17. $(x^3+y^2)^{55}$, y^{12} 18. $(x^2-9)^{33}$, x^{24}
19. $(3x+2y)^8$, y^5 20. $(x+y)^{100}$, y^{50}

De los problemas del 21 al 27 encuentra el término especificado. Puedes dejar el coeficiente en forma factorial a menos que haya otra instrucción

21. $(j+k)^{34}$	Término 17
22. $(r-q)^{15}$	Término 12
23. $(a-b)^{17}$	Término 8
24. $(x-y)^{19}$	Término 20
25. $(3x^2-2y^3)^7$	Término 4
26. $(2x^2-1)^8$	Término 6
27. $(x^3-5)^6$	Término 3

28. Supón que $(r+s)$ es elevado a una potencia de un entero positivo, y un término de la serie binomial es $27132r^{13}\cdot s^6$
   a. ¿Qué término es?
   b. ¿A qué potencia fué elevado $(r+s)$?
   c. ¿Cuál es el siguiente término? Simplifica el coeficiente.
   d. ¿Cuántos términos tiene la serie?

29. Encuentra la aproximación decimal de $(1.02)^{10}$ escribiéndolo como $(1+0.02)^{10}$ y calculando los primeros 5 términos de la serie binomial resultante.

CAPITULO 3

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

El estudio del cálculo de probabilidades comenzó hace alrededor de tres siglos, considerándose únicamente su aplicación a los juegos de azar. Posteriormente, fue adquiriendo importancia el estudio de la teoría matemática de la probabilidad, por su aplicación en una amplia gama de problemas del mundo real. Actualmente, la probabilidad es utilizada en estudios actuariales sobre fondos de pensiones y jubilaciones, así como, en todo tipo de coberturas de seguros. Otras aplicaciones del cálculo de probabilidades se dan en el estudio de la física moderna, en el ajuste de curvas, en control de calidad y en la teoría de muestreo; todos estos tópicos de gran relevancia en el mundo real actual. Una utilización del calculo probabilístico que merece, por su importancia, un tratamiento especial, es la que se le da en el estudio de la estadística, la cual tiene aplicación en un sinnúmero de campos, como lo son, la biología, economía, psicología, contaduría, ciencias sociales y humanísticas, en general.

La palabra estadística trae a la mente de la mayoría de las personas la idea de un grupo de datos numéricos. Para las personas que se dedican a la estadística esta palabra significa el análisis de dichos datos y la obtención de conclusiones lógicas a partir de los mismos. En este sentido, la ciencia de la estadística es una de las ramas más importantes de las matemáticas aplicadas.

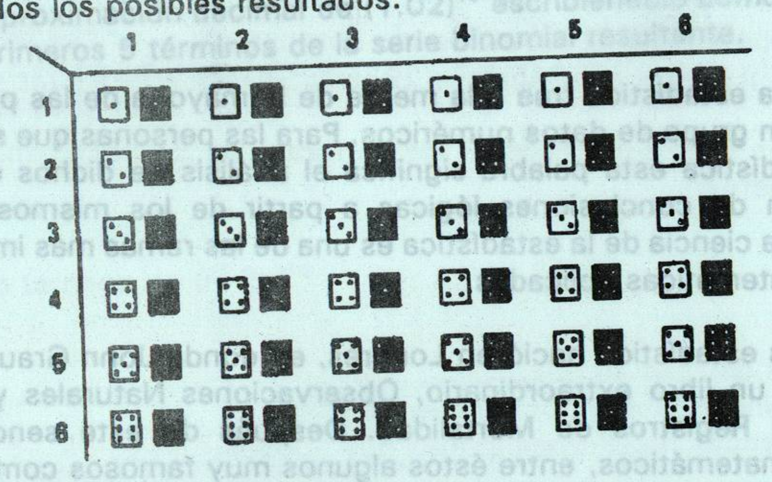
El análisis estadístico nació en Londres, en donde John Graunt publicó en 1662 un libro extraordinario, Observaciones Naturales y Políticas sobre los Registros de Mortalidad. Después de este sencillo inicio muchos matemáticos, entre éstos algunos muy famosos como Laplace (1749-1827) y Gauss (1777-1855), hicieron importantes contribuciones a las ideas básicas de la estadística.

3.1 Probabilidad

Objetivo:

Definir probabilidad y comprender el significado de términos usados para describirla, considerando el juego con un par de dados.

En el quehacer cotidiano es común escuchar frases como "es probable que mañana vaya al cine", "probablemente pase matemáticas"; estas aseveraciones sólo indican que puede ocurrir la acción mencionada. Matemáticamente, se va más allá de la posible ocurrencia del evento señalado. Para ello, se asocia un número a la palabra "probabilidad", el cual indique la esperanza de que ocurra el evento al que se hace mención. Por ejemplo; "si se lanza una moneda, hay 1/2 de probabilidad de que caiga sello"; esta aseveración se puede hacer, sin tener conocimiento alguno del cálculo probabilístico. ¿Por qué es fácil comprender que la probabilidad de que caiga sello al lanzar la moneda es 1/2?, porque se razona intuitivamente, considerando que hay dos maneras posibles de que caiga la moneda y hay una manera posible de que caiga "sello". Otro ejemplo un poco más complicado sería la consideración de la siguiente aseveración; "En el lanzamiento de dos dados, uno blanco y uno negro, hay 3/36 de probabilidad de que la suma de los puntos de las caras que caen hacia arriba de los dos dados, sea 4. Esto puede ser visualizado considerando la siguiente figura, en la que muestran todos los posibles resultados.



Como se puede ver, la lanzar los dos dados, hay 36 posibles resultados, en 3 de los cuales la suma de los puntos es de 4. También en este caso, razonado intuitivamente, podríamos pensar en que dicha probabilidad es de 3/36.

Aprovecharemos este segundo ejemplo, para señalar el significado que se le da a algunas palabras utilizadas con frecuencia en el estudio de la probabilidad.

- A la acción de lanzar los dos dados se le llama "experimento aleatorio", lo cual significa que el resultado es al azar.

- Cada uno de los 36 resultados posibles se le denomina "suceso".

- Un conjunto de sucesos, por ejemplo, aquellos en los cuales la suma de los puntos es 4, es llamado "evento". En este ejemplo, dicho evento es el conjunto de sucesos .

- El conjunto de todos los sucesos es llamado "espacio muestral", en este caso, los 36 resultados posibles forman el espacio muestral.

En función de este razonamiento lógico, es como se define la probabilidad de que un evento ocurra.

Definición

La probabilidad de que ocurra un cierto evento está dada por la razón del número de formas posibles de que ocurra el evento entre el número total de formas de que ocurra y no ocurra dicho evento.

Dicho de otra manera, si un evento puede ocurrir en "a" formas y no ocurrir en "b" formas, la probabilidad "P" de que el evento ocurra se define como la razón:

(1) $$p=\frac{a}{a+b}$$

Donde cada una de las "$a+b$" formas posibles, son igualmente probables.

De la misma forma, se puede definir la probabilidad "q" de que el evento no ocurra, es decir:

(2) $$q=\frac{b}{a+b}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se puede decir que, en general, "la probabilidad de que ocurra un evento es la razón del número de casos favorables al número de casos posibles, siendo todos ellos igualmente probables".

También, de dichas ecuaciones se puede ver que la suma de las probabilidades de ocurrencia y no ocurrencia de un mismo evento, es la unidad, o sea:

(3) $$p+q=1$$

De esta ecuación (3), se puede concluir que:

(4) $p=1-q$, y también que

(5) $q=1-p$

Estas últimas ecuaciones, lo que indican es que "si la probabilidad de que un evento no ocurra es "q", entonces la probabilidad de que ocurra es "$1-q$" y "si la probabilidad de que un evento ocurra es "P", entonces la probabilidad de que no ocurra es "$1-P$".

Otras conclusiones que se pueden hacer de las ecuaciones (3), (4) ó (5) son los casos especiales cuando $q=0$ y cuando $P=0$; en ellas si $q=0$, entonces $P=1$ y si $P=0$, entonces $q=1$.

Ejercicio 3.1

1. Un par de dados, uno blanco y uno negro, es lanzado. Encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
   a) El total sea 10
   b) El total sea al menos 10
   c) El total sea menor que 10
   d) El total sea mayor que 10
   e) El total sea 7
   f) El total es 2
   g) El total esté entre 3 y 7, inclusive
   h) El total esté entre 3 y 7
   i) El total esté entre 2 y 12, inclusive
   j) El total sea 13
   k) Los números sean 2 y 5
   l) El negro caiga en 2 y el blanco caiga en 5
   m) El negro caiga en 2 o el blanco caiga en 5

2. Se saca una carta de un mazo normal de 52 cartas.
   a) ¿Qué nombre se le da al hecho de sacar la carta?
   b) ¿Cuántos sucesos hay en el espacio muestra?
   c) ¿Cuántos sucesos hay en el evento: "la carta sea J, Q o R" ¿Cuántos sucesos hay en el evento: "la carta sea $"J"$, $"Q"$ o $"R"$
   d) Calcular la probabilidad de que la carta sea negra
   e) Calcular la probabilidad de que la carta sea AS.
   f) Calcular la probabilidad de que la carta esté entre 3 y 7, inclusive.
   g) Calcular la probabilidad de que la carta sea el ocho de corazones
   h) Calcular la probabilidad de que la carta pertenezca al mazo
   i) Calcular la probabilidad de que la carta sea una $"J"$.
   j)

3. Tres monedas de 1, 5 y 10 centavos son lanzadas al mismo tiempo. Cada moneda puede caer en "cara" o "sello".
   a) ¿Que nombre se le da al hecho de lanzar las monedas?
   b) Enlistar los ocho sucesos posibles del espacio muestra.
   c) ¿Cuántos sucesos hay en el evento:"Exactamente dos de las monedas caen cara"?
   d) Calcular $p(ccs)$
   e) Calcular p (exactamente dos caras)
   f) Calcular p (al menos dos caras)
   g) Calcular p (las de 5 y 1 sean sello)
   h) Calcular p (la de 1 ó la de 5 sean sello)
   i) Calcular p (ninguna sea sello)
   j) Calcular p (o, 1, 2, ó 3 caras)
   k) Calcular p (4 sean caras)

3.2 Dos principios de conteo

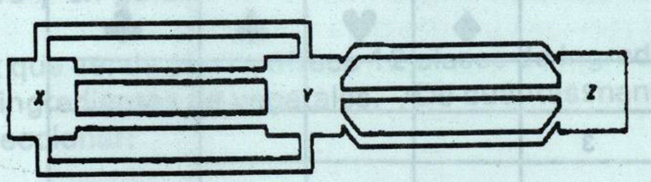
Objetivo:

Utilizar los principios de conteo para determinar el número de sucesos diferentes de un evento.

En los ejemplos vistos hasta ahora, se ha podido enlistar todos los sucesos posibles en un evento, pero hay otros casos en los cuales no se pueden contar todas las maneras posibles para que suceda un evento; para estos últimos, se considerarán dos principios fundamentales de conteo en probabilidad, los cuales pueden ser enunciados de la siguiente manea: si $n(A)$ y $n(B)$ son los números de formas en que pueden ocurrir los eventos A y B, respectivamente, entonces:

i) n (A y luego B) $=$ $n(A) \times n(B)$
ii) n (A o B) $=$ $n(A) + n(B)$

Un ejemplo típico en el cual se pueden aplicar estos dos principios es el de un ratón en un laberinto, como se muestra en la siguiente figura



i) Si el ratón está en el cuarto "x", para llegar al cuarto "z", tiene 12 caminos posibles, ya que tiene 4 formas de llegar al cuarto "y", y por cada una de estas tiene 3 formas de llegar al cuarto "z", es decir:
$n(y$ y luego $z) = n(y) \times n(z)$

ii) Si el ratón está en el cuarto "y", tiene cuatro caminos posibles para llegar al cuarto "x" y 3 caminos posibles para llegar al cuarto "z", entonces, para llegar del cuarto "y", al cuarto "z", tiene siete maneras posibles, esto es:
$n(y$ o $z) = n(y) + n(z)$

Eventos mutuamente no excluyentes

Para determinar el número de formas que un evento "E_1", o un evento "E_2" pueden ocurrir, cuando dichos eventos son no excluyentes, se debe considerar la suma de las formas de que suceda el evento "E_1" y de que suceda el evento "E_2" y a esta suma se le deberá restar el número de formas de que sucedan simultáneamente los dos eventos, es decir:

$$n(E_1 \text{ o } E_2)=n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \text{ y } E_2)$$

Lo anterior se ejemplificará con el siguiente problema:

¿De cuántas formas se podrá seleccionar una carta que sea trébol o una carta que sea del jocker al rey, de una baraja inglesa normal?

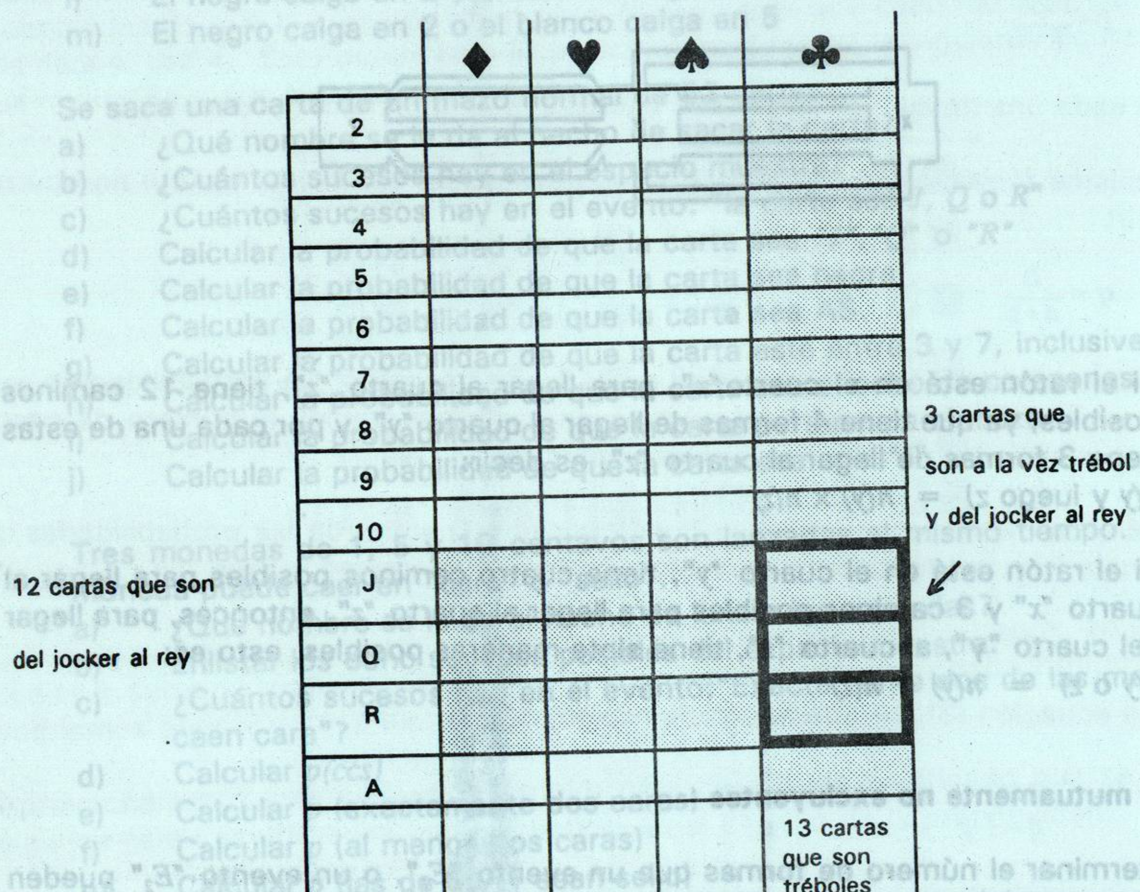
Sean, $n(E_1)$ el número de formas como se puede escoger una carta que sea trébol, $n(E_2)$ el número de formas como se puede escoger una carta del jocker al rey y $n(E_1 \text{ y } E_2)$ el número de formas de escoger una carta que a la vez sea trébol y sea del jocker al rey, entonces:

$$n(E_1 \text{ o } E_2)=n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \text{ y } E_2)$$

En este caso.

$$n(E_1 \text{ o} E_2) = 13+12-3=22$$

Lo cual puede ser visualizado en la siguiente figura:



Ejercicio 3.2

1. Adrián tiene 15 pantalones y 23 camisas. ¿De cuántas maneras diferentes podrá Adrián seleccionar una combinación de pantalón y camisa?

2. Patricia tiene 20 vestidos y 17 juegos de ropa deportiva de pantalón y camiseta. ¿De cuántas maneras diferentes podrá Patricia seleccionar un vestido o un juego de ropa deportiva?

3. Un agente de ventas tiene 7 clientes en Guadalajara y 13 clientes en Mazatlán. ¿De cuántas maneras diferentes podrá el agente telefonear?

   a) A un cliente de Guadalajara y luego a un cliente de Mazatlán?
   b) A un cliente de Guadalajara o a un cliente de Mazatlán?

4. Tomy va a una tienda que vende animales. Su hay 37 perros y 15 gatos, ¿De cuántas maneras diferentes podrá seleccionar:

   a) Un perro o un gato?
   b) Un perro y un gato?

5. Un restaurant que vende pizzas ofrece 12 clases de ingredientes de carnes frías y 5 clases de ingredientes de vegetales. ¿De cuántas maneras diferentes podrá un cliente seleccionar:

   a) Una pizza de carnes frías o una de vegetales
   b) Una pizza de carnes frías y una de vegetales

6. En un grupo de matemáticas de una Preparatoria de la UANL hay 13 alumnas y 11 alumnos. ¿De cuántas maneras diferentes podrá el profesor seleccionar:

   a) Una alumna y un alumno para encargar una tarea?
   b) Una alumna o un alumno para encargar una tarea

7. En un videoclub hay 105 películas de acción y 86 de misterio, ¿De cuántas maneras diferentes podrá un cliente seleccionar:

   a) Una película de acción o una de misterio?
   b) Una película de acción y una de misterio?
   c) Una película de misterio y luego otra de misterio?

8. El menú de un restaurant tiene 7 clases de ensaladas, 11 tipos de guisados y 9 clases de postres. ¿De cuántas maneras diferentes podrá un cliente seleccionar un platillo que incluya una ensalada, un guisado y un postre?

9. Utilizando las letras de la palabra "AURELIO". ¿De cuántas maneras se podrá seleccionar:

a) Una vocal o una consonante?
b) Una vocal y una consonante?
c) ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras se pueden formar, usando cada letra a lo mas una vez en cada palabra?

10. Las placas que usan los automóviles tienen 7 caracteres, de ellos, los primeros 3 son letras y los últimos 4 son números. Si pudieran formarse las placas con letras en los primeros 2 lugares y números en los últimos 5 lugares, ¿De cual de las dos formas podrían formarse mas placas?

11. Hay 20 muchachas en el equipo de basquetbol diecisiete tienen más de 16 años, doce miden más de 1.70m de altura y nueve están sobre los 16 años, y sobre el 1.70m de estatura.

a) ¿Cuántas de las muchachas están sobre los 16 años o sobre los 1.70m de altura?

12. Investigadores descubrieron 37 técnicas usadas para trabajar en problemas de matemáticas y 29 técnicas usadas para trabajar problemas de física, 21 de las técnicas son usadas en ambos campos, si una alumna estudia matemáticas y física , ¿cuántas diferentes técnicas deberán aprender?

3.3 Permutaciones

Objetivos:

Resolver problemas de probabilidad que involucren permutaciones.

En el análisis de problemas en los cuales interesa hacer una selección, de un aparte o de todos los objetos, de una colección dada, se presentan dos casos posibles: 1) que la selección se haga mediante un orden definido y 2) que la selección sea hecha sin interesar el orden como se realice.

Para el estudio del primero de estos casos, definiremos lo que se entiende por una permutación.

Definición

Una permutación es un arreglo en un orden definido de una parte o de todos los elementos de un conjunto dado.

Ejemplo 1
¿Cuántas palabras diferentes de 4 letras se pueden formar con las letras a, b, c, d?

Se consideraran los cuatro lugares que deberán ocupar las letras.

_____ _____ _____ _____

La primera posición podrá ocuparla cualquiera de las cuatro letras, la segunda posición solamente podrá ocuparla alguna de las tres letras restantes, la tercera posición solo podrá ser ocupada pro cualquiera de las dos letras que restan y la cuarta posición la podrá ocupar solamente la última letra que queda.

Lo anterior, se puede visualizar de la siguiente manera:

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acdb	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

Como se puede ver, son en total 24 palabras diferentes que se pueden formar con las letras a,b,c,d.

Ejemplo 2
¿Cuántas palabras diferentes de 2 letras se pueden formar con las letras a,b,c,d?

En este caso, como son solamente 2 lugares los que serán ocupados, el número de letras diferentes que se pueden formar es 12, ya que la primera posición la podrá ocupar cualquiera de las cuatro letras y la segunda posición podrá ser ocupada por cualquiera de las tres letras restantes.

Dichas palabras son:

ab	*ba*	*ca*	*da*
ac	*bc*	*cb*	*db*
ad	*bd*	*cd*	*dc*

Este ejemplo 2, puede servir para definir el número de permutaciones de "n" elementos siendo este

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

Es decir: