$$\frac{sen A}{\cos A} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{ac}{bc} \quad \frac{a}{b} \quad \text{(que es la definición de tan A)}$$

es decir, en términos de funciones trigonométricas

$$\frac{sen A}{\cos A} = \tan A$$

y como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas, se sigue también que

$$\cot A = \frac{\cos A}{sen A}$$

RELACIONES EN FORMA DE COCIENTE		
$\tan A = \dfrac{sen A}{\cos A}$	y	$\cot A = \dfrac{\cos A}{sen A}$

Ejemplo 3

Si senΘ = 3/5 y cosΘ = 4/5; encuentra tanΘ y cotΘ

Solución

$\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$ por relaciones en forma de cociente

$$\tan\theta = \frac{3/5}{4/5} = \frac{(3)(5)}{(4)(5)}$$

$\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ y por lo tanto

$\cot\theta = \dfrac{4}{3}$ relaciones recíprocas

Finalmente con la ayuda del teorema de Pitágoras derivaremos las siguientes relaciones muy importantes también. Para el $\angle A$ del triángulo rectángulo de la figura 4.15, se cumple que
(cateto op.)^2 + (cateto ady.)^2 = (hip)^2
o sea

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Si divides ambos miembros de esta ecuación entre c^2, obtienes

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

es decir, en términos de las funciones trigonométricas
(sen A)^2 + (cos A)^2 = 1

Se acostumbra escribir (sen A)^2 y (cos A)^2 en la forma sen^{2}A y cos^{2}A, respectivamente. Entonces la ecuación se expresa como:
sen^2 A + cos^2 A = 1

Similarmente se pueden derivar otras dos fórmulas dividiendo la ecuación original entre b^2 y a^2, respectivamente tenemos
$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$ y $\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$

RELACIONES PITAGORICAS
$sen^2 A + \cos^2 A = 1$
$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$
$\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$

Ejemplo 4

Si $sen\theta = \dfrac{15}{17}$; encuentra el valor de las otras cinco funciones del $\angle\Theta$.

Solución
Resolviendo la primera relación pitagórica para cosΘ, tenemos:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$$

Sustituyendo

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}}$$

$\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ (tomando solamente la raíz positiva, pues el $\angle\Theta$ es agudo)

Ahora, utilizando las relaciones en forma de cociente

$$\tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$$

Nos queda

$$\tan\theta = \frac{15/17}{8/17}$$

$$\tan\theta = 15/8$$

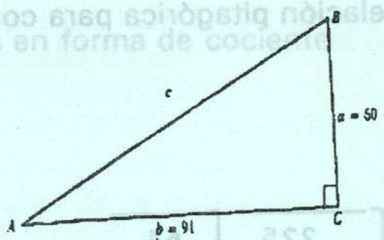
Por lo tanto,
$\cot\Theta = 8/15$ (relaciones recíprocas)
$\sec\Theta = 17/8$
$\csc\Theta = 17/15$

Las relaciones recíprocas, las en forma de cociente y las pitagóricas que hem encontrado en esta sección se refieren a funciones de un sólo ángulo, no pudiéndos utilizar estas fórmulas con dos ángulos diferentes a la vez. Así por ejemplo, no s puede decir que sen A/cos B sea igual a tan A o a tan B, ni que $\text{sen}^2X + \cos^2Y$ se igual a 1, sino tan sólo que para un ángulo cualquiera X, sen X/cos X = tanX $\text{sen}^2X + \cos^2X = 1$, etc.

En general, puedes determinar el valor de las funciones trigonométricas de los ángul agudos de un triángulo si sólo conoces el valor de una de ellas (como el ejemplo 4) bien, si conoces al menos la longitud de dos de los lados del triángulo rectángu utilizando el teorema de Pitágoras y las definiciones de las funciones trigonométrica

Ejemplo 5

Determina el valor de cada una de las funciones trigonométricas de los ángulos agudo del triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, si los catetos a y b miden 60 c y 91 cm, respectivamente.



Solución
Por medio del teorema de Pitágoras se puede encontrar el tercer lado de un triángu rectángulo conocidos los otros dos: si se conocen los catetos, la fórmula que da hipotenusa es
$c^2 = a^2 + b^2$
si se conocen la hipotenusa y uno de los catetos y se desconoce el otro cateto, és se puede encontrar a partir de la fórmula anterior trasponiendo términos. Entonce resulta que
$a^2 = c^2 - b^2$ o bien $b^2 = c^2 - a^2$

Por consiguiente, conocidos los catetos y valiéndonos de la primera de estas fórmul encontraremos primero c de la siguiente manera:
$c^2 = a^2 + b^2 = (60)^2 + (91)^2 = 3600 + 8281 = 11881$
por lo tanto, c = 109 cm

Ya tenemos ahora los tres lados a = 60, b = 91 y c = 109; entonces podemos calcular inmediatamente las funciones trigonométricas de los ángulos A y B, puesto que $\angle C = 90°$, mediante las definiciones de las funciones:

$$\text{sen}\,A = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

Después de hallar senA = 60/109 y cos A = 91/109, se podría, desde luego, utilizar las relaciones en forma de cociente y las recíprocas y calcular tan A, cot A, sec A y csc A de la manera siguiente:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{60/91} = \frac{91}{60}$$

o también

$$\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen}\,A} = \frac{91/109}{60/109} = \frac{91}{60}$$

y

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{91/109} = \frac{109}{91}$$

$$\csc A = \frac{1}{\text{sen}\,A} = \frac{1}{60/109} = \frac{109}{60}$$

En la práctica el seno y el coseno se calculan por determinados métodos especiales y después se aplica este método para el cálculo de las demás funciones. Sin embargo, para familiarizarse con las definiciones de las funciones trigonométricas con los elementos del triángulo, es preferible calcular las funciones directamente a partir del triángulo en vez de hacerlo valiéndose de las relaciones que ligan a las funciones entre sí. Una vez determinadas las funciones por cálculo directo, es útil, sin embargo, utilizar estas relaciones como comprobación.

Para determinar el valor de las funciones trigonométricas correspondientes al $\angle B$ del triángulo rectángulo de la figura anterior, se puede utilizar la relación que liga a las funciones de los ángulos complementarios A y B y escribir las funciones y cofunciones de B deducidas de las correspondientes respectivas cofunciones y funciones del $\angle A$ ya encontradas. Esto será un ejercicio muy instructivo para ti, pero aquí calcularemos todas las funciones de $\angle B$ directamente a partir del triángulo:

$$sen B = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cot B = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$csc B = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

En todas las fracciones que dan las doce funciones de A y de B, tanto el numerador como el denominado están expresados en las mismas unidades. El valor de una función es pues, sencillamente, un "número" que no va expresado en ninguna clase de unidad. Lo mismo da por consiguiente, que los lados 60, 91, 109 de la figura anterior, estén expresados en centímetros, en pulgadas, en metros, en pies, en millas o en otra unidad cualquiera que ésta sea, con tal de que se emplee la misma unidad para medir los tres lados. Así, por ejemplo, si nos dicen que "a" mide 0.6 m, "b" mide 91 cm y "c" mide 1.09 m, hay que empezar por expresar las longitudes en centímetros o las tres en metros, ya que con cualquiera de esas unidades se obtiene el mismo valor de la función "para el mismo ángulo".

Ejercicio 4.4

Utiliza las relaciones fundamentales para encontrar el valor exacto de la función trigonométrica indicada. Considera que el ángulo indicado es agudo.

1. $sen\,\theta = \frac{3}{8}$, encuentra $csc\,\theta$
2. $\cos \varnothing = \frac{3}{5}$, encuentra sec $\varnothing$
3. $\tan\beta = 4$, encuentra $\cot\beta$
4. $\sec\delta = \frac{10}{7}$ encuentra $\cos\delta$
5. $sen\,\alpha = 1/2$ encuentra $\cos\alpha$
6. $sen\,w = \frac{1}{2}$, $\cos w = \frac{\sqrt{3}}{2}$, encuentra tan w
7. $csc\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, encuentra tan θ
8. $\cos\varnothing = \frac{3}{5}$, encuentra las otras cinco
9. $sen\,\beta = \frac{5}{13}$, encuentra las otras cinco
10. $\tan\delta = \frac{21}{20}$, encuentra las otras cinco

Utiliza las relaciones fundamentales y una calculadora para encontrar las funciones trigonométricas indicadas.

11. sen $\Theta = 0.4313$, encuentra csc Θ
12. cos $\Theta = 0.1155$, encuentra sec Θ
13. tan $\beta = 2.397$, encuentra cot β
14. csc $A = 1.902$, encuentra sen A
15. sec $B = 2.03$, encuentra tan B

En los siguientes ejercicios "c" representa la hipotenusa y las otras dos letras los catetos de un triángulo rectángulo. Dibuja una figura para cada uno, indicando los ángulos opuestos a los lados respectivos por las correspondientes letras mayúsculas. Partiendo de los dos lados que se dan como datos, en cada caso, hallar el tercero y calcular después las seis funciones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.

16. $a = 28$, $b = 45$, $c =$
17. $p = 36$, $q = 77$, $c =$
18. $c = 37$, $m = 35$, $n =$
19. $c = 73$, $f = 48$, $g =$
20. $c = 41$, $x = 9$, $y =$

4.5 Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo:

Utilizando las tablas trigonométricas o la calculadora, encontrar los valores aproximados de las funciones trigonométricas de ángulos agudos o encontrar un ángulo agudo a partir del valor de una función trigonométrica. Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas, si la medida del ángulo es 30°, 45° ó 60°.

Hasta esta parte del capítulo se han calculado los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo utilizando las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Sin embargo, como se dijo anteriormente, los valores de las funciones trigonométricas dependen únicamente de la magnitud del ángulo y no del tamaño del triángulo; así, para encontrar el valor de una función trigonométrica sólo se necesita la medida del ángulo.

Los valores de las funciones trigonométricas las necesitarás principalmente para resolver los problemas de aplicación propuestos en las próximas secciones, y los puedes encontrar generalmente enlistados en forma de tablas trigonométricas, o bien, utilizando una calculadora. Se han elaborado tablas trigonométricas adaptadas a diferentes fines, que dan los valores de las funciones con ocho o diez cifras decimales y para ángulos dados a intervalos de un minuto y hasta de un segundo, por ejemplo, como las utilizadas en Astronomía y Topografía. Estas tablas se imprimen en formas muy diversas; algunas muestran las diferentes funciones en sitios separados de la tabla, impresos en páginas distintas.

En la parte final del texto se incluye una tabla de funciones trigonométricas con una aproximación de cuatro cifras decimales para ángulos de 0° a 90° a intervalos de cada 10 minutos, en la que el procedimiento para su uso se resume a continuación:

i) Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 0° y 45°, localiza el ángulo al lado izquierdo de la tabla y el nombre de la función en la parte superior de la columna.

ii) Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 45° y 90°, localiza el ángulo en el lado derecho de la tabla y el nombre de la función en la parte inferior de la columna.

iii) En cada renglón la suma de los ángulos de la columna izquierda con los de la derecha es de 90°, pues las tablas están basadas en la igualdad de las cofunciones de ángulos complementarios. Así, sen 57° = cos(90°-57°) = cos33°

iv) Para encontrar el ángulo agudo teniendo como dato el valor de la función trigonométrica, busca en las dos columnas cuyo encabezado sea la función correspondiente hasta encontrar el valor dado. Si el encabezado de la función se encuentra arriba de la columna, la respuesta es el ángulo de la izquierda; si el encabezado de la función se encuentra en la parte de abajo de la columna, la respuesta es el ángulo de la derecha.

En este capítulo y en el próximo, puedes utilizar la tabla anterior para encontrar los valores de las funciones trigonométricas leyendo el valor directamente de las tablas, siempre que utilices una solución manual del problema.

Ejemplo 1
Encuentra el valor de las siguientes funciones:

a) sen 34°40′ c) tan 55°20′
b) cos 72° d) cot 41°50′

Solución
a) Localiza 24°40′ en la columna de la izquierda (ya que, 24°40′ < 45°) y lee el valor contenido en la casilla que coincide con el "sen" de la parte superior de la tabla:

sen 24°40′ = 0.4173

b) Localiza 72° en la columna de la derecha (ya que 72° > 45°) y lee el valor contenido en la casilla que coincide con el "cos" en la parte inferior de la tabla: cos 72° = 0.3090

c) Tan 55°20′ = 1.4460. Dado que 55°20′ > 45°, se lee la función en la parte inferior de la tabla.

d) Cot 41°50′ = 1.1171. Lee en la parte superior de la tabla dado que 41°50′ < 45°

Ejemplo 2
Dado el valor de la función encuentra el ángulo correspondiente

a) sen A = 0.2924 c) sec C = 1.8361
b) tan B = 2.7725 e) cos D = 0.8886

Solución
El procedimiento es el inverso al que se expreso en el ejemplo anterior:

a) Si sen A = 0.2924 ----> A = 17°
b) Si tan B = 2.7725 ----> B = 70°10′
c) Si sec C = 1.8361 ----> C = 57°
d) Si cos D = 0.8886 ----> D = 27°30′

Para determinar el valor aproximado de una función trigonométrica de un ángulo medido en minutos que no es múltiple de 10′ como en sen 24°43′, se obtiene una proporción entre los valores de los dos ángulos mas cercanos (24°40′ y 45°50′) utilizando el método de "interpolación lineal". Este proceso se muestra en los ejemplos siguientes

Ejemplo 3
Encuentra el valor de: sen 24°43′

Solución
El valor de sen 24°43′ debe ser un valor que este entre sen 24°40′ y sen 24°50′

Se escriben los valores de los tres ángulos en orden ascendente; se buscan los valores de sen 24°40′ y sen 24°50′ en la tabla y se plantea una proporción directa:

sen 24°40′ = 0.4173
sen 24°43′ =
sen 24°50′ = 0.4200

$$x = \frac{3(0.0027)}{10}$$

Así, la corrección es x = 0.0008

A medida que el ángulo aumenta, aumenta también el seno del ángulo:
sen 24°43′ = 0.4173 + 0.0008
sen 24°43′ = 0.4181

(NOTA: cuando se interpola de un ángulo menor a otro mayor, como en el ejemplo anterior, la corrección se suma para el valor del ángulo menor para encontrar el seno, la tangente y la secante; pero se resta al mayor para encontrar el coseno, la cotangente y la cosecante, pues el valor de estas funciones decrecen cuando el ángulo agudo aumenta).

Ejemplo 4
Encuentra A, si cot A = 0.6345

Solución
El valor de 0.6345 esta entre los valores de cot 57°30′ y cot 57°40′.

cot 57°30′ = 0.6371
cot A = 0.6345
cot 57°40′ = 0.6330

$$\frac{x}{10} = \frac{0.0015}{0.0041}$$

$$x = \frac{0.0015}{0.0041}(10')$$

Así, la corrección es $x = 4'$ (redondeando al minuto mas cercano). Al restar la corrección (dado que la función es cotangente) se tiene que:

A = 57°40′-4′
A = 57°36′

Hoy día el uso de las calculadoras proporciona el medio mas conveniente para encontrar los valores específicos de las funciones trigonométricas.

Cuando la utilices para encontrar el valor de alguna función trigonométrica, debes asegurarte de seguir el procedimiento indicado por el manual de la calculadora. En general, el procedimiento es el siguiente:

i) Asegúrate de que la calculadora este en el modo de grados (degree mode)
ii) Introduce el valor del ángulo en grados.
iii) Presiona la tecla de la función trigonométrica deseada (para las funciones cotangente, secante y cosecante se utiliza el recíproco de la función correspondiente).
iv) Lee el valor de la función desplegado en la pantalla.

Al utilizar la calculadora para encontrar un ángulo agudo, cuando se conoce el valor de la función trigonométrica, se utiliza la operación inversa, tecla INV o la tecla de las segundas funciones (2nd). Se introduce el valor de la función, después se presiona la tecla INV o la segunda función (2nd) y se presiona la tecla de la función trigonométrica deseada. Se utiliza el modo de grados para obtener el resultado en grados.

Ejemplo 5

Utilizando la calculadora encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas:
a) tan 48°23′
b) cot 37°20′

Solución
a) i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
tan 48°23′ = tan $\left(48 + \frac{23}{60}\right)°$

ii) Introduce el 48, presiona la tecla (+), introduce el 23, presiona la tecla (÷), introduce 60, presiona la tecla (=).

iii) Presiona la tecla (tan)

iv) tan 48°23′ = 1.1257 redondeando a 4 cifras decimales

b) i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
cot 37°20′ = cot $\left(37 + \frac{20}{60}\right)°$

ii) Introduce el 37, presiona la tecla (+), introduce el 20, presiona la tecla (÷), introduce el 60, presiona la tecla (=).

iii) Presiona la tecla (tan)

iv) Presiona la tecla (1/x) o divide 1 entre el valor de tan 37°20′

v) cot 37°20′ = 1.3111 redondeando a 4 cifras decimales

Dado el valor de una función trigonométrica, el valor del ángulo se puede encontrar fácilmente en grados y decimales mediante el uso de una calculadora. Si los ángulos se desean en minutos, se toma la parte decimal y se multiplica por 60′, redondeando el resultado según se requiera.

Ejemplo 6
Encuentra A, si
a) sen A = 0.4234
b) sec A = 3.4172