CAPITULO 4

TRIGONOMETRIA
PRIMERA PARTE

La trigonometría se considera como la rama de la geometría métrica que, como lo indica su nombre, estudia las relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados y los ángulos de los triángulos; aunque sus aplicaciones se extienden a funciones y ángulos en general. También se le ha definido como la ciencia de las medidas "indirectas", ya que es útil para calcular longitudes, distancias y ángulos, los cuales de otra forma no podrían ser medidos directamente; como la profundidad de un precipicio, la altura de una montaña, la distancia de la tierra a la luna, etc.

En la tecnología moderna, la trigonometría desempeña un papel importante en la ingeniería, navegación, mecánica, en las aplicaciones de los vectores, movimientos ondulatorios, funciones periódicas, sonido, luz, electricidad, etc.

En este capítulo sólo verás la trigonometría aplicada a la geometría plana, ya que es un medio muy importante para el estudio de los fenómenos físicos, así como también para estudios más avanzados de las matemáticas.

4.1 Angulos

Objetivo:

Clasificar los ángulos de acuerdo a su medida

En esta **sección se presentan algunos conceptos preliminares sobre ángulos que frecuentemente estarás utilizando.**

ANGULO ∠ **Se denomina "ángulo" a la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto. Las rectas son los "lados del ángulo" y el punto donde se cortan es su "vértice".**

En la figura 4.1 las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se cortan en el punto A. Por lo tanto, el vértice del ángulo es A; los lados del ángulo son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

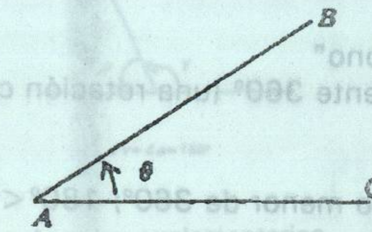


Fig. 4.1

Un ángulo se designa por cualquiera de las siguientes maneras: con la sola letra del vértice, si hay sólo un ángulo que tenga tal vértice, por ejemplo, ∠ A de la figura 4.1; mediante tres letras mayúsculas de las cuales la del vértice se encuentra y se nombra entre las otras dos, que se colocan sobre los lados del ángulo, en la figura 4.1 el ∠A se puede designar por ∠BAC o ∠CAB; o simplemente se le puede llamar por una letra griega como el ∠Θ (teta) de la figura anterior, las más usadas son: α (alfa), β (beta), δ (delta), ϕ (fi), ρ (ro), ω (omega), etc.

El tamaño de un ángulo depende de la extensión del plano que se barre entre los lados del ángulo. Por ejemplo, el transportador de la figura 4.2 muestra que ∠A mide 60°. Al utilizar un transportador es necesario que te cerciores de que el vértice del ángulo caiga exactamente en el centro de él, y que uno de sus lados coincida con el diámetro señalado por 0°-180° del transportador.

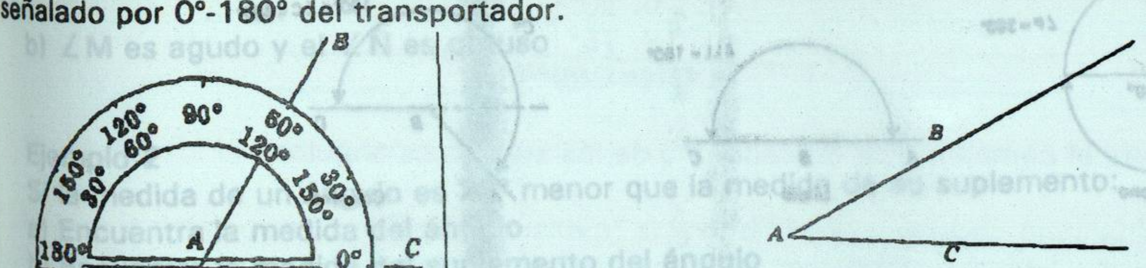


Fig. 4.2

El tamaño de un ángulo no depende de la longitud de sus lados. Así, por ejemplo, el tamaño del $\angle A$ de la figura 4.2, no cambiará si se alargan o se acortan sus lados $\overline{AB}$ y

CLASES DE ANGULOS

"Angulo agudo"
Es el menor de 90°; $\angle A < 90°$

"Angulo recto"
Es el que mide exactamente 90°; $\angle R = 90°$

"Angulo obtuso"
Es el mayor de 90° pero menor de 180°; $90° < \angle O < 180°$

"Angulo llano"
Es el que mide exactamente 180°; $\angle LL = 180°$

"Angulo de una vuelta o perígono"
Es el que mide exactamente 360° (una rotación completa; $\angle P = 360°$

"Angulo cóncavo"
Es el mayor de 180° pero menor de 360°; $180° < C < 360°$

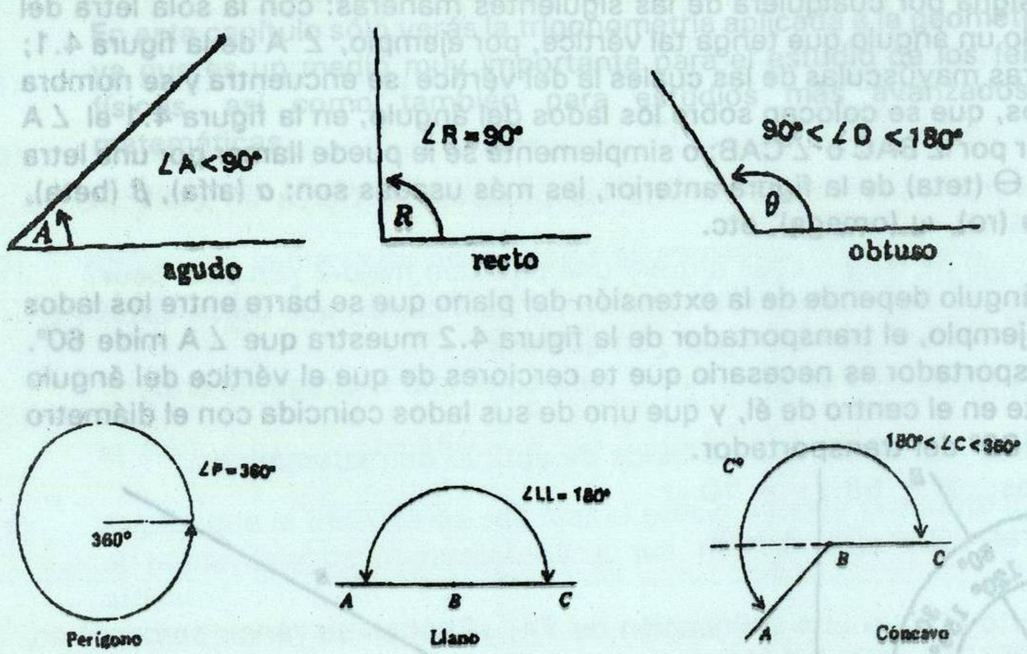


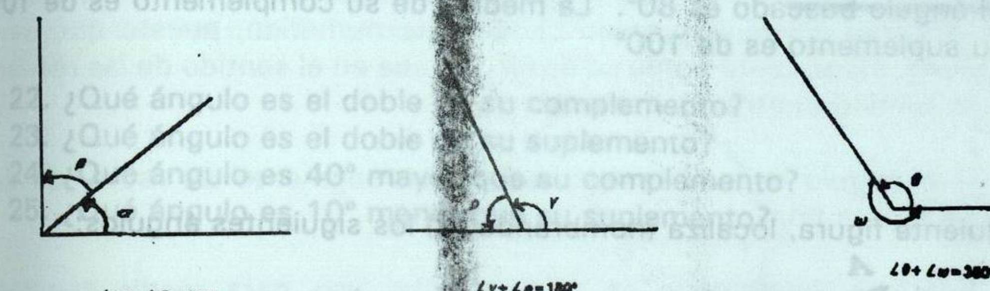
Fig. 4.3

ANGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y CONJUGADOS

"Angulos complementarios"
Son dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90°)

"Angulos suplementarios"
Son dos ángulos cuya suma es un angulo llano (180°)

"Angulos conjugados"
Son dos ángulos cuya suma es igual a un perígono (360°)



Angulos complementarios — Angulos suplementarios — Angulos conjugados

Fig. 4.4

Ejemplo 1

Si los ángulos M y N son suplementarios:
a) Encuentra la medida del $\angle N$ si el $\angle M = 56°$
b) Clasifica cada ángulo como agudo u obtuso

Solución

a) $\angle M + \angle N = 180°$ — La suma de ángulos suplementarios es 180°

$56° + \angle N = 180°$

$\angle N = 124°$

b) $\angle M$ es agudo y el $\angle N$ es obtuso

Ejemplo 2

Si la medida de un ángulo es 20° menor que la medida de su suplemento:
a) Encuentra la medida del ángulo
b) Encuentra la medida del suplemento del ángulo
c) Encuentra la medida del complemento del ángulo

Solución

a) Sea x = la medida del ángulo
Entonces $180°-x$ es la medida del suplemento
$x = (180°-x)-20°$
$2x = 160°$
$x = 80°$

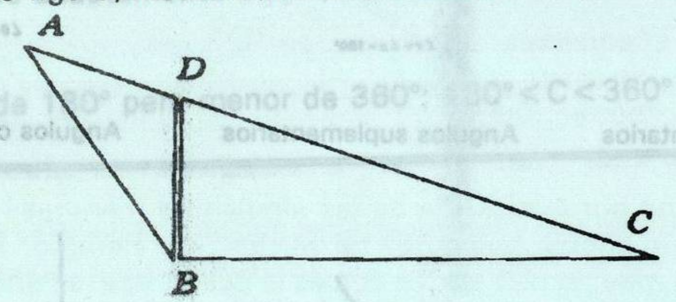
b) La medida del suplemento del ángulo es: $180°-x$
$180°-x = 180°-80° = 100°$

c) La medida del complemento del ángulo es: $90°-x$
$90°-x = 90°-80° = 10°$

Así la medida del ángulo buscado es 80°. La medida de su complemento es de 10° y la medida de su suplemento es de 100°

Ejercicio 4.1

A partir de la siguiente figura, localiza (nombrándolos) los siguientes ángulos:



1. Cuatro ángulos agudos
2. Un ángulo recto
3. Dos ángulos obtusos
4. Un ángulo llano

Determina si cada ángulo es agudo, recto, obtuso, llano, perígono o cóncavo:

5. 180°	______	6. 90°	______
7. 360°	______	8. 75°	______
9. 100°	______	10. 200°	______

Encuentra el complemento de cada uno de los siguientes ángulos:

11. 20°　　12. 43°　　13. 63°

Encuentra el suplemento de cada uno de los siguientes ángulos

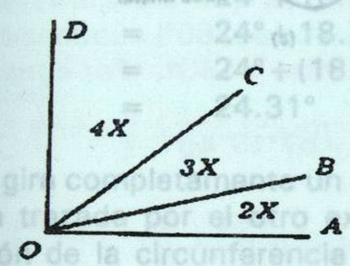
14. 140°　　15. 25°　　16. 45°

Encuentra el conjugado de cada uno de los siguientes ángulos

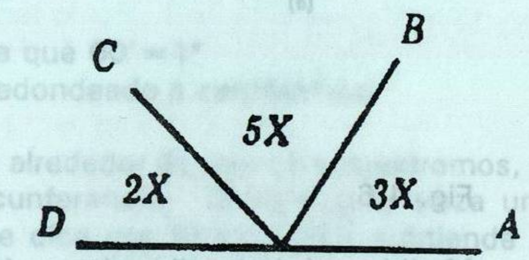
17. 60°　　18. 200°　　19. 150°

Encuentra el valor de "x" y cuánto mide cada ángulo

20.



21.



22. ¿Qué ángulo es el doble de su complemento?
23. ¿Qué ángulo es el doble de su suplemento?
24. ¿Qué ángulo es 40° mayor que su complemento?
25. ¿Qué ángulo es 10° menor que su suplemento?

4.2 Medida de un ángulo

Objetivo:

Convertir medidas de ángulos dados en grados y minutos a grados decimales o a radianes, y viceversa; aplicar las fórmulas para encontrar la longitud de arco y el área de un sector circular.

Un ángulo también se puede formar rotando un segmento de recta alrededor de uno de sus extremos: el vértice (punto O de la figura 4.5); desde su posición inicial, el "lado inicial" $(\overline{OX})$, hasta la posición final, el "lado terminal" $(\overline{OP})$

Fig. 4.5

El ángulo así generado se llama "positivo" si la dirección de rotación (indicada por una flecha curvada) va en contra del movimiento de las manecillas del reloj y "negativo si la dirección de rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. En la figura 4.6, los incisos a) y c) muestran ángulos positivos y el inciso b) de la misma figura muestra un ángulo negativo.

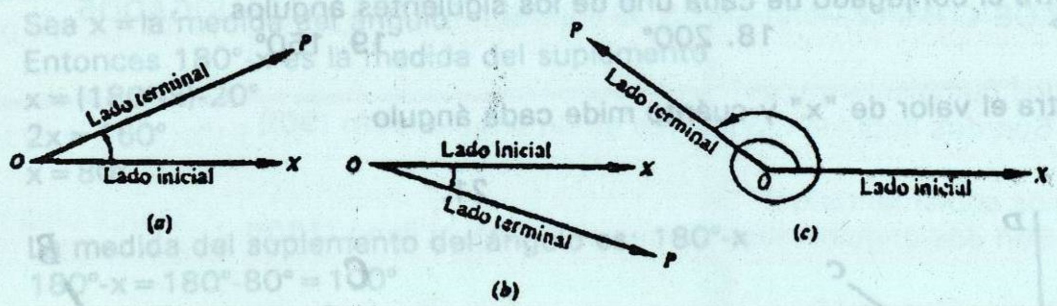


Fig. 4.6

Medido así, la medida de un ángulo no tiene límite numérico, puesto que un lad terminal puede ser rotado tanto como se desee, ya sea en el sentido de las manecill del reloj o en el sentido contrario.

La medida de un ángulo especifica cuánto gira un segmento de recta, desde s posición inicial hasta la final.

Existen dos sistemas fundamentales y de mucho uso para medir ángulos: "sexagesimal" y el "circular".

La medida de un ángulo puede expresarse en grados o en radianes; la prime corresponde al sistema sexagesimal y la segunda al circular.

En el primer sistema, un grado se define como:

> **GRADO (°)**
> Es la medida del ángulo central subtendido por un arco de longitud igual a 1/360 de la circunferencia de un círculo.

Es decir, se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales y cada par es el ángulo de un grado (1°). Cada grado se considera dividido en 60 partes igual llamadas minutos, un minuto (1′) es 1/60 de un grado. Y a su vez, cada minuto e 60 partes iguales llamadas segundos, un segundo (1") es 1/60 de un minuto, o s 1/3600 de un grado.

Ejemplo 1
Convierte el ángulo de 59.23° a grados, minutos y segundos.

Solución

59.23°	=	59° + 0.23°	
	=	59° + 0.23(60)′	Ya que 1° = 60′
	=	59°13.8′	
	=	59°13′ + 0.8(60)"	Ya que 1′ = 60"
	=	59°13′48"	

Ejemplo 2
Convierte el ángulo de 24°18′42" a grados en forma decimal

Solución

24°18′42"	=	24° + 18′ + 42"	
	=	24° + 18′ + (42/60)′	Ya que 60" = 1′
	=	24° + 18.7′	
	=	24° + (18.7/60)°	Ya que 60′ = 1°
	=	24.31°	(redondeado a centésimas)

Si se gira completamente un segmento de recta alrededor de uno de sus extremos, la curva trazada por el otro extremo es una circunferencia. Cada ángulo traza una porción de la circunferencia llamada "arco"; se dice que el arco (PQ) subtiende el ángulo central que lo formó ($\angle$ POQ), mientras que el ángulo "interseca" el arco (fig. 4.7)

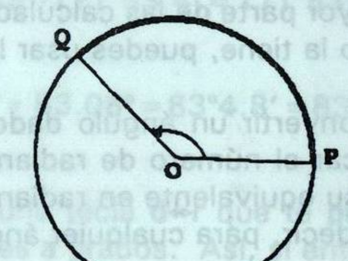


Fig. 4.7

El segundo sistema de medición de ángulos se basa en la idea de que un ángulo central interseca a un arco cuya longitud se puede comparar con el radio de la circunferencia.

Considera ahora que el ángulo central subtendido por un arco AB cuya longitud sea igual al radio de la circunferencia. El $\angle$ AOB de la figura 4.8 nos permite definir una nueva unidad de medida angular que recibe el nombre de "radián".

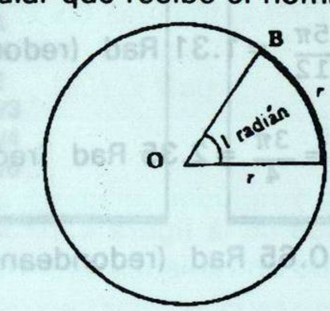


Fig. 4.8

> **RADIAN (Rad)**
> Es el ángulo central subtendido por un arco de longitud igual al radio de la circunferencia del círculo.

El tamaño del $\angle AOB$ (1 rad) siempre será el mismo ya que en cualquier circunferencia la razón de la longitud de la circunferencia a su radio es constante.

En la figura 4.7, si el arco PQ es tres veces el radio de la circunferencia, entonces, el $\angle POQ$ será de 3 Radianes. Generalizando, en cualquier circunferencia la longitud del radio está contenida en la circunferencia "2π" veces, ya que la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi R$. Por lo tanto, toda la circunferencia (360°) subtiende un ángulo de 2π Radianes; entonces 2π Rad = 360°, es decir πRad = 180°. Por consiguiente:

$$1 \text{ Rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} = 57.296° = 57°17'45"$$

$$1° = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ Rad} = 0.017453 \text{ Rad}$$

donde $\pi = 3.14159$ (la mayor parte de las calculadoras tienen una tecla especial para el número π. Si la tuya no la tiene, puedes usar la aproximación anterior).

Esto significa que para convertir un ángulo dado en radianes a su equivalente en grados, debes de multiplicar el número de radianes por $180/\pi$; y para convertir un ángulo dado en grados a su equivalente en radianes, debes de multiplicar el número de grados por $\pi/180$. Es decir, para cualquier ángulo se cumple que:

$$\frac{\textit{No. de radianes}}{\textit{No. de grados}} = \frac{\pi}{180}$$

Ejemplo 3

Convierte los siguientes ángulos expresados en grados a radianes:

a) 75° b) 37.24°
c) 135° d) 58°25'

Solución

a) $75° = 75 \left(\frac{\pi}{180}\right)$ *Rad* $= \frac{5\pi}{12} = 1.31$ Rad (redondeando a centésimas)

b) $135° = 135 \left(\frac{\pi}{180}\right)$ *Rad* $= \frac{3\pi}{4} = 2.35$ Rad (redondeando a centésimas)

c) $37.24° = 37.24 \left(\frac{\pi}{180}\right) = 0.65$ Rad (redondeando a centésimas)

d) $58°25' = 58.42 \left(\frac{\pi}{180}\right) = 1.02$ Rad (redondeando a centésimas)

NOTA: La palabra "radián" se debe de sobrentender sin que esté escrita. No es éste el caso con la medida en grados; sus unidades deben siempre ser incluidas)

Ejemplo 4

Convierte los siguientes ángulos expresados en radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ *Rad* b) 3 Rad

c) $\frac{4\pi}{5}$ *Rad* d) 1.45 Rad

Solución

a) $\frac{\pi}{3} Rad = \frac{\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} = 60^{o}$

b) $\frac{4\pi}{5} Rad = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} = 144^{o}$

c) $3 \text{ Rad} = 3\left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} = 171.89° - 171°53.4' = 171°53'24"$

d) $1.45 \text{ Rad} = 1.45\left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} = 83.08° = 83°4.8' = 83°4'48"$

Algunas calculadoras tienen una tecla d↔r que te permite la conversión directa de grados a radianes y de radianes a grados. Así, si entras con 180 seguido por d↔r te dará 3.14592654 radianes. Si tu calculadora no tiene esta tecla, tendrás que multiplicar por $\pi/180$ para convertir de grados a radianes y por $180/\pi$ para convertir de radianes a grados.

La tabla 1, es una tabla de conversión que muestra algunos ángulos (que ocurren frecuentemente) con su medida tanto en grados como en radianes.

ANGULO EN GRADOS	ANGULO EN RADIANES	ANGULO EN GRADOS	ANGULO EN RADIANES
30	$\pi/6$	210	$7\pi/6$
45	$\pi/4$	225	$5\pi/4$
60	$\pi/3$	240	$4\pi/3$
90	$\pi/2$	270	$3\pi/2$
120	$2\pi/3$	300	$5\pi/3$
135	$3\pi/4$	315	$7\pi/4$
150	$5\pi/6$	330	$11\pi/6$
180	π	360	2π

Tabla 1

Aunque muchos estudiantes están más familiarizados con la medida de un ángulo en grados y, por ello, prefieren manejar los grados en sus cálculos, este tipo de medida tiene sus limitaciones. De hecho, varias aplicaciones de los ángulos incluyendo las geométricas, requieren que éstos se midan en radianes. Esto se debe, a que los radianes son números reales (sistema decimal), independientemente de la elección de las unidades (puesto que la definición de un radián depende de una razón). En esta sección te presentaremos dos aplicaciones de las medidas en radianes referentes a