Solución

a)
- i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- ii) Introduce 0.4234, presiona la tecla (INV), y la tecla (Sen)
- iii) A = 25.05° (al centésimo mas cercano)
- iv) Recuerda el numero entero de grados, 25°
- v) Presiona la tecla (-), introduce 25, presiona la tecla (=), presiona la tecla (x), introduce 60 y presiona la tecla (=).
- vi) El valor redondeado al minuto mas cercano es 3'
- vii) A = 25°3'

b)
- i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
- ii) Introduce 3.4172, presiona la tecla (1/x), o bien introduce 1, presiona (÷), introduce 3.4172 y presiona la tecla (=)
- iii) Presiona la tecla (INV) y la tecla (Cos).
- iv) A = 72.98° al centésimo mas cercano, o bien
- v) Recuerda el numero entero de grados, 72°
- vi) Presiona la tecla (-), introduce 72, presiona la tecla (=), presiona la tecla (x), introduce 60 y presiona la tecla (=)
- vii) El valor redondeado al minuto mas cercano es 59'
- viii) A = 72°59'

Los ángulos de 30°, 45° y 60°, por sus propiedades geométricas, aparecen tan frecuentemente que a veces se les llama "ángulos especiales". Es relativamente fácil determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de estos ángulos sin la necesidad de usar una calculadora o las tablas. El procedimiento para determinar estos valores se muestra a continuación:

Si en el cuadrado ABCD de la figura 4.16 se traza la diagonal AB, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales, y puesto que los catetos de esos triángulos son iguales por ser lados de un cuadrado, resulta que los dos ángulos agudos de cada triángulo serán iguales a la mitad de 90°, o sea, 45°. Por consiguiente,

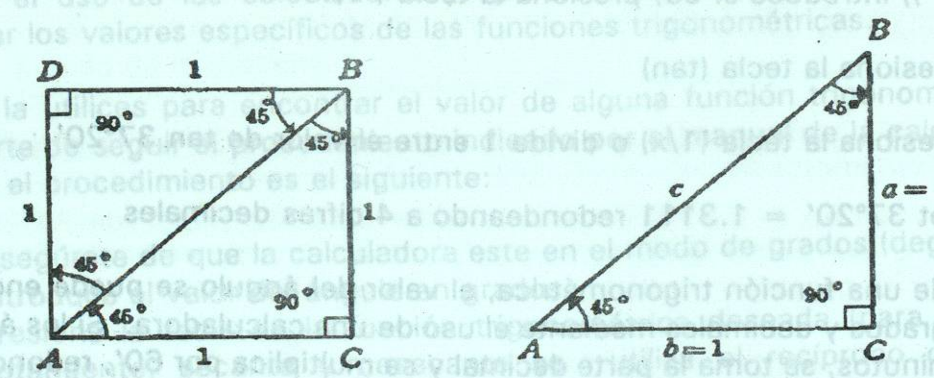

Fig. 4.16

si tomamos los lados del cuadrado iguales a una unidad, cualquiera que esta sea, y dibujamos separadamente el triángulo rectángulo ABC (fig. 4.16), por el teorema de Pitágoras, obtendremos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 1^2 + 1^2$$
$$c^2 = 2$$

Por lo tanto $c = \sqrt{2}$

y las funciones trigonométricas del $\angle A = \angle B = 45°$

sen 45°	=	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	csc 45°	=	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
cos 45°	=	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	sec 45°	=	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
tan 45°	=	$\frac{1}{1} = 1$	cot 45°	=	$\frac{1}{1} = 1$

Ya hemos dicho que el triángulo equilátero es también equiangular midiendo cada ángulo 60° ($\angle A = \angle B = \angle C = 60°$). En el triángulo equilátero ABD de la figura 4.17, se ha trazado por el vértice B la altura BC que es perpendicular a la base AD, y por consiguiente, los dos ángulos en C son rectos. Los dos triángulos ABC y BCD son pues, rectángulos. Entonces, como en el triángulo rectángulo ABC, la suma de los ángulos A y ABC es igual a 90° y $\angle A = 60°$, por lo tanto $\angle ABC$ es igual a 30°. Análogamente, en el triángulo rectángulo BCD el $\angle CBD$ es igual a 30° y por lo tanto, la altura BC es también bisectriz del $\angle ABD$.

