longitudes de arco y áreas asociados con círculos.

Por ejemplo, en un círculo de radio "r", la longitud "s" del arco interceptado por el ángulo central "$\Theta$", en la figura 4.9 puede encontrarse mediante la fórmula

$$S = r\Theta$$

esto es, la longitud del arco = al radio x el ángulo central en radianes.

NOTA: S y r pueden medirse en cualquier unidad de longitud que convenga pero deben expresarse en la misma unidad).

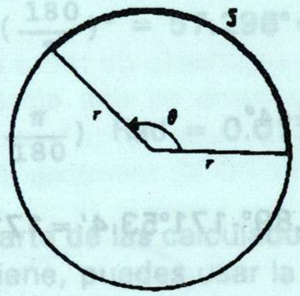



Fig. 4.9

Esta fórmula se sigue inmediatamente de la definición de radián, como la razón de la longitud del arco al radio, esto es, $\theta = \frac{s}{r}$ La fórmula anterior no es válida si $\Theta$ está indicada en grados.

Ejemplo 5

Encuentra la longitud del arco sobre un círculo de 5 m. de radio que subtiende un ángulo central de 40°.

Solución

Para usar la fórmula anterior, la medida del ángulo en grados debe primero convertirse en radianes. Así:

$$\theta = 40^o = 40\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{2\pi}{9}\ Rad$$

Por lo tanto

$$S = (5)\left(\frac{2\pi}{9}\right)m = 3.49m$$

El área "A", la parte sombreada de la figura 4.10, de un sector circular de radio "r" y ángulo central "$\Theta$" expresado en radianes es:

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

esto es, el área del sector = $\frac{1}{2}$ x el angulo central en radianes x el radio al cuadrado.

NOTA: A se medirá en unidades cuadradas de área que corresponden a la unidad de longitud utilizada para medir r




Fig. 4.10

Ejemplo 6

Encuentra el área de un sector formado por un angulo de 96° en un círculo de 15 plg. de diámetro.

Solución

Se convierten 96° a radianes: $\theta = 96^o = 96\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{8\pi}{15}\ Rad$

y el radio es la mitad del diámetro, $r = \frac{15}{2}\ plg$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{15}\right)\left(\frac{15}{2}\right)^2 plg^2 = 15\pi \text{ plg.}^2 = 47 \text{ plg}^2$$

Ejercicio 4.2

Expresa en radianes cada uno de los siguientes ángulos.

| | |
|---|---|
| 1. 50° | 2. 112°45′ |
| 3. 140° | 4. 76°35′25" |
| 5. 68.72° | |

Expresa en grados cada uno de los siguientes ángulos:

| | |
|---|---|
| 6. $\pi$/9Rad | 7. 3/4Rad |
| 8. 5$\pi$/8 Rad | 9. 1.2 Rad |
| 10. 7/5 Rad | |

11. En un círculo de 24 cm. de radio, encuentra la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 80°

12. En un círculo de 15 plg. de radio, encuentra el ángulo central subtendido por un arco de 30 plg. de longitud, en radianes y en grados.

13. Encuentra el radio del círculo para el cual un arco de 20 cm de longitud subtiende un ángulo de 60°.

14. El final de un péndulo de 80 cm describe un arco de 15 cm. ¿Qué ángulo recorre al péndulo al balancearse?

15. El minutero de un reloj de pared es de 20 cm de longitud. ¿Qué recorrido realiza la punta de la manecilla en 20 minutos?

16. La curva de una vía de ferrocarril se va a tender en un círculo. ¿Qué radio deberá usarse si la trayectoria cambia de dirección 25° en una distancia de 120 m?

17. Encuentra el área del sector determinado por un ángulo central de $\pi/3$ Rad. en un círculo de 30 cm de diámetro.

18. Encuentra el área del sector determinado por un ángulo central de 100° en un círculo de 12 cm de radio.

19. Determina el ángulo central necesario en radianes, y en grados, para formar un sector de 14.6 $cm^2$ de área en un círculo de 4.85 cm de radio.

