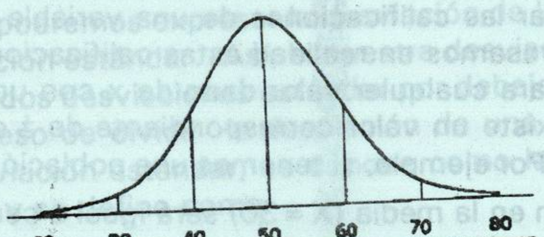

Calificaciones	20	30	40	50	60	70	80
Calificación z	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3
Rango percentil	,13	2,28	15,87	50,00	84,13	97,72	99,87

Fig. 8
Relaciones entre calificaciones originales, calificaciones z y rangos percentiles de una variable normalmente distribuida en la cual $\bar{X}=50$ y $s=10$

Puesto que la curva normal es simétrica, en la tabla A se dan las áreas correspondientes a los valores z positivos. Los valores z negativos tendrán exactamente las mismas proporciones que sus contrapartes positivas. Así, el área entre la media y la z de -1.73 es también 45.82%. El rango percentil de una calificación por debajo de la media se puede obtener ya sea substrayendo 45.82% de 50% ya sea directamente de la columna C. En cualquier caso, el rango percentil de una calificación de 7.35 es 4.18.

Debe notarse cuidadosamente que estas relaciones se aplican exclusivamente a las calificaciones originales en calificaciones estándar no altera, de ninguna manera, la forma de la distribución original. Así, si la distribución original de calificaciones no es normal, la distribución de calificaciones z sera no normal. En otras palabras, la transformación a z no convertirá una distribución no normal en una distribución normal.

La figura 8 aclara aún más las relaciones entre las calificaciones originales, las calificaciones z y los rangos percentiles de una variable normalmente distribuida. En ella se toman $\bar{X}=50$ y $s=10$.

Tomemos como ejemplo varios problemas en los que suponemos que la media de la población $\bar{X}$ es igual a 100 en una prueba estándar de coeficientes I.Q., y la desviación estándar $s=16$. Se supone que la variable está normalmente distribuida.

Ejemplo 1
Juan Domínguez obtiene una calificación de 125 en una prueba I.Q. ¿Qué porcentaje de casos se encuentran entre su calificación y la media? ¿Cuál es su rango percentil en la población?

Solución:
Al comienzo es conveniente hacer un diagrama simple que represente las relaciones en cuestión. Así, en el presente ejemplo, el diagrama aparecería como en la figura 9. Para encontrar el valor de z correspondiente a $X=125$, restamos la media de la

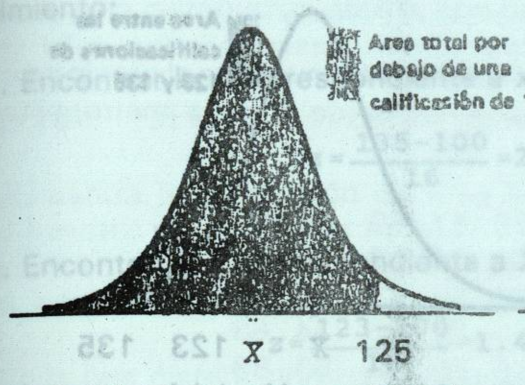

Fig. 9 Proporción de área por debajo de una calificación de 125 en una distribución normal.

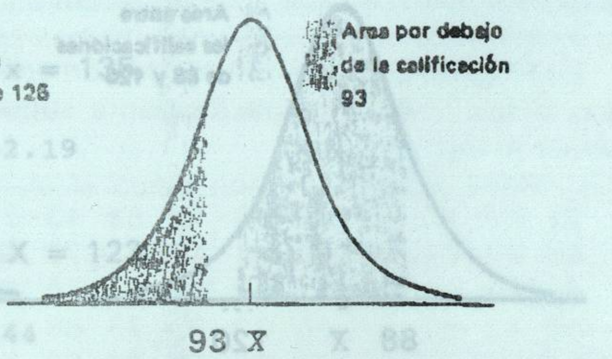

Fig. 10 Proporción de área por debajo de de una calificación de 93 en una distribución normal.

población de 125 y la dividimos por 16. Así

$$z=\frac{125-100}{16}=1{,}56$$

Buscamos 1.56 en la columna A (tabla A), cuyo correspondiente valor de la columna B es 0.4406, es decir el 44.06% del área está ubicada entre la media y 1.56 de desviación estándar por encima de la media. El rango percentil de Juan Domínguez es, por lo tanto, 50 + 44.06 o sea 94.06.

Ejemplo 2
María Rodríguez obtiene una calificación de 93 en una prueba de C.I. ¿Cuál es su rango percentil en la población (figura 10)?

