$$P(n,r)= \frac{n!}{(n-r)!}$$

La justificación de la expresión anterior, se puede hacer considerando que si se tienen "n" elementos, el primero de ellos se puede seleccionar de (n) diferentes formas, el segundo elemento se puede escoger entre (n-1) de ellos, el tercer elemento se puede tomar entre (n-2) elementos, así sucesivamente, hasta llegar al último elemento seleccionado, el elemtno r-ésimo, el que se podrá seleccionar de "n-(r-1)" formas diferentes, por lo cual, el número total de formas en las cuales se pueden seleccionar "r" elementos de un conjunto de "n" elementos, es decir, el número de permutaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r", es igual a A.

$$P(n,r)=(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n\_(r-1)]$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por (n-r)!, se tiene

$$P(n,r) = \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-r(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

O sea, $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

El primer ejemplo viene a ser un caso particular, cuando se considera el número de permutaciones de *"n"* elementos tomados todos a la vez, es decir:

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$= \frac{n!}{0!}$$

Y como 0! = 1, entonces:
$P(n,n)=n!$

Ejemplo 3

¿Cuántas señales diferentes de 6 banderas se pueden formar con 4 banderas amarillas y 2 banderas rojas?

Si *"A"* representa una bandera amarilla y *"R"* representa una bandera roja, se podrán formar las siguientes señales diferentes:

AAAARR	*AAARA*	*AAARRA*
AARRAA	*AARARA*	*AARAAR*
ARRAAA	*ARARAA*	*ARAARA*
ARAAAR	*RRAAAA*	*RARAAA*
RAAARA	*RSSSSR*	*RAARAA*

Este número de permutaciones se puede indicar como:

$$P(6;4,2) = \frac{6!}{(4!)(2!)} = \frac{6(5)(4)(3)(2)(1)}{4(3)(2)(1)(2)(1)}$$

$$P(6;4,2) = 15$$

Lo cual representa el número de permutaciones de 6 banderas, de las cuales 4 de ellas son iguales entre si y las otras 2 son iguales entre si.
En general, el número de permutaciones de *"n"* objetos, de los cuales *"n_1"* son iguales entre si, *"n_2"* son iguales entre si, ..., *"n_r"* son iguales entre si; esta dado por

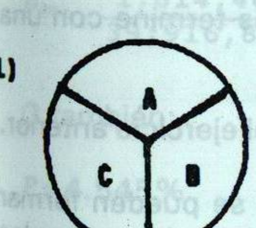
$$P(n;n_1,n_2,n_3,\ldots,n_r = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_r!}$$

Ejemplo 4

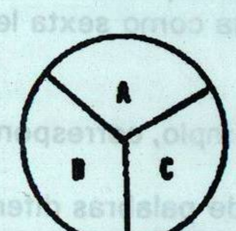
¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar 3 personas en una mesa circular?

Si se representan las 3 personas como A,B y C, al fijar a la persona *"A"* se tendrían las siguientes configuraciones:

1)

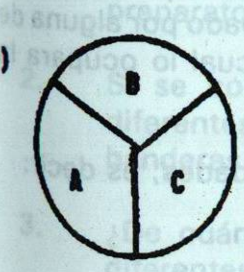


2)

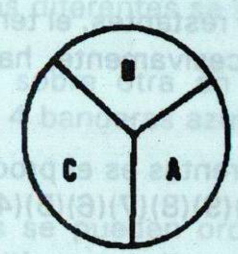


Al fijar a la persona *"B"*, se tendrían las configuraciones

3)

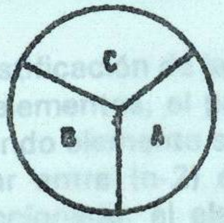


4)

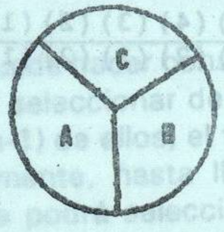


Y al fijar a la persona *"C"*, se tendrían las configuraciones:

5)



6)



Analizando las seis configuraciones, puede verse que la 5) y la 3) son iguales a la 1), y que la 6) y la 4) son iguales a la 2); es decir que, solamente hay dos maneras diferentes como se pueden acomodar 3 personas en una mesa circular.

En general, se puede establecer que un grupo de *"n"* objetos se pueden acomodar circularmente de $(n-1)!$ formas diferentes.

En el siguiente ejercicio se ejemplificará la aplicación de los dos conceptos que se han visto; el de probabilidad y el de permutación. Esto se hará, considerando la probabilidad de que suceda alguna cierta permutación deseada.

Ejemplo 5

¿Cuántas palabras diferentes de 11 letras se pueden formar con las letras de la palabra "PERMUTACION"? ¿Cual es la probabilidad de que al seleccionar al azar una de esas palabras, esta palabra tenga como sexta letra la *"T"* y que además termine con una vocal?.

La primera parte de este ejemplo, corresponde al problema No. 1 del ejercicio anterior.

Para encontrar el número de palabras diferentes de 11 letras que se pueden formar con la palabra "PERMUTACION", se tomaran los 11 lugares que deberán ocupar las letras,

11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

El primer lugar lo podrá ocupar cualquiera de las 11 letras, el segundo lo podrá ocupar solamente alguna de las 10 restantes, el tercer lugar podrá ser ocupado por alguna de las 9 que restan, y así sucesivamente, hasta el último lugar, el cual lo ocupara la última letra que queda.

El número de palabras diferentes es el producto de estas 11 cantidades, es decir:

$P(11,11) = (11)! = (11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)$

$P(11,11) = 39;916,800$

O sea que, hay 39;916,800 palabras diferentes que se pueden formar con la palabra "PERMUTACION".

Para responder a la segunda pregunta, se deberá primero determinar cuántas palabras tendrán en la secta posición a la letra *"T"* y a la vez que terminen con una vocal. Para ello, primero se considera la sexta posición que podrá ser ocupada solamente por una letra (la *"T"*), luego se analiza la última posición, la cual puede ser ocupada por cualquiera de las 5 vocales que aparecen en la palabra "PERMUTACION", posteriormente se puede ocupar con cualquiera de las 9 palabras que quedan y así sucesivamente, hasta llenar los once espacios, es decir:

__ __ __ __ __ 1 __ __ __ __ __

__ __ __ __ __ 1 __ __ __ __ 5

9 __ __ __ __ 1 __ __ __ __ 5

9 8 7 6 5 1 4 3 2 1 5

Si $n(E)$ es el número de palabras formadas de esta manera, entonces:

$n(E) = (9)(8)(7)(6)(5)(1)(4)(3)(2)(1)(5) =$
$= 1;814,400$

La probabilidad de que al seleccionar al azar una palabra, tenga en su sexta posición una *"T"* y además, termine con una vocal; viene a ser la razón de estas dos cantidades, ya que la primera cantidad representa el número de casos posibles y la segunda, el número de casos favorables, por lo cual:

$$P = \frac{1;814,400}{39;916,800} = \frac{1}{22} = 0.04545$$

O también:

$P = 4.545\%$

Ejercicio 3.4

1. Si hay 5 becas disponibles para los mejores 5 alumnos que egresan de una preparatoria, ¿De cuántas formas diferentes se pueden otorgar las becas?
2. Si se colocan 9 banderas una sobre otra en un asta, ¿Cuántas señales diferentes se pueden formar con 4 banderas azules, 3 banderas amarillas y 2 banderas rojas?
3. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en un librero, 3 libros diferentes de Biología y 4 libros diferentes de matemáticas?

4. Calcular el número de novenas de béisbol diferentes que se pueden formar co 17 jugadores, si 4 de ellos sólo juegan como lanzadores, 2 sólo com receptores, 6 solamente en el cuadro y 5 solamente como jardineros.

5. Se van a repartir N$100.00 entre 9 niños, mediante 4 billetes de N$5.00, billetes de N$10.00 y 3 billetes de N$20.00 ¿De cuántas maneras diferente se puede hacer la repartición, si cada niño debe recibir un billete?

6. ¿Cuántas palabras diferentes de 11 letras se pueden formar con 11 letras d la palabra "PERMUTACION"?

7. ¿Cuántas palabras diferentes de 13 letras se pueden formar con las 13 letra de la palabra "permutaciones?"

8. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar en una fila 15 soldados, 2 son ingleses, 3 son italianos, 4 son franceses, 4 son alemanes y 2 so mexicanos, y deben formarse juntos lo de la misma nacionalidad?

9. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 7 personas alrededor de un mesa circular?

10. ¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar 9 cuentas para formar u collar?

Considerando todas las palabras diferentes de 11 letras que se pueden formar con l palabra "PERMUTACION"

11. ¿Cuál es la probabilidad de que la seleccionar al azar una palabra de ellas empiece con la letra "P"?

12. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una palabra de ellas, termine con la letra "n"?

13. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar una palabra de ellas, termine con las tres letras "ion" (en ese orden)?

14. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una palabra de ellas empiece con la letra "p" y termine con la letra "n"?

15. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una palabra de ellas, empiece con la letra "p", en la sexta posición lleve la letra "t" y termine con la letra "n"

3.4 Combinaciones

Objetivo:

Resolver problemas de probabilidad que involucren permutaciones y combinaciones.

Si consideramos las letras a,b,c, sabemos que se pueden formar 3 palabras diferentes de una letra, 6 palabras diferentes de dos letras y 6 palabras diferentes de tres letras, como se puede ver en los siguientes listados:

i) a, b, c, {palabras de una letra}

ii) ab, ac, ba, bc, ca, cb {palabras de dos letras}

iii) abc, acb, bac, bca, cab, cba, {palabras de tres letras}

Lo que representa cada uno de los listados es:

i) El número de permutaciones de tres letras, tomadas de una en una.

ii) El número de permutaciones de tres letras, tomadas de dos en dos.

iii) El número de permutaciones de tres letras, tomadas de tres en tres.

Si nos interesara ahora conocer el número de palabras de una letra, de dos letras y de tres letras, que se pueden formar con las mismas tres letras *a, b, c,* pero <u>sin que interese el orden de las letras tomadas en cada caso</u>, tendríamos los siguientes listados:

i') a, b, c {palabras de una letra}

ii') ab, ac, bc {palabras de dos letras}

iii') a b c {palabras de tres letras}

Como se puede observar, los listados

i) e *i')* son iguales, el listado

ii) consta de 6 elementos y el *ii')* consta solamente de 3 elementos, porque al no tomar en cuenta el orden de las letras, las palabras *ba, ca* y *cb* son iguales a las palabras *ab, ac, y bc,* respectivamente. Finalmente, el listado *iii)* consta de 6 elementos, mientras que el listado *iii')* consta de un solo elemento, esto es porque al no interesar el orden de las letras, las palabras *acb, bac, bca, cab y cba* son todas iguales a la palabra *abc*.

Lo anterior nos lleva a considerar la necesidad de definir un nuevo arreglo de una par
o todos los elementos de un conjunto.

Definición

> Una "combinación" es un arreglo, sin considerar un orden definido, de una parte o de todos los elementos de un conjunto dado.

Tomando en cuenta esta definición podemos establecer lo que representa cada u
de los listados *i')*, *ii')* e *iii')* vistos anteriormente.

i') Representa el número de combinaciones de tres letras, tomadas de una en un

ii') Representa el número de combinaciones de tres letras, tomadas de dos en do

iii') Representa el número de combinaciones de tres letras, tomadas de tres en tre

De manera análoga a como se hizo con las permutaciones, representaremos el núme
de combinaciones de "n" elementos tomados de *"r"* en *"r"*, mediante el símbo
C(n,r).

Tratando de encontrar la manera como están relacionadas las permutaciones con la
combinaciones, analizaremos de nuevo los listados, considerados anteriormente. E
ellos, podemos ver que el *i)* es igual al *i')*, el *ii)* es igual al *ii')* multiplicado pro 2 y
iii) es igual al *iii')* multiplicado por 6. Con este análisis, se puede establecer que e
general, $P(n,r) = r!\,C(n,r)$.

Despejando las combinaciones de esta expresión, se tiene que

$$C(n,r) = \frac{p(n,r)}{r!}$$

Y como $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

entonces $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Para ilustrar lo anterior, consideraremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

¿De cuántas maneras diferentes se puede seleccionar un comité de 3 personas de u
grupo de 7 personas?

Como el orden no interesa al seleccionar, se podrá formar un número de comités igu
a las C(7,3),

y como $C(7,3) = \dfrac{7!}{3!\,(7-3)!}$

$$= \frac{7!}{3!\ 4!}$$

$$= \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)\cdot(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 35$$

Por lo tanto, del grupo de 7 personas, se podrán formar 35 comités diferentes, de 3 personas cada uno.

Ejemplo 2

¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar si se tienen 5 puntos coplanares, tales que, ninguna terna de ellos están en línea recta?

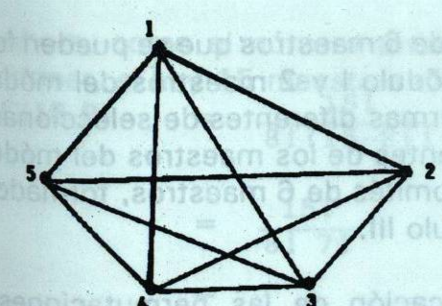
El número de triángulos diferentes que se pueden formar, debe ser igual al número de maneras como se pueden seleccionar 3 puntos entre los 5 puntos que se tienen, es decir, las
C(5,3)

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!\ 2!}$$

$$= \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)\cdot(2)(1)}$$

$$= 10$$

Estos 10 triángulos, pueden ser visualizados en la siguiente figura.



Considerando el vértice 1, se pueden formar los triángulos con vértices 1,2,3;1,2,4;1,2,5;1,3,4;1,3,5 y 1,4,5, es decir 6 triángulos. Tomando ahora el vértice 2, se pueden formar los triángulos con vértices 2,3,4;2,3,5 y 2,4,5, o sea, 3 triángulos más. Al tomar el vértice 3, solamente se puede formar el triángulo 3,4 Siguiendo ese orden, al tomar el vértice 4 o el vértice 5, ya no es posible forr ningún triángulo que no se haya considerado. Por lo cual, el número de triángu diferentes es la suma de 6, 3, 1, 0, y 0, es decir 10.

Ejemplo 3

En la preparatoria No. 25 de la U.A.N.L. se va a integrar un comité de 6 maestros matemáticas para evaluar los módulos I y III. Si la selección se hace entre 8 maest que impartieron el módulo I y 7 maestros que impartieron el módulo III, ¿Cuán comités diferentes se podrán integrar, con la condición de que haya exactamen maestros que impartieron el módulo?

Cada comité deberá tener 4 maestros del módulo I y 2 maestros del módulo III. 4 maestros del módulo I se podrán seleccionar de c(8,4) formas diferentes, es de

$$C(8,4) = \frac{8!}{4!\,4!}$$

$$= \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)(1)\cdot(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 70$$

Los 2 maestros del módulo III podrán ser seleccionados de c(7,2) formas diferent esto es:

$$C(7,2) = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)\cdot(5)(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 21$$

Para determinar el número de comités diferentes de 6 maestros que se pueden form cada uno de los cuales tenga 4 maestros del módulo I y 2 maestros del módulo basta considerar que para cada una de las 70 formas diferentes de seleccionar a maestros del módulo I hay 21 selecciones diferentes de los maestros del módulo por lo tanto, habrá 70x21 = 1,470 diferentes comités de 6 maestros, formados c 4 maestros del módulo I y 2 maestros del módulo III.

Así como se consideró anteriormente la aplicación de las permutaciones a probabilidad, vamos ahora a tratar el caso de hallar la probabilidad de que suc alguna cierta combinación deseada. Esto se ilustrará mediante los siguien ejemplos.

Ejemplo 1

En la preparatoria No. 26 de la U.A.N.L. hay 15 maestros de matemáticas, 9 hombres y 6 mujeres, si se selecciona al azar un grupo de 8 maestros para elaborar un examen, encontrar la probabilidad de que el grupo esté formado por
a) 5 hombres y 3 mujeres

Los 5 maestros se podrán seleccionar de C(9,5) formas diferentes, y como:

$$C(9,5) = \frac{5!}{5!\,(9-5)!}$$

$$= \frac{9!}{5!\,4!}$$

$$=$$

$$= 126$$

Hay 126 formas diferentes de seleccionarlos.

Por otro lado, las 3 maestras podrán ser seleccionadas de c(6,3) maneras diferentes, o sea

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!}$$

$$= \frac{6!}{3!\,3!}$$

$$= 20$$

Hay 20 maneras diferentes de seleccionarlas.

Por lo tanto, habrá (126)(20) = 2,520 grupos diferentes formados por 5 maestros y 3 maestras.

Ahora, como el número total de grupos de 8 maestros diferentes que se pueden formar, si hay 15 maestros disponibles, es igual a c(15,8), es decir:

$$C(15,8) = \frac{15!}{8!\,(15-8)!}$$

$$= \frac{15!}{8!\,7!}$$

$$=$$

$$= (13)(11)(5)(9)$$

$$= 6,435$$