20. Un sector circular de 105 $cm^2$ de área tiene un ángulo central de 50°. Encuentra el radio del círculo.

## 4.3 Triángulos

Objetivo:

> Encontrar la media de un ángulo de un triángulo si se conocen las medidas de los otros dos. Dadas las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, usar el teorema de Pitágoras para encontrar el tercer lado.

En esta sección se presentan algunos conceptos y dos teoremas preliminares sobre triángulos que frecuentemente utilizarás

> TRIANGULO ▵
> Es una superficie plana "trilateral"; es decir, tiene tres lados y por lo tanto tres vértices y tres ángulos.

El triángulo es el polígono con menos lados. Los vértices de un triángulo son los puntos en donde se cortan sus lados y para nombrarlo se pueden usar las tres letras de sus vértices en cualquier orden.

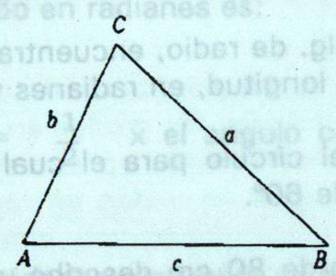



Fig. 4.11



En esta forma, el triángulo que está en la figura 4.11 se designa por ▵ABC; sus vértices son A, B y C, por lo tanto, sus ángulos son A,B y C, también; sus lados son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, pero generalmente los lados se indican con las mismas letras pero minúsculas, de sus ángulos "opuestos" correspondientes, es decir, el lado que no es lado del ángulo recibe la misma letra del ángulo (pero minúscula). Cada uno de los lados de un triángulo que forman un ángulo se les llama lados "adyacentes" del ángulo. Por ejemplo, de la figura 4.11:

El lado "a" es opuesto al ∠A y adyacente al ∠B y ∠C
El lado "b" es opuesto al ∠B y adyacente al ∠A y ∠C
El lado "c" es opuesto al ∠C y adyacente al ∠A y ∠B

Los triángulos se clasifican de acuerdo a sus lados, o a sus ángulos. Con respecto a sus lados, los triángulos pueden ser:

i) Triángulos equiláteros
Son los que tienen sus tres lados iguales ($a = b = c$). También tienen sus tres ángulos iguales (∠A = ∠B = ∠C = 60°)

ii) Triángulos isosceles
Son los que tienen dos de sus lados iguales y uno desigual ($a = b \neq c$). También dos de sus ángulos son iguales (∠A = ∠B).

iii) Triángulos escalenos
Son aquellos que tienen sus tres lados diferentes ($a \neq b \neq c$). Por lo tanto, sus tres ángulos también son diferentes (∠A ≠ ∠B ≠ ∠C).

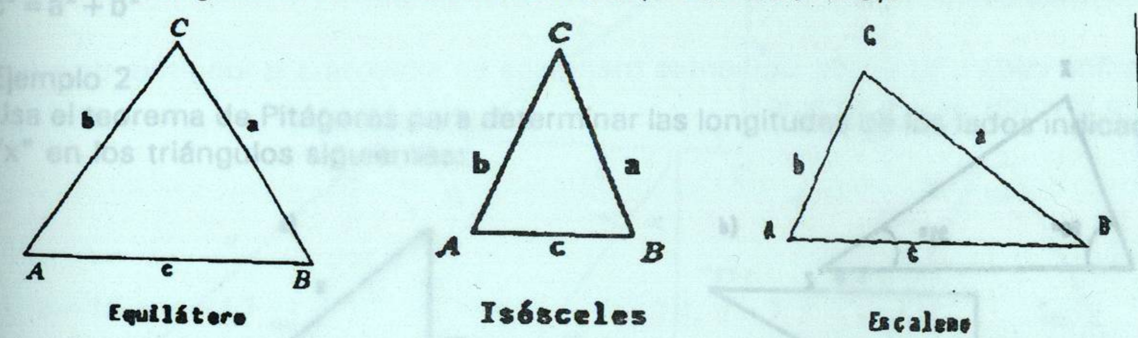



Fig. 4.12

De acuerdo a sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

i) Triángulos rectángulos
Son los que tienen un ángulo recto. En el triángulos rectángulo de la fig. 4.13, el ∠C = 90°. Al lado c, opuesto al ángulo recto se le denomina "hipotenusa" y a los otros dos lados perpendiculares, "a" y "b", se llaman "catetos" del triángulo rectángulo.

ii) Triángulos oblicuángulos
Son aquellos en que ninguno de sus ángulos es recto, y a su vez éstos pueden ser: acutángulos (los que tienen sus tres ángulos agudos) u obtusángulos (los que tienen un ángulo obtuso).