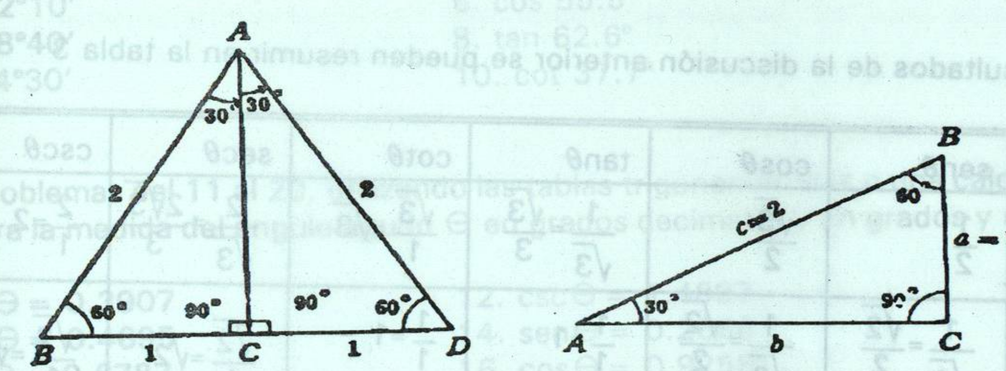

Fig. 4.17

Por tener los triángulos rectángulos ABC y BCD ángulos iguales, hipotenusas iguales, y un cateto BC igual, son iguales, y por lo tanto, lo son los catetos correspondientes AC y CD. La altura BC también bisecta a la base. Si tomamos los lados del $\triangle ABD$ iguales a dos unidades, tendremos que $AC = CD = 1$, y el triángulo rectángulo ABC dibujado separadamente queda tal como se ilustra en la fig. 4.17. En este triángulo, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1$$
$$a^2 = 3$$
$$a = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, de acuerdo al $\triangle ABC$ de la fig. 4.17, las funciones trigonométricas de 30° y 60° son:

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Los resultados de la discusión anterior se pueden resumir en la tabla 3

θ	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla 3

Los triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45° y de 30° y 60° son muy importantes y conviene aprenderse de memoria los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos. Existe una manera muy sencilla para recordar los valores de las tres principales funciones escribiéndolas en forma radical:

Θ	senΘ	cosΘ	tanΘ
0°	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$
30°	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
45°	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$
60°	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$
90°	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 10, encuentra el valor de cada una de las siguientes funciones, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora y redondeando el resultado con cuatro cifras decimales.

1. sen 76°
2. csc 64°14'
3. tan 18°
4. sen 40.4°
5. cos 32°10'
6. cos 55.5°
7. sec 28°40'
8. tan 62.6°
9. cot 54°30'
10. cot 37.7°

En los problemas del 11 al 20, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora, encuentra la medida del ángulo agudo Θ en grados decimales y en grados y minutos.

11. senΘ = 0.3907
12. cscΘ = 1.4897
13. cosΘ = 0.4695
14. senΘ = 0.2686
15. tanΘ = 0.6787
16. cosΘ = 0.9258
17. cotΘ = 0.3185
18. tanΘ = 2.9460
19. secΘ = 1.1890
20. cscΘ = 3.0150

En los problemas del 21 al 30, utilizando los valores exactos de las funciones 30°, 45° y 60°; demuestra que le miembro de la izquierda es igual al miembro de la derecha.

21. $\csc 45° = \dfrac{1}{sen\,45°}$

22. $\sec^2 60° - \tan^2 60° = 1$

23. $\sec 30° = \csc 60°$

24. $sen\,30° \cos 60° + sen\,60° \cos 30° = 1$

25. $\cot 60° = \dfrac{\cos 60°}{sen\,60°}$

26. $\cos 30° \cos 60° - sen\,30°\,sen\,60° = 0$

27. $\tan 45° = \dfrac{sen\,45°}{\cos 45°}$

28. $sen\,60° = 2\,sen\,30° \cos 30°$

29. $sen^2 45° + \cos^2 45° = 1$

30. $sen\,30° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60°}{2}}$

CAPITULO 5

TRIGONOMETRIA

SEGUNDA PARTE

Uno de los usos principales de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo" .

Un triángulo esta compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto: a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontraras ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.