Solución:

$$z=\frac{93-100}{16}=-0.44$$

El signo menos indica que la calificación está por debajo de la media. Buscamos 0.44 en la columna A (tabla A), cuyo valor correspondiente en la columna C es de 0.33, es decir que 33.0% de los casos caen debajo de su calificación. Así, tenemos que su rango percentil es de 33.00.

Ejemplo 3
¿Qué porcentaje de los casos se encuentra entre la calificación de 120 y una calificación de 88 (figura 11)?
Solución:
Nótese que para responder esta pregunta no restamos 88 de 120 y dividimos por x. Las áreas de una curva normal de probabilidad se asignan con relación a la media como punto fijo de referencia. Debemos, por tanto, calcular separadamente el área entre la media y una calificación de 120 y el área entre la media y una calificación de 88. Sumamos después las dos áreas para resolver el problema.

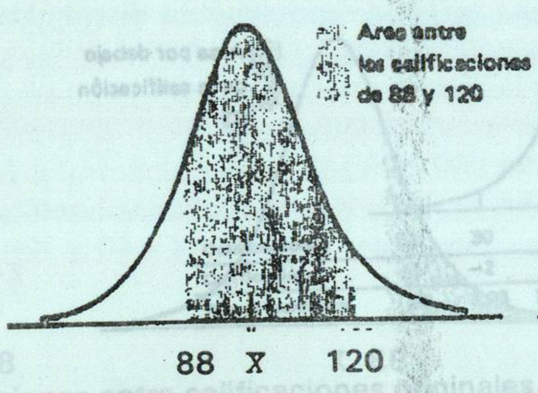

Fig. 11 Proporción del área entre las calificaciones de 88 y 120 en una distribución normal .

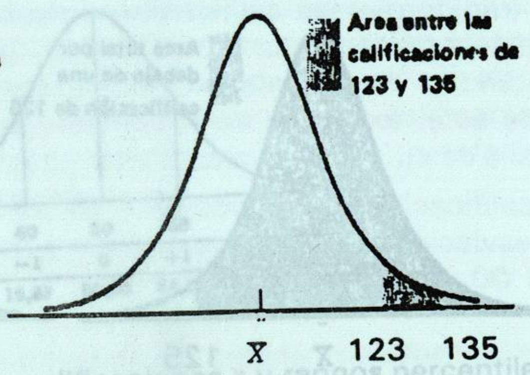

Fig. 12 Proporción del área entre las calificaciones de 123 y 135 en una distribución normal.

Procedimiento:

Paso 1. Encontrar la z correspondiente a X = 120:

$$z=\frac{120-100}{16}=1.25$$

Paso 2. Encontrar la z correspondiente a X = 88:

$$z=\frac{88-100}{16}=-0.75$$

Paso 3. Encontrar las áreas requeridas por referencia a la columna B (tabla A):

Area entre la media y z = 1.25 es 39.44%
Area entre la media y z = -0.75 es 27.34%

Paso 4. Sumar las dos áreas obtenidas

Así, el área entre 88 y 120 = 66.78%

Ejemplo 4
¿Qué porcentaje del área está ubicado entre una calificación de 123 y otra de 135 (figura 12)?
Solución:
Una vez más, no podemos obtener la respuesta directamente. Debemos encontrar el área entre la media y la calificación de 123 y restarla del área entre la media y la calificación de 135.

Procedimiento:

Paso 1. Encontrar la z correspondiente a x = 135.

$$z=\frac{135-100}{16}=2.19$$

Paso 2. Encontrar la z correspondiente a X = 123.

$$z=\frac{123-100}{16}=1.44$$

Paso 3. Encontrar las áreas requeridas en la columna B (tabla A)

El área entre la media y z = 2.19 es 48.57%

El área entre la media y z = 1.44 es 42.51%

Paso 4. Restar para obtener el área entre 123 y 135. La diferencia es

48.57 - 42.51 = 6.06%

Ejemplo 5.
Dijimos anteriormente que la transformación a calificaciones z nos permite comparar una posición individual en una variable con su posición en otra. Ilustremos este importante empleo de las calificaciones z.
Solución:
En una prueba estándar de aptitud, Juan Garza obtuvo una calificación de 245 en la prueba de relaciones verbales y de 175 en la prueba de relaciones matemáticas. Las medias y las desviaciones estándar en cada una de estas pruebas normalmente distribuidas son las siguientes: verbal, $\overline{X}=220$, $s=50$; matemáticas, $\overline{X}=150$, $s=25$.
¿En cuál de los dos pruebas obtuvo Juan mejor calificación? Lo único que tenemos que hacer es comparar las calificaciones estándar obtenidas por Juan en cada variable.
Así:

$$z\,verbal=\frac{245-220}{50}=0.50 \qquad z\,matemática=\frac{175-150}{25}=1.00$$

Podemos concluir, por tanto, que Juan obtuvo una mejor calificación en la parte matemática de la prueba de aptitud. Por supuesto, si lo deseamos, podemos expresar las calificaciones como rangos percentiles. Así, el rango percentil de Juan es 84.13 en la prueba matemática y sólo de 69.15 en la prueba verbal.

Ejercicio 3.5

Supóngase que la Secretaría de Comercio (SECOM), investiga el precio de cierto artículo básico, en los ciento cuarenta supermercados de la zona metropolitana y encuentra lo sig:

$													
71	48	78	33	62	68	78	63	43	39	57	93	56	61
40	43	45	84	63	61	48	73	70	60	74	53	72	39
65	68	63	82	72	77	55	52	48	42	86	73	49	71
58	52	68	67	63	72	63	73	68	59	68	65	34	63
80	63	67	55	58	88	50	56	59	56	85	54	63	88
62	87	66	83	70	88	79	52	33	61	60	26	100	54
65	69	67	70	60	55	64	80	47	83	81	57	48	76
58	46	94	40	38	43	59	59	50	95	67	82	75	62
87	64	36	57	63	77	76	62	45	69	70	64	42	78
58	60	64	47	52	62	51	73	73	84	66	43	69	53

1) Determina la distribución de frecuencias agrupadas, usando 15 intervalos de clase.

2) Anota los límites y puntos medios verdaderos de cada intervalo.

3) Obtén la distribución de frecuencias acumuladas y la distribución de porcentajes acumulados.

4) Dibuja el polígono de frecuencia de la distribución.

5) Dibuja el histógrama correspondiente, utilizando los límites reales.

6) Dibuja el polígono de porcentajes acumulados (ojiva) de la distribución, acumulando las frecuencias hacia arriba.

7) Utilizando la curva de porcentajes acumulados, encuentra:
a) La mediana b) El precio correspondiente al 25% percentil c) El precio correspondiente al 75% percentil

8) Encuentra el rango percentílico correspondiente a los siguientes precios:
a) $40 b) $50 c) $80

9) Supón que la SECOM decide fijar el precio de este producto a $59, ¿cuál será el porcentaje de supermercados que tendrán que subir el precio de este artículo?

10) Supón que la SECOM decide clausurar todos los supermercados que ofrezcan este producto con un rango percentil superior a 80, independientemente de los precios de otros artículos. Por lo tanto, el percentil 80 puede llamarse punto de "eliminación". ¿Qué precio constituye el punto de eliminación para esta distribución?

11) Dada una distribución normal con una media de 60 y una desviación estándar de 10.4, encuentra las calificaciones estándar equivalentes para las siguientes calificaciones.
a) 70 b) 56 c) 60 d) 46.5 e) 83.4 f) 34

12) Encuentra la proporción de área bajo la curva normal entre la media y las siguientes calificaciones estándar.
a) -1.35 b) +0.48 c) +2.27 d) -1.74 e) +1.06
f) +2.83 g) -0.52 h) +1.74 i) +2.07

13) Dada una distribución normal basada en 1000 casos con una media de 60 y una desviación estándar de 9, encuentra:

a) La proporción del área y el número de casos entre la media y las siguientes calificaciones: 70, 80, 55, 35.

b) La proporción del área y el número de casos entre las siguientes calificaciones: 70 - 80, 55 - 60, 55 - 80.

14) A continuación se dan las calificaciones del estudiante Garza, la media y la desviación estándar en cada una de las cinco materias efectuadas a los 3000 estudiantes de una preparatoria.

Materias	$\overline{X}$	s	Calif. de Garza
Español	50	5	60
Matemáticas	65	8.1	74
Biología	79	11.3	75
Química	70	6.5	80
Sociales	82	7.4	70

a) Convertir cada calificación de las pruebas de Garza en calificaiones estándar.

b) ¿En cuál de las pruebas obtuvo una posición mejor? ¿En cuál peor?

c) ¿Cuántos estudiantes sobrepasaron la calificación que Garza obtuvo en matemáticas? ¿En biología? ¿En química?

d) ¿Qué suposición se debe hacer para contestar la pregunta anterior?

15.- En una prueba normalmente distribuida de aptitud de matemáticas:
Para mujeres: $\overline{X} = 58$, $s = 10$
Para hombres: $\overline{X} = 70$, $s = 8$

a) Roberto obtuvo una calificación de 74, ¿Cuál es su rango percentil en relación con ambas normas, la masculina y la femenina?

b) El rango percentil de Leticia es 73 en la norma femenina. ¿Cuál es su rango percentil en la norma masculina?