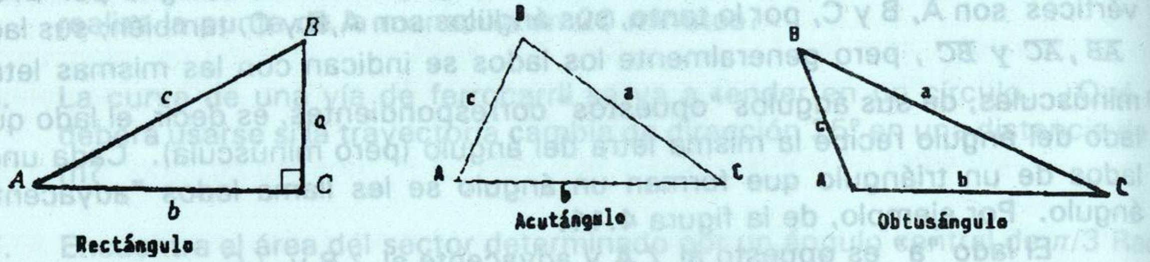



Fig. 4.13

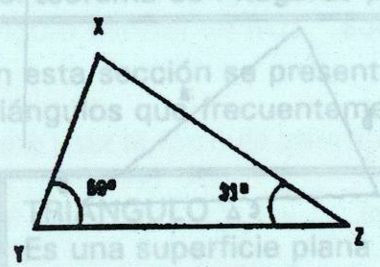
A continuación se enuncian dos teoremas importantes sobre triángulos:

> TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TRIANGULOS
> En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.

Mediante este teorema te permitirá conocer la medida del tercer ángulo, una vez que conozcas las de los otros dos.

Ejemplo 1

Encuentra la medida del $\angle X$ del triángulo siguiente:




Solución

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$
$\angle X + 69° + 31° = 180°$
$\angle X + 100° = 180°$
$\angle X = 180° - 100°$
$\angle X = 80°$



Para el estudio de la trigonometría, el triángulo más importante es el "rectángulo". (fig. 4.14)

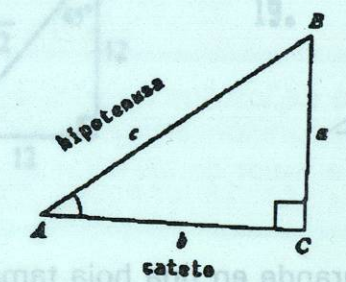


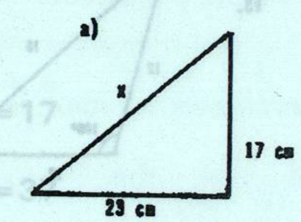

Fig. 4.14

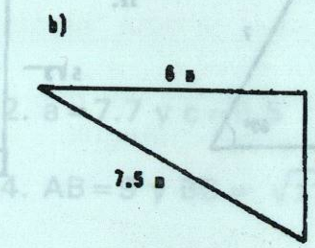
La relación entre los lados de un triángulo rectángulo se llama "teorema de Pitágoras". Y lo usarás para encontrar la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo, si conoces las longitudes de los otros dos.

> TEOREMA DE PITAGORAS
> En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si los catetos son "a" y "b" y la hipotenusa es "c", como en la fig. 4.14, entonces el teorema de Pitágoras se expresará así:
$c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo 2
Usa el teorema de Pitágoras para determinar las longitudes de los lados indicados con "x" en los triángulos siguientes:




Solución
a) $x^2 = 17^2 + 23^2$ (Teorema de Pitágoras)
$x^2 = 289 + 529$
$x^2 = 818$
$x = \sqrt{818} = 28.6\,cm$

b) $7.5^2 = x^2 + 6^2$ (Teorema de Pitágoras)

$$56.25 = x^2 + 36$$
$$x^2 = 56.25 - 36$$
$$x^2 = 20.25$$
$$x = \sqrt{20.25} = 4.5\,m$$

Ejercicio 4.3

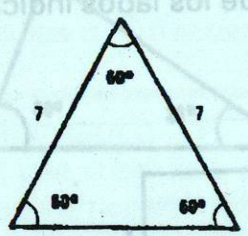
1. Dibuja un triángulo grande en una hoja tamaño carta. Con un transportador mide cada uno de sus ángulos internos. Luego encuentra la suma de las medidas.

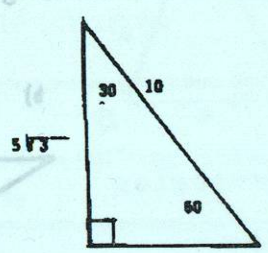
A partir del $\triangle$MNO, encuentra el $\angle O$; si

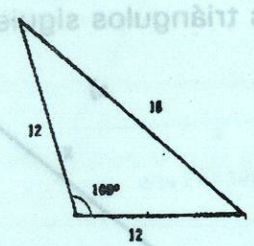
2. $\angle M = 45°$ y $\angle N = 30°$
3. $\angle M = 33°$ y $\angle N = 80°$
4. $\angle M = 90°$ y $\angle N = 13°$
5. $\angle M = 42°$ y $\angle N = 64°$
6. $\angle M = 70°$ y $\angle N = 40°$
7. $\angle M = 82°$ y $\angle N = 73°$

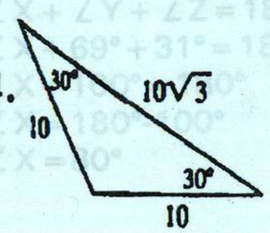
8. En un triángulo isósceles, uno de sus ángulos iguales mide 33°. Encuentra la medida de cada uno de los otros dos ángulos del triángulo.
9. La medida de los ángulos de un triángulo son enteros consecutivos. Encuentra los tres ángulos del triángulo.
10. Si $\triangle$ABC es un triángulo rectángulo isósceles donde $\angle A = 90°$. Encuentra la medida del $\angle B$.

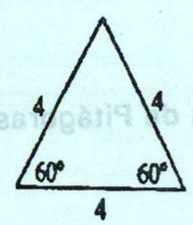
Clasifica cada uno de los siguientes triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados y a la medida de sus ángulos.

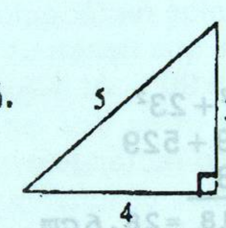
11.



12.


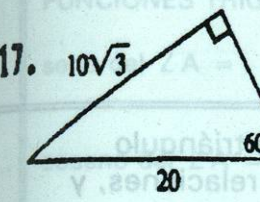

13.


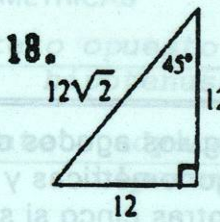

14.


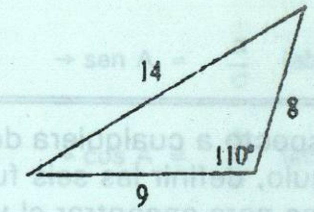

15.


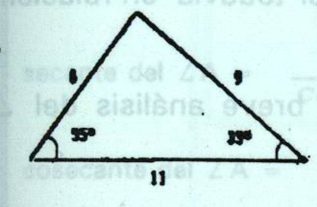

16.




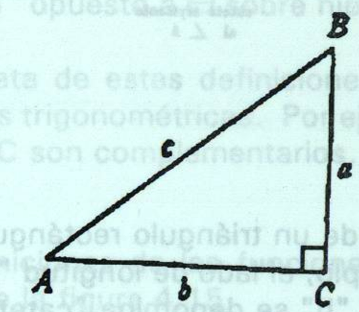

17.



18.



19.



20.



