en que su ganancia deber ser aumentada al 40%, argumentando que el 10% extra en el precio no va a afectar mucho al consumidor. ¿Cuánto pagarías por la libra de carne bajo estas condiciones? ¿Realmente el precio se incrementa solo en un 10%?**

2.8 Factoriales

En esta seccíon y en el capítulo siguiente seguirás estudiando series y otras expresiones que contienen productos de enteros consecutivos.

Definición

> La expresión n! (se lee n factorial) significa el producto de los primeros n enteros consecutivos positivos.

Por ejemplo, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$. Hay una propiedad importante de los factoriales que se deduce directamente de la definición. Por ejemplo

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$
$5! = 5\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)$
$5! = 5\cdot4!$

En general:

$$n! = n(n-1)!$$

Esta propiedad dice que puedes obtener el siguiente factorial multiplicando el factorial previo por n. El inverso de este patrón se puede obtener dividiendo el factorial previo.

$4! = 24$	$\div 4$
$3! = 6$	$\div 3$
$2! = 2$	$\div 2$
$1! = 1$	$\div 1$
$0! = ?$	

Si el patrón continua hacia atrás 0! debe ser igual a 1 ÷ 1, lo cual iguala a 1. Este hecho nos conduce a una definición de 0!.

Definición

Cero factorial	$0! = 1$

Objetivo

Ser capaces de usar la definición de factoriales para simplificar expresiones que contengan factoriales, o para expresar en forma factorial expresiones que contengan productos de enteros consecutivos.

Fracciones las cuales tienen factoriales en el numrador y denominador se pueden simplificar cancelando factores iguales. Por ejemplo:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= 10\cdot 9\cdot 8$$

$$= 720$$

Recíprocamente, el producto de enteros consecutivos puede ser expresado en forma compacta usando notación factorial. Por ejemplo,

$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$ Propiedad multuplicativa del uno

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$ Propiedad multiplicativa de fracciones

$$= \frac{9!}{5!}$$ Definición de factorial

Una vez entendido este proceso, se puede hacer mentalmente en un solo paso.

Ejercicio 2.8

Para los problemas del 1 al 8 simplifica la expresión dada.

1. $3!\cdot 4!$ 2. $\frac{8!}{4!}$ 3. $\frac{7!}{0!}$ 4. $\frac{10!}{5!3!}$

5. $\frac{5!}{2!3!}$ 6. $(3!)!$ 7. $\frac{(n-1)!}{n!}$ 8. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

Para los problemas del 9 al 13 escribe la expresión como una razón de factoriales.

9. $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$

10. $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15$

11. $20\cdot 19\cdot 18\cdot 12\cdot 11\cdot 10$

12. $\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6!}$

13. $\frac{43\cdot 42\cdot 41\cdot 40}{4!}$

14. Para que valores de n, n! será divisible por 9

15. 100! termina con una hilera de ceros. Cuántos ceros hay al final de 100!

Para los problemas del 16 al 20 evalúa la suma dada.

16. $\sum_{k=0}^{4} k!$ 17. $\sum_{k=0}^{4} \frac{(k+1)!}{k!}$ 18. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(k-1)!}{k!}$

19. $\sum_{k=1}^{5} \frac{(k+1)!}{(k-1)!}$ 20. $\sum_{k=3}^{6} 3k!$

21. tu haz estudiado funciones cuadráticas, exponenciales y ahora factoriales, cada una de los cuales se hace mucho muy grande cuando la variable independiente se incrementa. Haz una tabla de n^2, 2^n y n! para los enteros $n=0$ hasta $n=10$. Di cual de estas funciones crece más rápido.

22. La serie especificada por $S_n = \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{k!}$ tiene sumas parciales las cuales se acercan a un número interesante cuando n se hace muy grande.

a. Muestra que el noveno término de la serie (i.e., $k=8$) es tan pequeño que no contribuye en nada a los primeros cuantro lugares decimales.

b. Encuentra la aproximación del cuarto lugar decimal para S_7. (Este número es llamado "e", y es usado como base de los logaritmos naturales).

2.9 Introducción a las series binominales.

Tu recuerdas como encontrar el cuadrado de un binomio. Por ejemplo,
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ahora el desarrollo de un binomio al cubo lo puedes hacer usando los resultados anteriores. Tu obtienes:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

La respuesta es una serie de términos. Es llamada serie binomial porque procede de la expanción de un binomio elevado a una potencia. Hay varios patrones los cuales se muestran en estas series. Si tu sabes los patrones, vas a ser capaz de elevar un binomio a una potencia mentalmente en un solo paso. En esta sección vas a tratar de descubrir algunos de estos patrones.

Objetivo

> Descubrir patrones que siguen los signos, exponentes y coeficientes en una serie binominal.

El siguiente ejercicio esta diseñado para conducirte a estos descubrimientos.

Ejercicio 2.9

1. Desarrolla el binomio $(a+b)^4$ en una serie binomial. Esto es más fácil de hacerse si observas que $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, y usando las series de $(a+b)^3$ que ya viste.

2. Desarrolla $(a+b)^5$ como una serie binomial usando los resultados del problema 1.

3. Si tu desarrollas $(a+b)^6$ obtendrías
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Observando los patrones en esta serie binomial y tus respuestas en los problemas 1 y 2, di:
a. El patrón seguido para la potencia de a.
b. El patrón seguido para la potencia de b.
c. El grado de cada término.
d. El número de términos que hay en la serie.
e. Cualquier patrón que tu veas en los coeficientes cuando veas la serie al principio y al final.

4. El patrón seguido por las potencias de a y b es fácil de ver. El patrón de los coeficientes es más difícil. Acomodando los coeficientes para varias potencias de (a+b) en un triángulo un patrón muestra que

$(a+b)^0$ 1
$(a+b)^1$ 1 1
$(a+b)^2$ 1 2 1
$(a+b)^3$ 1 3 3 1
$(a+b)^4$ . . . 1 4 6 4 1
$(a+b)^5$ . . 1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$ . . 1 6 15 20 15 6 1

Este triángulo es llamado el triángulo de Pascal.

Di que patrón relaciona a los números de una fila del triángulo de Pascal con los números de la fila anterior. Después demuestra que entendiste el patrón encontrando los coeficientes de $(a+b)^7$.

5. Supón que alguien te dice que los coeficientes de $(a+b)^9$ son 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1. Usa lo que haz descubierto para desarrollar $(a+b)^{10}$ como una serie binomial en un paso.

6. Supón que deseas desarrollar un binomio con un signo (-) entre los términos, como $(x\text{-}y)^6$. Observa que $(x\text{-}y)^6$ es igual a $[x+(\text{-}y)]^6$. Después usa el patrón para las series binomiales de $(a+b)^6$ del problema 3, para desarrollar $(x\text{-}y)^6$ como una serie binomial. Cual es la única diferencia en la serie cuando el signo del binomio es negativo en lugar de positivo.

2.10 La fórmula binomial

En el ejercicio 2.9 desarrollaste binomios con diferentes exponentes. Por ejemplo:
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^2+6ab^5+b^6$.

Examinando estas series binomiales, puedes encontrar difernetes patrones. Para las series como $(a+b)^n$ en su desarrollo observamos lo siguiente:
1. El desarrollo consta de $n+1$ términos
2. El grado de cada término es n
3. La potencia de a empieza con a^n y el exponente disminuye en uno en cada término, la potencia de b empieza con b^0 y se incrementa el exponente de uno en uno en cada término.
4. Los coeficientes son simétricos o sea primero igual al último, segundo con penúltimo, tercero con antepenúltimo y asi sucesivamente.
5. Los coeficientes pueden ser calculados mediante la fila anterior del triángulo de Pascal sumando los pares de coeficientes adyacentes de la fila anterior.

En esta sección aprenderás como calcular cualquier coeficiente en cualquier serie binomial sin necesidad de conocer la fila anterior de triángulo de Pascal.

Objetivos:

1. Dado un binomio elevado a la "n" desarrollarlo como una serie binomial en un paso.
2. Dado un binomio de la forma $(a+b)^n$ encuentra el término k o encuentra el término que contiene b^r, donde k y r son enteros de 0 hasta n.

Hay un patrón para los coeficientes el cual es difícil de descubrir pero es fácil de recordar y usar una vez que lo hayas aprendido.

Considera la serie binomial

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b^1 + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8a^1b^7 + b^8$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

El número de los círculos es el número de los términos. Si multiplicas el coeficiente de un término por el exponente de "a" sobre el número de términos, obtienes el coeficiente del siguiente término. Por ejemplo:

$$\frac{8\ (7)}{2} = 28$$

$$\frac{28\,(6)}{3} = 56$$

$$\frac{\overset{\text{Exponente de a}}{56\,(5)}}{\underset{\text{Número de términos}}{4}} = 70 \text{ — Siguiente coeficiente}$$

Coeficiente

En general:

$$\frac{(coeficiente)\,(exponente\,de\,a)}{número\,de\,términos} = siguiente\ coeficiente$$

Un patrón más interesante muestra que si no simplificas los coeficientes cuando los calculas, por ejemplo, el primer término de $(a+b)^8$ es:

① a^8

Usando el patrón, el segundo término es:

② $\frac{8}{1}a^7b^1$

Multiplicando el coeficiente $\frac{8}{1}$, por el exponente de "a" sobre el número de términos, $\frac{7}{2}$, te permite escribir el término 3

③ $\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}a^6b^2$

El cuarto y quinto término pueden ser calculados de la misma manera

④ $\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{3}a^5b^3$

⑤ $\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{5}{4}a^4b^4$

Los coeficientes pueden ser escritos como factoriales. Por ejemplo, el coeficiente del cuarto término es

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{8!}{3!5!}$$

Los tres números 8,3,5 muestran como los exponentes estan en varios lugares. Como se muestra a continuación

$$(a+b)^8 = \ldots\ldots\ldots + \frac{8!}{3!5!}a^5b^3$$

El 8 en el numerador es el exponente n, al cual $(a+b)$ es desarrollado. El 3 y el 5 en el denominador son los exponentes de a y b en el término que estas buscando.

Con este conocimiento tu puedes lograr el objetivo de esta sección.

Ejemplo 1.
Encuentra el término de $(a-b)^{17}$ que contenga b^{11}

Solución
1. La potencia de a debe ser a^6, ya que los exponentes de a y b suman 17.

2. Por lo tanto, el término es

$\frac{17!}{11!6!}a^6(-b)^{11}$, lo cual es igual a

$-\frac{17!}{11!6!}a^6b^{11}$ ya que -b es elevada a un exponente impar

3. Efectuando operaciones

$-\frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^6b^{11}=-12376a^6b^{11}$

Ejemplo 2
Encuentra el octavo término de $(a+b)^{12}$

Solución
1. El octavo término es el que tiene b^7, ya que el primer término tiene b^0

2. Por lo tanto, el octavo término tiene $a^5\cdot b^7$ ya que la suma de los exponentes debe sumar 12.

3. El término es entonces

$\frac{12!}{7!5!}a^5b^7$, lo cual es igual a:

$792a^5b^7$

Ejemplo 3
Encuentra el quinto término de $(r^3\text{-}2p)^{10}$

Solución
1. El primero y segundo término del binomio corresponden a: r^3 y $-2p$
2. El quinto término va a tener $(-2p)^4$
3. La potencia de r^3 será $(r^3)^6$, ya que los exponentes r^3 y $(-2p)$ suman 10.
4. El término es por lo tanto:

$\frac{10!}{4!6!}(r^3)^6(-2p)^4=$

5. Simplificando la fracción, tenemos:
$=210r^{18}(16p^4)$

$=3360r^{18}p^4$

Nota que los exponentes no suman 10 después de que la simplificación es hecha.

Ejemplo 4
Encuentra el término que contenga b^r en $(a+b)^n$

Solución

$$\boxed{\text{Término} = \frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}\cdot b^r}$$

Esta fórmula es llamada fórmula binomial ya que es usada para calcular términos de las series binomiales.

Ejemplo 5
Desarrolla $(r^2\text{-}3p)^7$ como una serie binomial. Esto es más fácil de lograr usando el patrón para encontrar los coeficientes.

$$(r^2-3p)^7 = (r^2)^7+7(r^2)^6(-3p)+21(r^2)^5(-3p)^2+35(r^2)^4(-3p)^3+35(r^2)^3(-3p)^4+21(r^2)^2(-3p)^5$$

1 2 3 4 5 6

$$+7(r^2)(-3p)^6+(-3p)^7$$

7 8

Efectuando las operaciones y simplificando obtenemos:
$(r^2\text{-}3p)^7=r^{14}\text{-}21r^{12}p+189r^{10}p^2\text{-}945r^8p^3+2835r^6p^4\text{-}5103r^4p^5+5103r^2p^6\text{-}2187p^7$

Nota que después de la simplificación los patrones de los coeficientes y exponentes se pierden.

Ejercicio 2.10

De los problemas del 1 al 10
a. Desarrolla el binomio dado como serie binomial.
b. Simplifica las series resultantes lo más que puedas.

1. $(X+Y)^5$	2. $(P\text{-}m)^7$	3. $(a+2)^4$
4. $(2x\text{-}3)^5$	5. $(x^2+y^3)^6$	6. $(2a\text{-}b)^3$
7. $(x+x^{-1})^8$	8. $(x^{1/2}\text{-}x^{-1/2})^4$	9. $(1+i)^6$
10. $(1\text{-}i)^5$		

De los problemas de 11 al 20, encuentra el término con la potencia especificada en el desarrollo del binomio dado. Puedes dejar el coeficiente en forma factorial a menos que haya otra instrucción.

11. $(x+y)^8$, y^5	12. $(r+s)^{13}$, s^7
13. $(p\text{-}j)^{15}$, j^{11}	14. $(a\text{-}b)^{21}$, b^{16}
15. $(e\text{-}f)^{38}$, f^{23}	16. $(x+y)^{73}$, x^{48}