Determina la longitud del tercer lado del triángulo rectángulo siguiente, si los lados dados son:




21. $a = 15$ y $c = 17$
22. $a = 7.7$ y $c = 8.5$
23. $b = 12$ y $c = 37$
24. $AB = 9$ y $BC = \sqrt{17}$
25. $AC = 16$ y $CB = 63$
26. $AC = \sqrt{21}$ y $AB = 11$
27. $BC = 20$ y $CA = 21$
28. $b = 4\sqrt{5}$ y $c = 12$
29. $a = 3.9$ y $b = 8$
30. $a = 7.2$ y $c = 9.7$

## 4.4 Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo:

| |
|---|
| Con respecto a cualquiera de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, definir las seis funciones trigonométricas y sus relaciones, y utilizarlas para encontrar el valor de las otras cinco si se conoce el valor de una de ellas |

Actualmente la trigonometría tiene muchas aplicaciones que nada tienen que ver co[n] triángulos, pero los conceptos básicos se entienden mejor todavía en relación con e[l] triángulo rectángulo.

Iniciamos nuestro estudio de la trigonometría con un breve análisis del $\angle A$ d[el] triángulo rectángulo de la figura 4.15

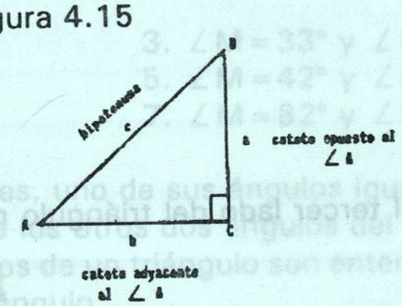



Fig. 4.15

Frecuentemente los lados de un triángulo rectángulo son referidos a uno de los d[os] ángulos agudos. Por ejemplo, el lado de longitud "a" se denomina "cateto opuest[o] al $\angle A$, el lado de longitud "b" se denomina "cateto adyacente" al $\angle A$, y el lado d[e] longitud "c" se denomina "hipotenusa".

Por inspección puedes ver que pueden formarse seis relaciones diferentes con lo[s] lados del triángulo rectángulo:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

Las seis razones son independientes del tamaño del triángulo, pero son dependient[es] de la magnitud del ángulo agudo. (Esta propiedad ya la conocías, cuando calculas[te] pendientes de rectas). estas relaciones son funciones del $\angle A$ y por lo tanto se l[e] llaman "funciones trigonométricas". Para facilitar su análisis, cada una recibe u[n] nombre en especial, como se indica en la siguiente definición.



FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

| | | | |
|---|---|---|---|
| seno del $\angle A$ = | $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ | → sen A = $\dfrac{a}{c}$ | (abreviado) |
| coseno del $\angle A$ = | $\dfrac{\text{cateto adyacente al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$ | → cos A = $\dfrac{b}{c}$ | (abreviado) |
| tangente del $\angle A$ = | $\dfrac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{cateto adyacente al } \angle A}$ | → tan A = $\dfrac{a}{b}$ | (abreviado) |
| cotangente del $\angle A$ = | $\dfrac{\text{cateto adyacente al } \angle A}{\text{cateto opuesto al } \angle A}$ | → cot A = $\dfrac{b}{a}$ | (abreviado) |
| secante del $\angle A$ = | $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al } \angle A}$ | → sec A = $\dfrac{c}{b}$ | (abreviado) |
| cosecante del $\angle A$ = | $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al } \angle A}$ | → csc A = $\dfrac{c}{a}$ | (abreviado) |

Deberás tomarte el tiempo necesario para memorizarte la definición de cada una de las funciones trigonométricas, puesto que son las piedras angulares de la trigonometría. Deberás conocerlas tan bien, que cuando alguien mencione "sen $\Theta$", automáticamente pienses en "opuesto a $\Theta$ sobre hipotenusa".

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se pueden observar algunas relaciones entre las funciones trigonométricas. Por ejemplo, observa que los ángulos agudos ($\angle A$ y $\angle B$) del $\triangle ABC$ son complementarios, es decir,
$\angle A + \angle B = 90°$

La tabla 2 muestra las definiciones de las funciones trigonométricas para los dos ángulos agudos del $\triangle ABC$ de la figura 4.15

| | |
|---|---|
| sen A = $\dfrac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{a}{c}$ | sen B = $\dfrac{\text{op. al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{b}{c}$ |
| cos A = $\dfrac{\text{ady. al } \angle A}{\text{hip}} = \dfrac{b}{c}$ | cos B = $\dfrac{\text{ady. al } \angle B}{\text{hip}} = \dfrac{a}{c}$ |
| tan A = $\dfrac{\text{op. al } \angle A}{\text{ady. al } \angle A} = \dfrac{a}{b}$ | Tan B = $\dfrac{\text{op. al } \angle B}{\text{ady. al } \angle B} = \dfrac{b}{a}$ |
| cot A = $\dfrac{\text{ady. al } \angle A}{\text{op. al } \angle A} = \dfrac{b}{a}$ | cot B = $\dfrac{\text{ady. al } \angle B}{\text{op. al } \angle B} = \dfrac{a}{b}$ |
| sec A = $\dfrac{\text{hip}}{\text{ady. al } \angle A} = \dfrac{c}{b}$ | sec B = $\dfrac{\text{hip}}{\text{ady. al } \angle B} = \dfrac{c}{a}$ |
| csc A = $\dfrac{\text{hip}}{\text{op. al } \angle A} = \dfrac{c}{a}$ | csc B = $\dfrac{\text{hip}}{\text{op. al } \angle B} = \dfrac{c}{b}$ |

Por inspección puedes observar que
sen A = cos B
cos A = sen B
tan A = cot B
cot A = tan B
sec A = csc B
csc A = sec B

Pero como B = 90°-A se define que

| COFUNCIONES |
|---|
| sen A = cos (90°-A) |
| tan A = cot (90°-A) |
| sec A = csc (90°-A) |

El prefijo "co" indica que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento y viceversa; que la cotangente es igual a la tangente de su complemento; y que la cosecante a la secante de su complemento y viceversa. Así toda función de un ángulo agudo es igual a la cofunción correspondiente de su ángulo complementario.

Ejemplo 1

Si tan$\Theta$ = cot 51°; encuentra el valor de $\Theta$

Solución
Como la cofunción de la tangente es la cotangente, los dos ángulos deben de ser complementarios:
$\Theta + 51° = 90°$
$\Theta = 90° - 51°$
$\Theta = 39°$

Observa también que por cada función hay una "función recíproca" (recuerda que el producto de dos recíprocos es igual a 1). Considera las funciones seno y cosecante del $\angle$A de la figura 4.15.

sen A = $\frac{a}{c}$ y csc A = $\frac{c}{a}$

Si multiplicas: (sen A) (csc A); obtienes

(sen A) (csc A) = $(\frac{a}{c})(\frac{c}{a}) = \frac{ac}{ac} = 1$



Así el seno y cosecante son funciones recíprocas, es decir:

sen A = $\frac{1}{cscA}$ ó csc A = $\frac{1}{senA}$

Análogamente, el coseno y la secante y la tangente y la cotangente son recíprocas.

| RELACIONES RECIPROCAS | |
|---|---|
| sen A = $\frac{1}{cscA}$ | csc A = $\frac{1}{senA}$ |
| cos A = $\frac{1}{secA}$ | sec A = $\frac{1}{cosA}$ |
| tan A = $\frac{1}{cotA}$ | cot A = $\frac{1}{tanA}$ |

Debido a estas relaciones recíprocas, se utiliza más frecuentemente una función de cada par de funciones trigonométricas recíprocas. Las funciones trigonométricas que se utilizan con más frecuencia son el seno, el coseno y la tangente.

Ejemplo 2

Si cos $\Theta$ = $\frac{2}{3}$, encuentra el valor de sec $\Theta$

Solución

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ relaciones recíprocas

$\sec\theta = \frac{1}{2/3}$

$\sec\theta = \frac{3}{2}$

Otras relaciones que son de considerable importancia son las resultantes de dividir funciones trigonométricas. Por ejemplo, considera las funciones seno y coseno del $\angle$A de la figura 4.15

$senA = \frac{a}{c}$ y $cosA = \frac{b}{c}$

Si divides: $\frac{sen\ A}{cos\ A}$; obtienes: